Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 935–940

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Topologie

Centralisateurs dans les groupes à dualité de Poincaré de dimension 3

Fabrice Castel

Laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

Reçu le 2 décembre 2003 ; accepté après révision le 3 mars 2004

Disponible sur Internet le 7 mai 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

On établit pour les centralisateurs dans une PD(3) paire des résultats analogues à ceux connus pour les centralisateurs dans un groupe fondamental de variété de dimension 3. Comme dans le cas des groupes fondamentaux de variétés de dimension 3, la preuve de ces résultats repose sur une décomposition JSJ pour les PD(3) paires obtenue à l'aide de la théorie des voisinages algébriques réguliers de Scott et Swarup. ***Pour citer cet article : F. Castel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Centralizers in PD(3) groups. We prove for centralizers in PD(3) pairs some results known for centralizers in 3-manifold fundamental groups. As in the 3-manifold case, the main ingredient of the proofs is a JSJ decomposition for PD(3) pairs obtained by mean of the Scott and Swarup regular neighborood theory. ***To cite this article: F. Castel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

A duality group of dimension n (PD(n) group) is a group with the same homological duality properties as the fundamental group of an aspherical closed n-manifold. A long standing question was to determine if a PD(n) group is always the fundamental group of such a manifold. For $n = 2$ it was shown that a PD(2) group is always the fundamental group of a closed surface (see [7]). For $n \geqslant 4$, Davis has constructed in [5] a PD(n) group which is not finitely presented and so which is not the fundamental group of a closed n-manifold. The question is still open for $n = 3$. Bowditch has shown in [3] that a PD(3) group with a normal infinite cyclic subgroup is isomorphic to the fundamental group of a Seifert fibered 3-manifold. A group pair (G, Ω) is the data of a group G together with a set Ω of subgroups of G. A PD(n) pair is an algebraic analogue of the fundamental group of an aspherical n-manifold with boundary, where Ω corresponds to the set of fundamental groups of boundary components. PD(n) Pairs are defined and studied in [2]. The purpose of this Note is to prove for PD(3) pairs the following results known

Adresse e-mail : castel@picard.ups-tlse.fr (F. Castel).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.03.037

for 3-manifolds groups. As in the 3-manifold case, the main ingredient in the proof of Theorems 0.1 and 0.2 is a theorem of JSJ decomposition for PD(3) pairs along free abelian groups of rank 2. This theorem is obtained by means of the Scott and Swarup regular neighborood theory.

Theorem 0.1. *Let (G,Ω) be a* PD(3) *pair. Let h be a nontrivial element of G and $C_G(h)$ its centralizer in G. If h is not infinitely divisible then $C_G(h)$ has one of the following three properties*:

(i) *$C_G(h)$ is infinite cyclic.*
(ii) *$C_G(h)$ is free abelian of rank* 2 *or isomorphic to the fundamental group of a klein bottle.*
(iii) *$C_G(h)$ is conjugate to a subgroup of index at most* 2 *in one of the Seifert pieces of the JSJ decomposition of G.*

If h is infinitely divisible then $C_G(h)$ admits a subgroup of index at most 2 *which is isomorphic to a noncyclic subgroup of additive rationals.*

Theorem 0.2. *Let (G,Ω) be a* PD(3) *pair. Let a and h be nontrivial elements of G. If there exists integers $|p|$ and $|q|$ such that $ah^pa^{-1}=h^q$, then $|p|=|q|$.*

Jaco and Shalen [11] have proved Theorems 0.1 and 0.2 in an Haken 3-manifold group. Kropholler [15] has generalised Theorem 0.2 to all 3-manifold groups.

1. Introduction

Un groupe G de type FP est dit à dualité de Poincaré de dimension n (dit groupe PD(n)) si pout tout entier $i \neq n$ $H^i(G,\mathbb{Z}G)=0$ et si $H^n(G,\mathbb{Z}G)$ est infini cyclique en tant que groupe abélien. Un groupe à dualité de Poincaré de dimension n est donc un groupe ayant des propriétés homologiques analogues à celles du groupe fondamental d'une variété de dimension n fermée et asphérique. Un groupe PD(2) est toujours isomorphe au groupe fondamental d'une surface fermée (voir [7]). Pour $n \geqslant 4$, Davis [5] a construit des groupes PD(n) qui ne sont pas de présentation finie et ne peuvent donc pas être des groupes fondamentaux de variétés fermées de dimension n. La question de savoir si un groupe PD(3) est toujours le groupe fondamental d'une variété fermée de dimension 3 reste ouverte. On sait toutefois qu'un groupe PD(3) possédant un sous-groupe normal infini cyclique est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3 (voir [3]). Une *paire de groupes* (G,Ω), est la donnée d'un groupe G et d'un ensemble Ω de sous-groupes de G. Une PD(n) paire (G,Ω) est une paire de groupes telle que le double de G le long de Ω est un groupe PD(n). Une PD(n) paire (G,Ω) est donc l'analogue algébrique du groupe fondamental d'une variété compacte, à bord et asphérique où Ω correspond aux groupes fondamentaux des composantes connexes du bord. Cette définition implique ([2] et [1]) que les éléments de Ω sont des groupes PD($n-1$), que G est sans torsion et ne se scinde pas en produit libre.

