Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 963–968
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse numérique

# Un modèle PML bien posé pour l'élastodynamique anisotrope

Adib Rahmouni

*Département de mathématiques, IRMAR, Université Rennes 1, 35042 Rennes cedex, France*

Reçu le 9 janvier 2003 ; accepté après révision le 6 avril 2004
Disponible sur Internet le 7 mai 2004
Présenté par Olivier Pironneau

**Résumé**

On propose dans cette Note un modèle PML bien posé pour l'élastodynamique. La technique utilisée repose sur une approche algébrique conduisant à un problème fortement bien posé et assurant la continuité des inconnues à la traversée de la couche évitant ainsi les réflexions parasites. De plus ce nouveau modèle porte sur les inconnues primitives contrairement à celui obtenu par l'approche de Bérenger [J.P. Bérenger, J. Comput. Phys. (1994) 185–200]. Il est donc plus facile à intégrer dans un code de calcul existant. ***Pour citer cet article : A. Rahmouni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


**Abstract**

**A well posed PML model for anisotropic elastodynamic.** We propose in this paper a well-posed PML model for the elastodynamic system. The technique relies on an algebraic approach leading to a strongly well posed system, ensuring continuity of the variables across a layer, avoiding interfering reflexions. Moreover, this new model is written in the primitive variables, unlike the system obtained by the Bérenger approach [J.P. Bérenger, J. Comput. Phys. (1994) 185–200] and so is easier to integrate into an existing code. ***To cite this article: A. Rahmouni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


## Abridged English version

### Position of the problem

The goal of this paper is to present a well posed PML model for elastodynamic equations. The technique we propose has been successfully used for other systems [7]. We first recall the equations of elastodynamics in the two-dimensional anisotropic case [1]:

$$\begin{bmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \partial_t \boldsymbol{\Psi} = \widetilde{D} \partial_t \boldsymbol{\Psi} = A \partial_1 \boldsymbol{\Psi} + B \partial_2 \boldsymbol{\Psi}, \tag{1}$$

*Adresse e-mail :* Adib.Rahmouni@univ-rennes1.fr (A. Rahmouni).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2004.04.001

where $\boldsymbol{\Psi}^t = (v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{13})$, and $D, A, B$ are given by (9), (10). The unsplit PML model in the frequency domain is given by

$$\mathrm{i}\omega\widetilde{D}\hat{\boldsymbol{\Psi}} - S_1 A\partial_1\hat{\boldsymbol{\Psi}} - S_2 B\partial_2\hat{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \tag{2}$$

where

$$S_1 = \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega + \alpha_1} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega + \alpha_2},$$

here $\alpha_1$ and $\alpha_2$ are the damping factors in the layer.

This new system has the 'Perfectly Matched Layer' properties [6].

## The time domain model

In order to obtain a well posed PML model in the time domain, we choose two operators $M$ and $N$ given by $M = N = \mathrm{diag}[S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_1^2, S_2^2, S_1 S_2]$. They satisfy [6]

$$\begin{cases} MAN = S_1 A, \quad MBN = S_2 B, \\ \lim_{\vec{\alpha}\to 0} N = I. \end{cases} \tag{3}$$

Thanks to the change of variables $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = N\boldsymbol{\Psi}$, the system becomes

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\omega\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - A\partial_1\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - B\partial_2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \\ \mathcal{P}_\omega = i\omega N^{-1}\widetilde{D}N^{-1} + A(\partial_1 N)N^{-1} + B(\partial_2 N)N^{-1}. \end{cases} \tag{4}$$

In order to establish the time-domain model, we start by writing the operator $\mathcal{P}_\omega$ in the form

$$\mathcal{P}_\omega = \mathrm{i}\omega[\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}] + R_2 U_\omega + R_3 U_\omega^2 + R_4 U_\omega^3 + R_5 V_\omega + P, \tag{5}$$

where

$$R_1 = \mathrm{diag}[-\alpha_1, -\alpha_2, 0, 0, 0] \quad \text{and} \quad U_\omega = \mathrm{diag}\big[(\mathrm{i}\omega + \alpha_1)^{-1}, (\mathrm{i}\omega + \alpha_2)^{-1}, (\mathrm{i}\omega)^{-1}, (\mathrm{i}\omega)^{-1}, (\mathrm{i}\omega)^{-1}\big].$$

