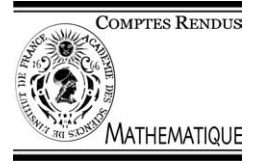




Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 65–69



Problèmes mathématiques de la mécanique

Films courbés minces martensitiques

Hervé Le Dret, Hamdi Zorgati

Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 14 avril 2004 ; accepté le 23 avril 2004

Disponible sur Internet le 28 mai 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On considère un film courbé mince composé d'un matériau martensitique. Le comportement du film est décrit par une énergie totale composée d'une partie d'énergie interne et d'un terme d'énergie d'interface. Lorsque l'épaisseur du film courbé tend vers zéro, on montre en utilisant les outils de Γ -convergence, que les minimiseurs de l'énergie totale convergent vers les minimiseurs d'une énergie dépendant d'une déformation bidimensionnelle et d'un vecteur de Cosserat. *Pour citer cet article : H. Le Dret, H. Zorgati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Curved martensitic thin films. We consider a curved thin film made of a martensitic material. The behavior of the film is described by a free energy composed of a bulk energy and an interfacial energy term. When the thickness of the curved film goes to zero, we show with Γ -convergence arguments that the minimizers of the free energy converge to the minimizers of an energy depending on a two-dimensional deformation and one Cosserat vector field. *To cite this article: H. Le Dret, H. Zorgati, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We consider a curved thin film made of a martensitic material (see [2,6,7,10]). The thin film occupies an open domain of the form

$$\tilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \exists \tilde{x} \in \tilde{S}, x = \tilde{x} + \eta a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \text{ avec } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\}, \quad (1)$$

where \tilde{S} is the curved midsurface of the film, $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$ is the unit vector normal to \tilde{S} at the point \tilde{x} , and h is the thickness of the film.

Adresses e-mail : ledret@ccr.jussieu.fr (H. Le Dret), zorgati@ann.jussieu.fr (H. Zorgati).

The behavior of the thin film undergoing a deformation $\tilde{\varphi}$ is described by an energy \tilde{e}^h in two parts. The first part is a hyperelastic energy and the second part is an interfacial energy term :

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} [W(\nabla\tilde{\varphi}) + \kappa|\nabla^2\tilde{\varphi}|^2] dx, \quad (2)$$

where W is a hyperelastic stored energy function satisfying growth and coercivity hypotheses, $\nabla\tilde{\varphi}$ denotes the gradient of the deformation, κ is a nonnegative constant and $\nabla^2\tilde{\varphi}$ is the $3 \times 3 \times 3$ tensor of second derivatives.

In this Note, we analyze the asymptotic behavior of the total energy and its minimizers over a set of admissible deformations \tilde{V} of the form

$$\tilde{V} = \{\tilde{\varphi} \in H^2(\tilde{\Omega}_h; \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{A}\tilde{x} \text{ on } \tilde{\Gamma}_h\}, \quad (3)$$

when the thickness of the film h goes to zero, where $\tilde{\Gamma}_h$ represents the lateral surface of $\tilde{\Omega}_h$ and $\tilde{A} = (\tilde{a}_1|\tilde{a}_2|\tilde{a}_3)$ is a constant matrix in M^3 .

We begin the study by rescaling the energy in order to work on a domain independent of the thickness h . Then, we study the behavior of the minimizers of the energy when the thickness goes to zero. We show, using Γ -convergence arguments (see [1,3–5]), that the minimizers of the rescaled energy converge to the minimizers of the limit energy depending on a two-dimensional deformation and one Cosserat vector field.

We note that the existence of the interfacial term simplifies the computation of the Γ -limit of the energy. Indeed, we do not have to relax the bulk energy density as in Le Dret and Raoult [8,9] for instance.

Finally we rewrite the limit model in its original reference configuration to show the intrinsic aspect of the limit minimizing problem.