Les résultats principaux de cette Note concernent le centralisateur et le commensurateur d'un élément dans une PD(3) paire. Tout comme dans le cas des variétés de dimension 3, la preuve de ces résultats s'appuie sur un théorème de décomposition JSJ pour les PD(3) paires (voir Chapitre 2).

Théorème 1.1. *Soit (G,Ω) une* PD(3) *paire. Soient h un élément non trivial de G et $C_G(h)$ son centralisateur dans G. Si h n'est pas infiniment divisible, alors $C_G(h)$ est nécessairement d'un des trois types suivants* :

(i) *$C_G(h)$ est infini cyclique.*
(ii) *$C_G(h)$ est abélien libre de rang* 2 *ou isomorphe à un groupe fondamental de bouteille de klein.*
(iii) *$C_G(h)$ est conjugué à un sous-groupe d'indice au plus* 2 *d'un des morceaux de Seifert de la décomposition JSJ de G.*

Si h est infiniment divisible alors $C_G(h)$ contient un sous-groupe d'indice 2 *isomorphe à un sous-groupe non cyclique des rationnels additifs.*

Théorème 1.2. *Soit (G, Ω) une* PD(3) *paire. Soient a et h deux éléments non triviaux de G, p et q des entiers. Si a et h sont liés par une relation du type $ah^pa^{-1} = h^q$ alors $|p| = |q|$.*

Remarque 1. Jaco et Shalen [11] ont montré les Théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cas du groupe fondamental d'une variété Haken. Dans [15] Kroppholler a étendu le Théorème 1.2 à tous les groupes fondamentaux de variété de dimension 3.

2. Une décomposition JSJ pour les PD(3) paires

Soit (G, Ω) une PD(3) paire. On suppose que G admet une décomposition en un graphe fini de groupes Γ et que les groupes associés aux arêtes de Γ sont virtuellement abéliens libres de rang 2. Soit v un sommet de Γ. Soit G_v le groupe associé à v. Alors G_v est le groupe de base d'une PD(3) paire (G_v, Ω_v). Introduisons pour (G_v, Ω_v) la terminologie suivante :

(i) Si G_v est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3, G_v est dit de type Seifert. Dans ce cas v est dit Seifert.
(ii) Si G_v n'est pas virtuellement abélien et si chaque groupe abélien libre de rang 2 de G_v est conjugué dans G à un sous-groupe de Ω_v, G_v est dit atoroïdal. Dans ce cas, v est dit atoroïdal.

La théorie des voisinages algébriques réguliers développée par Scott et Swarup [17] permet de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.1 (décomposition JSJ). *Soit (G, Ω) une* PD(3) *paire. Alors il existe une décomposition de G en un graphe fini de groupes, Γ, telle que* :

(i) *Chaque sommet de Γ est soit Seifert, soit atoroïdal.*
(ii) *Les groupes associés aux arêtes de Γ sont virtuellement abéliens libres de rang* 2.
(iii) *Chaque sous-groupe abélien libre de rang* 2 *de G est conjugué à un sous-groupe d'un des groupes de sommet de Γ.*

De plus si Γ a un nombre minimal de sommets Seifert parmi l'ensemble des graphes de décompositions de G vérifiant les propriétés 1 *à* 3 *ci-dessus, alors Γ est unique à G-isomorphisme de graphe de groupes prés.*

Démonstration. On prouve d'abord ce théorème dans le cas ou G est un groupe PD(3). Le cas des PD(3) paires (G, Ω) dont le bord Ω est non vide s'en déduit en amalgamant à G, le long de chaque élément de Ω, le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini et à bord connexe. Le produit amalgamé ainsi obtenu est un groupe PD(3) dont la décomposition JSJ induit une décomposition JSJ de G. On suppose donc que G est un groupe PD(3). Modulo quelques adaptations, signalées par Scott et Swarup, le Théorème 12.5 de [17] montre l'existence d'une décomposition de G en un graphe fini de groupes Γ' vérifiant, entre autres, les propriétés suivantes :

(i) Les sommets de Γ' sont de deux types ; les sommet de type V_0 et les sommets de type V_1. De plus deux sommets de même type ne peuvent être adjacents.
(ii) Les groupes d'arêtes de Γ' sont virtuellement abéliens libres de rang 2.