On the other hand $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ and $P$, depend only on $\widetilde{D}$, $\alpha_1$ and $\alpha_2$. The time-harmonic PML model is finally reduced to

$$\mathrm{i}\omega[\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}]\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_2 U_\omega\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_3 U_\omega^2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_4 U_\omega^3\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_5 V_\omega\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + P\widetilde{\Psi} - A\partial_1\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - B\partial_2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0. \tag{6}$$

By an inverse Fourier transform of (6), we would obtain a model, which is not local in time:

$$[\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}]\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_2 K_2 \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_3 K_3 \overset{t}{*} \widetilde{\Psi} + R_4 K_4 \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_5 K_5 \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + P\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - A\partial_1\widetilde{\Psi} - B\partial_2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0.$$

Instead we increase the number of unknowns (which is a classical technique when studying dispersive materials [9]) and introduce new vector-valued variables $\phi_i$, $i = 2, \ldots, 5$. Back to the time domain we obtain

$$\begin{cases} [\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}]\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_2\phi_2 + R_3\phi_3 + R_4\phi_4 + R_5\phi_5 + P\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - A\partial_1\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - B\partial_2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \\ \partial_t\phi_2 + F_2\phi_2 - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \\ \partial_t\phi_3 + F_3\phi_3 + \phi_2 = 0, \\ \partial_t\phi_4 + F_4\phi_3 = 0, \\ \partial_t\phi_4 + F_5\phi_5 - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

This model preserves the absorption and decay properties of the Bérenger model. Furthermore it is symmetric hyperbolic.

**Remark 1.** The new unknown $\widetilde{\Psi}$ is equal to the original one, $\Psi$, in the domain of interest (i.e. when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Moreover, due to $\lim_{\alpha_1,\alpha_2\to 0} N = I$ there is no reflection for a wave travelling from the domain of interest to the PML when transmitted to the PML.

Finally, this change of unknown can be interpreted as a complex change of basis ($S_1 A = MAN$), thus generalizing the change of variable in [8].

We shall adopt the definition below:

**Definition 0.1.** A layer model for a first order hyperbolic system is called perfectly matched (PML) if the following properties are satisfied

- Perfect transmission (without parasitic reflection) between the domain of interest and the layer regardless frequencies and angles of incidence.
- Exponential decay of the solution in the layer.

We summarize.

**Theorem 0.2.** *The model given by* (7) *is a PML model for the linear Elastodynamic system. Moreover, the Cauchy problem associated to this model is symmetric hyperbolic, and thus strongly well-posed.*

## 1. Le modèle de Bérenger

On considère le système de l'élastodynamique linéaire en dimension deux en milieu homogène :

$$\rho \partial_{tt} \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = 0, \tag{8}$$

où $\mathbf{u} = (u_i(x,t)), i = 1,2,$ désigne le champ de déplacement de la particule du solide située en $x = (x_1, x_2)$, $\rho$ la densité et $\sigma$ le tenseur des contraintes.

Dans le cas d'un matériau hyperélastique, contraintes et déformations sont liées par une relation de la forme

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl}), \quad \text{avec } \varepsilon_{kl} = 1/2(\partial_{x_l} u_k + \partial_{x_k} u_l).$$

On se placera plus particulièrement dans le cas de matériaux linéaires, matériaux pour lesquels l'état de contrainte est proportionnel à l'état de déformation (loi de Hooke) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

relation que l'on peut écrire sous la forme $\sigma = C\varepsilon(\mathbf{u})$. En formulation vitesses-contraintes, le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \rho \partial_t \mathbf{v} - \operatorname{div} \sigma = 0, \\ D \partial_t \sigma - \varepsilon(\mathbf{v}) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

où $D = C^{-1}$, $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$ désignent les vitesses et

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div}(\sigma) = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 \\ \partial_2 v_2 \\ 1/2(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) \end{pmatrix}.$$

C'est un système fortement hyperbolique du 1er ordre ; on le symétrise en posant $\boldsymbol{\Psi} = (v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, 2\sigma_{12})^t$, le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \partial_t \boldsymbol{\Psi} = \widetilde{D} \partial_t \boldsymbol{\Psi} = A \partial_1 \boldsymbol{\Psi} + B \partial_2 \boldsymbol{\Psi}, \tag{10}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système de Bérenger associé au système précédent se construit comme pour tout système hyperbolique du premier ordre. On commence par « couper » arbitrairement l'inconnue, $\boldsymbol{\Psi}$, en deux parties :