1. Préliminaires

On considère un film courbé mince martensitique d'épaisseur h occupant un domaine $\tilde{\Omega}_h$ de la forme

$$\tilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \exists \tilde{x} \in \tilde{S}, x = \tilde{x} + \eta a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \text{ avec } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\}, \quad (4)$$

où \tilde{S} est la surface moyenne de $\tilde{\Omega}_h$, une sous-variété bidimensionnelle de classe C^2 de \mathbb{R}^3 admettant un atlas comportant une seule carte ψ . Cette carte est un C^2 -difféomorphisme. Elle envoie un ouvert borné ω inclus dans \mathbb{R}^2 de frontière lipschitzienne dans \tilde{S} , $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$ est le vecteur normal à \tilde{S} au point \tilde{x} . Le vecteur a_3 est le troisième vecteur de la base covariante du plan tangent associé à la carte ψ .

Les états d'équilibre du film mince subissant une déformation $\tilde{\varphi}$ sont les minimiseurs d'une énergie \tilde{e}^h composée d'une partie d'énergie interne élastique et d'un terme d'énergie d'interface

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} [W(\nabla\tilde{\varphi}) + \kappa|\nabla^2\tilde{\varphi}|^2] dx, \quad (5)$$

où κ est une constante strictement positive, $\nabla^2\tilde{\varphi}$ est le tenseur $3 \times 3 \times 3$ des dérivées secondes et W est la densité d'énergie interne hyperélastique du matériau dépendant du gradient de la déformation et vérifiant les propriétés de croissance et de coercivité suivantes : $\exists c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1(|A|^2 - 1) \leq W(A) \leq c_2(|A|^q + 1), \quad 2 \leq q < 6. \quad (6)$$

Les déformations $\tilde{\varphi}$ appartiennent à $\tilde{V} = \{\tilde{\varphi} \in H^2(\tilde{\Omega}_h; \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{A}\tilde{x} \text{ sur } \tilde{\Gamma}_h\}$ où $\tilde{\Gamma}_h$ désigne la surface latérale de $\tilde{\Omega}_h$ avec $\tilde{A} = (\tilde{a}_1|\tilde{a}_2|\tilde{a}_3)$ une matrice constante de M^3 (voir [2,6,7,10]).

On s'intéresse au comportement de l'énergie \tilde{e}^h ainsi que celui de ses minimiseurs lorsque l'épaisseur du film mince tend vers zéro. Pour cela, on utilise les outils de la Γ -convergence (voir [1,3–5]). Tout d'abord,

on procède à un changement d'échelle afin de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur h . On pose, pour $x \in \Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } -\frac{1}{2} < x_3 < \frac{1}{2}\}$, $\varphi_h(x) = \tilde{\varphi}(\Psi(x_1, x_2, hx_3))$, où $\Psi : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par $\Psi(x) = \psi(x_1, x_2) + x_3 a_3(x_1, x_2)$ avec $\Omega_h = \{x \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2}\}$. On pose aussi $e(h)(\varphi_h) = \frac{1}{h} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi})$. Il en découle que $e(h)(\varphi_h) = I(h)(\varphi_h) + K(h)(\varphi_h)$ avec

$$I(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} W \left[\left(\varphi_{,1} | \varphi_{,2} | \frac{1}{h} \varphi_{,3} \right) A_h \right] d_h dx \tag{7}$$

et

$$K(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa \left\| \left[\left(\nabla_p^2 \varphi + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_{,3} + \nabla_p \varphi_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} e_3 \otimes \varphi_{,33} \otimes e_3 \right) \bar{\otimes} A_h \right]^T \bar{\otimes} A_h + \left[\nabla_p \varphi + \frac{1}{h} \varphi_{,3} \otimes e_3 \right] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1}(\Psi(x_1, x_2, hx_3)) \right\|^2 d_h(x) dx, \tag{8}$$

où $\varphi_{,i}, \varphi_{,ij}$ désignent respectivement la dérivée première par rapport à la i ème variable et la dérivée seconde par rapport à la i ème et j ème variable de φ , et où l'on a posé $d_h(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3)$ et $A_h(x) = \nabla \Psi^{-1}(\Psi(x_1, x_2, hx_3))$. On a aussi utilisé les notations $\nabla_p \varphi = \varphi_{,\alpha} \otimes e_\alpha$ et $\nabla_p^2 \varphi = e_\alpha \otimes \varphi_{,\alpha\beta} \otimes e_\beta$. Enfin, pour deux tenseurs P et Q d'ordres p et q , $P \bar{\otimes} Q$ désigne le produit tensoriel contracté de P et Q qui est un tenseur d'ordre $p + q - 2$ dont les composantes sont obtenues par contraction du premier indice de P par le dernier indice de Q .