(iii) Tout sous-groupe abélien libre de rang 2 de G admet un sous-groupe d'indice fini conjugué dans G à un sous-groupe du groupe d'un sommet de type V_0 de Γ'.
(iv) Les sommets de type V_1 de Γ' sont simples dans le sens où la décomposition Γ' ne peut être raffiné en scindant un sommet de ce type le long d'un sous-groupe virtuellement abélien libre de rang 2.

Cette décomposition de G sera appelée décomposition de Scott et Swarup de G. Le théorème de Bowditch [3] et les méthodes de Dunwoody et Swenson [6] permettent de montrer que les sommets de type V_0 de Γ' sont Seifert. Soit Γ le graphe de décomposition de G obtenu à partir de Γ' en supprimant les sommets de type V_0 pour lesquels l'inclusion des groupes d'arêtes dans le groupe de sommet est un isomorphisme. Le reste de la preuve du théorème de décomposition JSJ d'un groupe PD(3) consiste à établir les points suivants :

– Les sommets simples de Γ sont atoroïdaux.
– Les sous-groupes abéliens libres de rang 2 de G sont conjugués dans des groupes de sommets de Γ.
– Le graphe Γ a un nombre minimal de sommet Seiferts.
– Toute décomposition de G vérifiant les propriétés (i) à (iii) de l'énoncé et possédant un nombre minimal de sommets Seifert est G-isomorphe à Γ.

Pour les détails complets de cette preuve, nous renvoyons à [4] (voir aussi la Section 12 de [17]).

Ce théorème est l'analogue algébrique de la décomposition JSJ des variétés de dimension 3 compactes et irréductibles le long de tores incompressibles établie par Jaco et al. ([11], [12], voir aussi [18]). Le Théorème 2.1 a été établi par Kropholler [14] dans le cadre de PD(n) paires, $n \geqslant 2$ vérifiant l'hypothèse supplémentaire (max-c) que toute suite croissante de centralisateurs est stationnaire. Cependant certains groupes PD(4) ne vérifient pas cette hypothése [10]. Il découle de nos résultats que toutes les PD(3) paires possèdent la propriété max-c.

3. Centralisateurs dans une PD(3) paire

Définition 3.1. Soient G un groupe et H et K des sous-goupes de G.

(i) On dit que H et K sont commensurables lorsque $H \cap K$ est d'indice fini dans H et K.
(ii) Le commensurateur de H dans G, noté $\mathrm{Comm}_G(H)$, est le sous-groupe de G défini de la manière suivante : $\mathrm{Comm}_G(H) = \{g \in G$ tels que gHg^{-1} et H soient commensurables$\}$.

Le résultat suivant se déduit de la preuve du Lemme 2.12 de [19].

Lemme 3.2. *Soit H un sous-groupe abélien libre de rang* 2 *du groupe de base G d'une* PD(3) *paire* (G, Ω). *Si G n'est pas virtuellement abélien libre de rang* 3, *alors* $[\mathrm{Comm}_G(H) : H] < \infty$.

Une PD(n) paire (G, Ω) est orientable lorsque l'action de G sur le groupe infini cyclique sous-jacent à $H^n(G, \Omega; \mathbb{Z}G)$ est triviale. On commence par étudier le centralisateur d'un élément dans une PD(3) paire atoroïdale et orientable.

Lemme 3.3. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3) *paire atoroïdale et orientable. Soit $h \in G$ un élément non trivial. Alors le centralisateur $C_G(h)$ de h dans G est un sous-groupe abélien de G maximal pour la propriété d'être abélien.*

Démonstration. Remarquons dans un premier temps que comme (G, Ω) est orientable, les éléments virtuellement abéliens de Ω sont abéliens car orientables ([2]). Soient a_1 et a_2 des éléments de $C_G(h)$. Posons $A_1 = \langle a_1, h\rangle$ et $A_2 = \langle a_2, h\rangle$. On considére les cas suivants.

