Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 747–750
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des nombres

Mesure de Mahler et polylogarithmes

Sana Boughzala

Université du Centre, IPEIM, rue Ibn Eljazzar, 5019 Monastir, Tunisie

Reçu le 10 avril 2003 ; accepté après révision le 2 mars 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

L'évaluation de deux façons différentes de la mesure de Mahler du polynôme $1+z_1+z_2+z_3$ permet de donner deux nouvelles formules reliant $\mathbb{Q}$-linéairement $\zeta(3)$, $\pi^2\ln 2$, $\pi\sqrt{3}L(\chi_{-3},2)$ et certaines valeurs de polylogarithmes multiples. ***Pour citer cet article : S. Boughzala, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Mahler measure and polylogarithms. We prove two new relations between $\zeta(3)$, $\pi^2\ln 2$, $\pi\sqrt{3}L(\chi_{-3},2)$ and some multiple polylogarithms by evaluating twice the logarithmic Mahler measure of the polynomial $1+z_1+z_2+z_3$. ***To cite this article: S. Boughzala, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction et rappels

Peu de formules donnent des valeurs spéciales ou des combinaisons linéaires de valeurs spéciales de polylogarithmes. Citons toutefois deux formules dues à Landen [4]

$$Li_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{\pi^2}{12}\ln 2+\frac{1}{6}(\ln 2)^2, \qquad Li_3\left(\rho^2\right)=\frac{4}{5}\zeta(3)+\frac{4}{5}\zeta(2)\ln\rho-\frac{2}{3}(\ln\rho)^3,$$

où ρ désigne le nombre d'or et $Li_3(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$.

Citons également la formule connue de Ramanujan [1] ou [2] $\zeta(3)-\frac{\pi^2}{12}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, où le membre de droite est une somme de polylogarithmes.

En général, les relations entre valeurs spéciales de polylogarithmes multiples proviennent trivialement des relations génériques de mélange et de distribution.

Nous démontrons ici deux nouvelles formules qui sont des combinaisons $\mathbb{Q}$-linéaires entre $\zeta(3)$, $\pi^2\ln 2$, $\pi\sqrt{3}L(\chi_{-3},2)$ et des valeurs spéciales de polylogarithmes.

$$\frac{21}{4}\zeta(3)-\frac{\pi^2}{3}\ln 2=\pi\sqrt{3}L(\chi_{-3},2)-2Li_{(2,1)}\left(1,\frac{1}{2}\right)+2Li_{(2,1)}(1,-j)+2Li_{(2,1)}\left(1,-j^2\right).$$

Adresse e-mail : Sana.Hafsa@ipeim.rnu.tn (S. Boughzala).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.03.021

et

$$\frac{79}{12}\zeta(3)=\sqrt{3}\pi L(\chi_{-3},2)+2Li_3\left(\frac{1}{2}\right)+2Li_{(1,2)}\left(\frac{1}{2},1\right)-2Li_{(1,2)}(-j,1)-2Li_{(1,2)}\left(-j^2,1\right).$$

Leurs démonstrations s'appuient sur l'évaluation de deux façons différentes de la mesure de Mahler du polynôme $1+z_1+z_2+z_3$.

La mesure logarithmique de Mahler d'un polynôme de n variables P est définie par

$$m(P)=\int_0^1\cdots\int_0^1\log\left|P\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t_1},\ldots,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t_n}\right)\right|\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n.$$

En particulier, si P est un polynôme d'une seule variable donné par $P(X)=a_d\prod_{j=1}^d(X-\alpha_j)$, on trouve

$$m(P)=\log\left(|a_d|\prod_{j=1}^{d}\max\left(|\alpha_j|,1\right)\right)$$

grâce à la formule de Jensen.

D'autre part, les fonctions polylogarithmes multiples en plusieurs variables sont définies pour $\underline{s}=(s_1,\ldots,s_k)$ avec $s_i\in\mathbb{N}^*$ et $|z_i|<1$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, par

$$Li_{\underline{s}}(z_1,\ldots,z_k)=\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k\geqslant 1}\frac{z_1^{n_1}\cdots z_k^{n_k}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}.$$

Dans le cas $k=1$, on retrouve le polylogarithme classique $Li_s(z)=\sum_{n\geqslant 1}z^n/n^s$, relié à la fonction zêta de Riemann par l'identité suivante $\zeta(s)=Li_s(1)$.