On étudie le problème de minimisation suivant : trouver $\varphi(h) \in V_h$ vérifiant

$$e(h)(\varphi(h)) = \min_{\varphi \in V_h} e(h)(\varphi), \tag{9}$$

avec $V_h = \{\varphi \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3); \varphi(x) = \tilde{A}(\Psi(x_1, x_2, hx_3)) \text{ sur } \partial\omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

2. Résultats principaux

On prolonge l'énergie $e(h)$ à $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ tout entier en posant pour tout $\varphi \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$

$$e^*(h)(\varphi) = \begin{cases} e(h)(\varphi), & \text{si } \varphi \in V_h, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

Naturellement $\varphi(h)$ minimise également $e^*(h)$ sur $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$. On a le lemme suivant.

Lemme 2.1. Soit $\varphi_h \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ une suite vérifiant $e^*(h)(\varphi_h) \leq c$ avec c une constante positive. Il existe alors $\varphi^0 \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$, $\bar{b} \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ et $\bar{c} \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ tels que pour une sous suite de φ_h (encore notée φ_h) on a

$$\begin{cases} \varphi_h \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \\ \frac{1}{h} \varphi_{h,3} \rightharpoonup \bar{b} & \text{dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \\ \frac{1}{h^2} \varphi_{h,33} \rightharpoonup \bar{c} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible} \end{cases} \tag{11}$$

avec $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$ où

$$W_0 = \left\{ (\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ vérifiants } \varphi^0_{,3} = 0, \bar{b}_{,3} = 0 \right. \\ \left. \text{et } \varphi^0(x) = \tilde{A}\Psi(x_1, x_2, 0), \bar{b}(x) = \tilde{A}\Psi_{,3}(x_1, x_2, 0) = \tilde{A}a_3(x_1, x_2) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Nous obtenons alors

Proposition 2.2. Soit $\varphi(h)$ un minimiseur de l'énergie $e(h)$ sur V_h . Alors pour une sous-suite encore notée $\varphi(h)$, il existe $\varphi^0 \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$, $\bar{b} \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ et $\bar{c} \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ tels que

$$\begin{cases} \varphi(h) \rightarrow \varphi^0 & \text{fortement dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h}\varphi_{,3}(h) \rightarrow \bar{b} & \text{fortement dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h^2}\varphi_{,33}(h) \rightarrow \bar{c} & \text{fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (12)$$

avec

$$(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0. \quad (13)$$

On passe ensuite au calcul de la Γ -limite de l'énergie, laquelle dépend de la déformation bidimensionnelle et de deux vecteurs de Cosserat, ce qui nous conduit à réécrire l'énergie dans l'espace $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ en posant

$$E^*(h)(\varphi, b, c) = \begin{cases} e^*(h)(\varphi) & \text{si } b = \frac{1}{h}\varphi_{,3}, \quad c = \frac{1}{h^2}\varphi_{,33}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (14)$$

Pour tout $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$, on pose

$$E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{cases} \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left[(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + e_3 \otimes \bar{c} \otimes e_3) \bar{\otimes} A_0 \right]^T \bar{\otimes} A_0 \right. \\ \quad \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right\}^2 \\ \quad + W[(\varphi^0_{,1} | \varphi^0_{,2} | \bar{b}) A_0] \Big\} d_0 dx & \text{si } (\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (15)$$

où $A_0(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0)$ et $d_0(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, 0)$. On obtient le théorème suivant.

Théorème 2.3. La suite $E^*(h)$ Γ -converge vers $E^*(0)$ pour la topologie forte de $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ quand h tend vers zéro.