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_1 + \boldsymbol{\Psi}_2$$

puis, grâce à cette décomposition, on « découple » les équations pour qu'une seule dérivation spatiale intervienne dans chaque équation (ce qui permet d'obtenir à l'aide d'un coefficient d'amortissement une absorption dans une direction donnée sans affecter les autres) ; on obtient alors le modèle PML [3] :

$$\begin{cases} \widetilde{D}\partial_t \boldsymbol{\Psi}_1 - A\partial_1 \boldsymbol{\Psi} + \alpha_1 \boldsymbol{\Psi}_1 = 0, \\ \widetilde{D}\partial_t \boldsymbol{\Psi}_2 - B\partial_2 \boldsymbol{\Psi} + \alpha_2 \boldsymbol{\Psi}_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Le modèle PML dans le domaine fréquentiel et en inconnues primitives (physiques) s'écrit alors en sommant deux à deux les équations précédentes tout en introduisant un nouvel opérateur spatial [10]

$$\mathrm{i}\omega \widetilde{D}\hat{\boldsymbol{\Psi}} - S_1 A \partial_1 \hat{\boldsymbol{\Psi}} - S_2 B \partial_2 \hat{\boldsymbol{\Psi}} = 0 \tag{12}$$

avec

$$S_1 = \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega + \alpha_1} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega + \alpha_2}.$$

On peut remarquer qu'avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ on retrouve bien les équations classiques de l'élastodynamique.

Dans toute la suite on adoptera la définition suivante :

**Définition 1.1.** On appelle modèle PML pour un système hyperbolique du premier ordre, un modèle de couche pour lequel les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Transmission parfaite (sans réflexions parasites) entre le domaine d'intérêt et la couche et ce quelque soit la fréquence et l'angle d'incidence.
- Décroissance exponentielle de la solution dans la couche.

## 2. Le modèle instationnaire

On souhaite établir un modèle instationnaire bien posé conservant les principales propriétés du milieu de Bérenger. Pour cela on commence par chercher deux opérateurs inversibles $M$ et $N$ vérifiant :

**Lemme 2.1.** *Il existe deux opérateurs M et N inversibles, tels que* :

$$\begin{cases} S_1 A\partial_1 + S_2 B\partial_2 = M(AN\partial_1 + BN\partial_2), \\ \lim_{\alpha_1,\alpha_2 \to 0} N = I. \end{cases} \tag{13}$$

On peut choisir un opérateur $N$ diagonal, vérifiant (2.1), $N = \mathrm{diag}[S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_1^2, S_2^2, S_1 S_2]$, ce choix de $N$ donne $M = N$.

En introduisant la nouvelle inconnue $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = N\boldsymbol{\Psi}$, on peut écrire (12) sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\omega \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - A\partial_1 \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - B\partial_2 \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \\ \mathcal{P}_\omega = i\omega N^{-1}\widetilde{D}N^{-1} + A(\partial_1 N)N^{-1} + B(\partial_2 N)N^{-1}. \end{cases} \tag{14}$$

L'établissement du modèle instationnaire repose sur la réécriture de l'opérateur $\mathcal{P}_\omega$. sous forme différentielle.

On écrit

$$\mathcal{P}_\omega = \mathrm{i}\omega[\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}] + R_2U_\omega + R_3U_\omega^2 + R_4U_\omega^3 + R_5V_\omega + P \tag{15}$$

avec

$$R_1 = \mathrm{diag}[-\alpha_1, -\alpha_2, 0, 0, 0] \quad \text{et} \quad U_\omega = \mathrm{diag}\big[(\mathrm{i}\omega + \alpha_1)^{-1}, (\mathrm{i}\omega + \alpha_2)^{-1}, (\mathrm{i}\omega)^{-1}, (\mathrm{i}\omega)^{-1}, (\mathrm{i}\omega)^{-1}\big].$$

Quant à $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ et $P$, ils ne dépendent que de $\widetilde{D}$, $\alpha_1$ et $\alpha_2$.

Lorsque $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont nuls on a

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = P = 0 \quad \text{et} \quad N = I,$$

et donc le système coïncide avec le système de départ dans le domaine d'intérêt.