CAS 1 : Les sous-groupes A_1 et A_2 sont abéliens libres de rang 2. Soit K le groupe engendré par A_1 et A_2. Si K n'est pas abélien, le Théorème 8.8 de [1] implique que K a un centre infini cyclique $Z(K)$ et que $K/Z(K)$ est l'extension d'un groupe libre L par un groupe fini. En utilisant le fait que (G, Ω) est atoroïdale on peut montrer que comme A_1 et A_2 ont une intersection non triviale L contient un groupe non libre (voir [4]). Ce n'est pas possible donc K est abélien.

CAS 2 : Le groupe A_1 est abélien libre de rang 2 et A_2 est infini cyclique. Comme $h \in a_2A_1a_2^{-1} \cap A_1$, le cas 1 implique que $a_2A_1a_2^{-1}$ et A_1 sont commensurables et donc que $a_2 \in \mathrm{Comm}_G(A_1)$. D'aprés le Lemme 3.2, $\mathrm{Comm}_G(A_1)$ est abélien libre de rang 2, d'où a_1 commute avec a_2.

CAS 3 : Les groupes A_1 et A_2 sont tous deux infinis cycliques. Considérons le groupe $K = \langle a_1, a_2, h\rangle$. Si K n'est pas abélien, le Théorème 8.8 de [1] implique que K a un centre infini cyclique engendré par un élément t et que $K/\langle t\rangle$ est l'extension d'un groupe libre L par un groupe fini. Le groupe L n'est pas trivial, sinon K serait virtuellement infini cyclique et sans torsion et donc infini cyclique. Le groupe $K/\langle t\rangle$ a donc un élément d'ordre infini y. Si x est un antécédent de y dans K, alors $\langle x, t\rangle$ est abélien libre de rang 2. Comme a_1, a_2 et x commutent avec t, le cas 2 montre que x commute avec a_1 et a_2, et donc que x appartient au centre $\langle t\rangle$ de K. Ceci contredit le choix de x qui se projette sur un élément d'ordre infini de $K/\langle t\rangle$. Donc K est abélien.

Lemme 3.4. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3) *paire dans laquelle G n'est pas virtuellement abélien libre de rang* 3. *Soit Γ la décomposition JSJ de G et T l'arbre de Bass–Serre associé. On suppose Γ non réduit à un sommet. Soit c un chemin dans T tel que les stabilisateurs de chacune des arêtes de c aient un élément non trivial h de G en commun. Alors la longueur de c est inférieure à* 2.

Démonstration. On raisonne sur la configuration de 3 sommets successifs fixés par h. Si le sommet v du centre est atoroïdal, h est commun à deux groupes du bord de la PD(3) paire (G_v, Ω_v). D'aprés le cas 1 de la preuve du Lemme 3.3 ces groupes sont commensurables. Cela contredit le fait que dans un groupe PD(3), chaque sous-groupe PD(2) a au plus un représentant de sa classe de commensurabilité sur lequel ce groupe se scinde (Corollaire A1 de [16]). Si deux sommets successifs v et v' sont Seifert, on montre que le groupe $H = \langle G_v, G_{v'}\rangle$ est de type Seifert en prouvant que h est normal dans H. Cela contredit le fait que Γ a un nombre minimal de sommets Seifert.

Preuve du Théorème 1.1. On suppose que G n'est pas virtuellement abélien libre de rang 3 car le résultat est clair dans ce cas. Par passage à un sous-groupe d'indice au plus 2, on se raméne au cas où (G, Ω) est une paire orientable. Soit h un élément non trivial et non infiniment divisible de G. Si $C_G(h)$ n'est pas infini cyclique on montre que $C_G(h)$ fixe un sommet de l'arbre de Bass–Serre T associé à la décomposition JSJ de G. Considérons une suite de générateurs $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de $C_G(h)$. L'hypothèse de divisibilité faite sur h permet de montrer qu'au moins un des sous-groupes $A_i = \langle a_i, h\rangle$, $i \in N$, mettons A_1, est abélien libre de rang 2. La propriété 3 du Théorème 3 implique que A_1 fixe un sommet v de T. Le Lemme 3.4 permet de montrer que $C_G(h)$ déplace v à une distance inférieure à 2 de lui même, et fixe donc un sommet de T. Si ce sommet est Seifert, les Propositions II.4.5 et II.4.7 de [11] permettent de conclure. Si ce sommet est atoroïdal, le Lemme 3.3 implique que $C_G(h)$ est abélien. En particulier $C_G(h) \subseteq \mathrm{Comm}_G(A_1)$, et le Lemme 3.2 montre que $C_G(h)$ est abélien libre de rang 2.