Remarque 1. Le calcul de la Γ -limite est simplifié par le terme d'énergie d'interface. Contrairement au cas des films hyperélastiques, voir [8], la densité d'énergie élastique interne du modèle limite n'est pas relaxée.

Remarque 2. L'énergie limite dépend d'une déformation bidimensionnelle et de deux vecteurs de Cosserat. On observe en effet une dépendance par rapport au vecteur \bar{c} due au caractère courbé du film mince. La minimisation de l'énergie limite permet d'annuler ce deuxième vecteur de Cosserat.

On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.4. La famille des minimiseurs $\varphi(h) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ de $e(h)$ admet une sous suite (encore notée par $\varphi(h)$) telle que

$$\begin{cases} \varphi(h) \rightarrow \varphi^0 & \text{fortement dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h}\varphi_{,3}(h) \rightarrow \bar{b} & \text{fortement dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h^2}\varphi_{,33}(h) \rightarrow \bar{c} & \text{fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (16)$$

avec $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$ minimisant l'énergie limite

$$\begin{aligned}
 e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) &= \int_{\Omega_1} \kappa |[(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + e_3 \otimes \bar{c} \otimes e_3) \bar{\otimes} A_0(x)]^T \bar{\otimes} A_0(x) \\
 &+ [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0)|^2 + W[(\varphi_{,1}^0(x) | \varphi_{,2}^0(x) | \bar{b}) A_0(x)] d_0(x) dx.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Remarque 3. En utilisant l'équation d'Euler–Lagrange associée au problème de minimisation de l'énergie $e(0)$ sur W_0 on montre grâce au Corollaire 2.4, que $\bar{c}_{,3} = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$. On montre alors que la minimisation de l'énergie conduit à prendre $\bar{c} = 0$.

On termine l'étude par un retour à la configuration de référence initiale qu'on obtient en effectuant le changement de variables inverse. On pose donc $\tilde{x} = \Psi(x)$ pour $x \in \Omega_1$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi^0(x)$, $\tilde{b}(\tilde{x}) = \bar{b}(x)$, $\tilde{c}(\tilde{x}) = \bar{c}(x)$, $\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}) = e(0)(\varphi)$ et $\tilde{S} = \Psi(\omega)$. On obtient l'expression de l'énergie limite

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}, \tilde{c}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 |\tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x})(a^3)_k(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x})(a^3)_j(\tilde{x}) \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{c}_i(\tilde{x})(a^3)_k(\tilde{x})(a^3)_j(\tilde{x}) + \tilde{b}_i(\tilde{x})(a^3)_{j,k}(\tilde{x})|^2 + W[\nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes a^3(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma},
 \end{aligned} \tag{18}$$

où $a^3(\tilde{x})$ est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne \tilde{S} en \tilde{x} .

Remarque 4. On remarque que l'énergie limite obtenue ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel on l'écrit. Ceci souligne le caractère intrinsèque du problème limite de minimisation.

Références

- [1] H. Attouch, Variational Convergence for Functions and Operators, Pitman, Boston.
- [2] K. Bhattacharya, R.D. James, A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators, J. Mech. Phys. Solids 47 (1999) 531–576.
- [3] G. Dal Maso, An Introduction to Γ -Convergence, in: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1993.
- [4] E. De Giorgi, Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area, Rend. Mat. (IV) 8 (1975) 277–294.
- [5] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, Atti. Accad. Naz. Lincei 58 (1975) 842–850.
- [6] H. Le Dret, N. Meunier, Heterogeneous wires made of martensitic materials, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 143–147.
- [7] H. Le Dret, N. Meunier, Modeling heterogeneous martensitic wires, in press.
- [8] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, J. Math. Pures Appl. (9) 74 (6) (1995) 549–578.
- [9] H. Le Dret, A. Raoult, The membrane shell model in nonlinear elasticity: a variational asymptotic derivation, J. Nonlinear Sci. (1996) 59–84.
- [10] Y.C. Shu, Heterogeneous thin films of martensitic materials, Arch. Rational Mech. Anal. 153 (1993) 157–199.