Le système stationnaire associé au modèle PML s'écrit finalement

$$\mathrm{i}\omega[\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}]\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_2U_\omega\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_3U_\omega^2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_4U_\omega^3\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_5V_\omega\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + P\widetilde{\Psi} - A\partial_1\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - B\partial_2\widetilde{\Psi} = 0. \tag{16}$$

On en déduit, grâce à une transformation de Fourier inverse (locale), le système instationnaire, où $\overset{t}{*}$ désigne la convolution en temps

$$[\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}]\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_2K_2 \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_3K_3 \overset{t}{*} \widetilde{\Psi} + R_4K_4 \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_5K_5 \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + P\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - A\partial_1\widetilde{\Psi} - B\partial_2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0.$$

Afin de localiser le système (16), on introduit les variables $\phi_i = K_i \overset{t}{*} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$ pour $i = 2, \ldots, 5$.

D'après le Lemme 2.1, le modèle s'écrit alors

$$\begin{cases} [\widetilde{D} + R_1\widetilde{D}]\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + R_2\phi_2 + R_3\phi_3 + R_4\phi_4 + R_5\phi_5 + P\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - A\partial_1\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} - B\partial_2\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \\ \partial_t\phi_2 + F_2\phi_2 - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \\ \partial_t\phi_3 + F_2\phi_3 + \phi_2 = 0, \\ \partial_t\phi_4 + F_4\phi_3 = 0, \\ \partial_t\phi_4 + F_5\phi_5 - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Grâce aux structures de $R_2$, $K_2$, $F_2$, $R_3$, $R_4$, $K_4$ et $F_4$, les inconnues $\phi_2$, $\phi_3$ et $\phi_4$ ne représentent en fait qu'une inconnue supplémentaire.

### *2.1. Propriétés*

Les propriétés de ce modèle se déduisent de celles du modèle stationnaire, en effet si l'on considère une onde plane solution du système précédent (avant l'introduction des variables supplémentaires), on voit facilement qu'elle est solution du système (2). En définitive on obtient

**Théorème 2.2.** *Le modèle PML décrit par le système* (17)*, est un modèle PML bien posé pour l'élastodynamique.*

En effet, les résultats précédents montrent que le système (17) est fortement hyperbolique ; de plus, la transmission d'une onde élastique s'effectue sans réflexions parasites (pourvu que les coefficients d'absorption soient choisis correctement).

**Remarque 1.** Dans [2], les auteurs montrent des simulations numériques dans le cas anisotrope avec le système original de Bérenger.

Ces simulations mettent en évidence des instabilités non totalement élucidées. Pour les expliquer les auteurs introduisent la notion de stabilité haute fréquence. Ce problème semble devoir etre éliminé pour notre modèle, ceci fera l'objet d'un prochain travail.

Notons enfin que le problème précédent étant fortement hyperbolique, le problème aux limites [5,4] associé en imposant une condition de Dirichlet homogène est bien posé.

## 3. Conclusion

On a établi un modèle PML bien posé pour l'élastodynamique. En effet, le système de départ est perturbé par des termes d'ordre inférieur qui n'influent donc pas sur le caractère bien posé du problème de départ. De plus, les variables supplémentaires vérifient des équations différentielles ordinaires par conséquent leur mise en œuvre informatique reste très simple.

Le modèle que l'on propose présente donc de nombreux avantages : c'est un modèle PML fortement bien posé, de plus il porte sur les inconnues primitives cela permet de l'intégrer facilement dans un code de calcul existant.

## Références

[1] Achenbach, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, 1973.
[2] E. Becache, S. Fauqueux, P. Joly, Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves, J. Comput. Phys. 188 (2003) 399–433.
[3] F. Collino, C. Tsogka, Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogenous media, Geophysics 66 (1) (2001) 294–307.
[4] R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 9, 1984.
[5] K.O. Friedrichs, Symmetric positive systems of differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954) 345–392.
[6] A. Rahmouni, Well posed PML models for various hyperbolic systems, Ph.D. Thesis, January 2000.
[7] A. Rahmouni, Un modèle PML bien posé pour les équations d'Euler linéarisées, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 159–164.
[8] C.M. Rappaport, Interpreting and improving the PML absorbing boundary condition using anisotropic lossy mapping of space, IEEE Microwave Guided Wave Lett. 5 (1995).
[9] A. Taflove, Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Artech House, Boston, MA, 1998.
[10] L. Zhao, A.C. Cangellaris, A general approach for development of unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for FDTD grid truncation, IEEE Microwave Guided Wave Lett. 6 (1996).