Soit h un élément infiniment divisible de G. Alors h fixe un sommet de T sinon h aurait un axe invariant sur lequel il agirait par translation de longueur finie, contredisant ainsi l'hypothèse de divisibilité. Le Lemme 3.4 permet alors de montrer que $C_G(h)$ fixe un sommet de T. Ce sommet n'est pas Seifert car cela contredirait les Propositions II.4.5 et II.4.7 de [11]. Ce sommet est donc atoroïdal et le résultat suit du Lemme 3.3 et de la classification des groupes résolubles de dimension cohomologique 2 donnée dans [8].

Une utilisation similaire des Lemmes 3.3 et 3.4 permet de montrer :

Proposition 3.5. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3) *paire. Alors G possède la propriété* (*max-c*) *que toute suite croissante de centralisateurs devient stationnaire.*

Preuve du Théorème 1.2. On se raméne au cas ou la paire (G, Ω) est orientable. Notons $H = \langle a, h\rangle$ le sous-groupe de G engendré par a et h. Alors H vérifie l'égalité $\mathrm{Comm}_H(h) = H$. Il existe donc pour chaque élément g de H des entiers $p(g)$ et $q(g)$ tels que $gh^{p(g)}g^{-1} = h^{q(g)}$. On en déduit en utilisant le Lemme 3.4 que soit $|p| = |q|$, soit H fixe un sommet v de l'arbre de Bass–Serre T associé à la décomposition JSJ de G. Si v est Seifert le Théorème VI.2.1 de [11] implique $|p| = |q|$. Si v est atoroïdal, on considére l'application Ψ de H dans $(Q^+, \times)$ définie par $\Psi(g) = |\frac{p(g)}{q(g)}|$. Cette application est un homomorphisme [15]. On montre en employant le Lemme 3.3 que $\ker(\Psi)$ est abélien, d'où H est résoluble. En utilisant [3] et [9] on montre que H est de dimension cohomologique 2. D'aprés [8], H est un groupe de Baumslag–Solitar de présentation $\langle x, y\colon\ yxy^{-1} = x^m\rangle$. Or Kapovich et Kleiner ont montré [13] que si $|p| \neq |q|$, le groupe de Baumslag–Solitar $B(p, q)$ ne peut se réaliser comme sous-groupe d'un groupe PD(3).

Références

[1] R. Bieri, Homological dimensions of discrete groups, Queen Mary College Math. Notes (1976).
[2] R. Bieri, B. Eckman, Relative homology and poincaré duality for groups pairs, J. Pure Appl. Algebra 13 (1978) 277–319.
[3] B.H. Bowditch, Planar groups and the seifert conjecture, Preprint, 1999.
[4] F. Castel, Centralisateurs et commensurateurs dans une pd(3) paire, 2003, en préparation.
[5] M.W. Davis, The cohomology of a coxeter group with group rings coefficients, Duke Math. J. 91 (1998) 297–314.
[6] M.J. Dunwoody, E.L. Swenson, The algebraic torus theorem, Invent. Math. 140 (2000) 605–637.
[7] B. Eckmann, Poincaré duality groups of dimension 2 are surface groups, in: S.M. Gersten, J.R. Stallings (Eds.), Combinatorial Group Theory and Topology, in: Ann. Math. Stud., vol. 111, Princeton University Press, Princeton, 1987.
[8] D. Gildenhuys, Classification of solubles groups of cohmological dimension two, Math. Z. 166 (1979) 21–25.
[9] J.A. Hillman, Three dimensional Poincaré duality groups wich are extension, Math. Z. 195 (1987) 89–92.
[10] J.A. Hillman, Four Manifolds, Geometry and Knots, in: Geometry and Topology Monographs, 2002.
[11] W.H. Jaco, P.B. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. 220 (1979).
[12] K. Johannson, Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundary, in: Lecture Notes in Math., vol. 761, Springer-Verlag, 1979.
[13] M. Kapovich, B. Kleiner, Coarse alexander duality and duality groups, Preprint, 2001.
[14] P.H. Kropholler, An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups, Proc. London Math. Soc. 60 (1990) 503–529.
[15] P.H. Kropholler, A note on centrality in 3-manifolds groups, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107 (1990) 261–266.
[16] P.H. Kropholler, M.A. Roller, Splittings of Poincaré duality groups, Math. Z. 197 (1988) 421–438.
[17] P. Scot, G.A. Swarup, Regular neighboroods and canonical decompositions for groups, Preprint, 2002.
[18] P. Scott, A new proof of the annulus and torus theorems, Amer. J. Math. 102 (1980) 241–277.
[19] P. Scott, G.A. Swarup, Splittings of groups and intersection numbers, Geometry Topology 4 (2000) 179–218.