2. Calcul de $m(1+z_1+z_2+z_3)$

Notre méthode consiste à utiliser la formule de Jensen pour écrire

$$m(1+z_1+z_2+z_3)=m\left(\max\left(|1+z_1+z_2|,1\right)\right)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2}\right|\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1$$

avec $\log^+ f=\max(\log f,0)$.

Or pour $(t_1,t_2)\in[0,\pi]^2$, on a $\log|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2}|\geqslant 0$ si et seulement si $t_2\in[t_1-\pi,\pi]$. Donc si l'on note $I=2\pi^2m(1+z_1+z_2+z_3)$, on obtient $I=\int_0^{\pi}\int_{t_1-\pi}^{\pi}\log|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2}|\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1$. Pour calculer cette intégrale nous commençons par prouver le résultat suivant

Lemme 2.1. *On a*

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}I_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}J_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}R_n$$

avec $I_n=\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{2\pi/3}\sin\frac{nt}{2}(\cos\frac{t}{2})^{-n}\,\mathrm{d}t$, $J_n=2^n\int_{2\pi/3}^{\pi}\sin\frac{nt}{2}(\cos\frac{t}{2})^{n}\,\mathrm{d}t$ *et* $R_n=\int_0^{2\pi/3}(2\pi-t)\cos nt\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Pour $t_1\in[0,\pi]$, on a $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}|<1$ si et seulement si $t_1\in]\frac{2\pi}{3},\pi]$. On décompose l'intégrale en deux parties

$$I=\int_0^{2\pi/3}\int_{t_1-\pi}^{\pi}\log\left(\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}\right|\left|1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}}\right|\right)\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1+\int_{2\pi/3}^{\pi}\int_{t_1-\pi}^{\pi}\log\left|1+\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2}}\right|\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1,$$

puis on applique la relation $\log|1+z| = \Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$, pour $|z|<1$.

En remarquant que $I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} + A_n$, avec

$$A_n = \frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{2\pi/3}\frac{\sin t/2}{(\cos t/2)^n}\cos\frac{(n-1)t}{2}\,\mathrm{d}t$$

et en intégrant par parties A_n, on obtient une relation de récurence entre I_n et I_{n-1} ce qui nous permet de calculer I_n.

On utilise la même méthode pour le calcul de J_n en écrivant $J_n = \frac{1}{2}J_{n+1} - B_n$ et en intégrant par parties B_n.

Le calcul de l'intégrale R_n est immédiat. On obtient ainsi le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Avec les notations du Lemme* 2.1*, on a*

$$I_1 = 2\log 2, \quad I_n = I_1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{3} - \frac{1}{2^k}\frac{1}{k}\right), \quad \text{si } n>1,$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{3} \quad \text{et} \quad R_n = \frac{4\pi}{3n}\sin\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{n^2}.$$

Finalement, on trouve

Proposition 2.3.

$$I = \frac{7}{4}\zeta(3) + \sqrt{3}\pi L(\chi_{-3},2) + \frac{\pi^2}{3}\ln 2 + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{3} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k2^k}.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer les intégrales I_n, J_n et R_n dans I et de les simplifier en remarquant que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3} = \frac{3}{4}\zeta(3), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cos\frac{2\pi n}{3} = \frac{1}{3}\zeta(3),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{2}{3}\zeta(3) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\chi_{-3}(n)}{n^2} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{-3}(n)}{n^2}.$$

3. Identités obtenues

La deuxième méthode est essentiellement due à Smyth [3] qui a calculé plus rapidement la même mesure en posant $z_2 = zz_3$ et en utilisant la formule de Jensen qui donne $m(az_3+b) = \log\max(|a|,|b|)$. D'où $m(1+z_1+z_2+z_3) = m((1+z)z_3+1+z_1) = m(\max(|1+z|,|1+z_1|))$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.1 (Smyth [3]). $I = 7\zeta(3)$.

En identifiant les deux expressions obtenues, on trouve

Proposition 3.2. $\frac{21}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{3}\ln 2 = \pi\sqrt{3}L(\chi_{-3},2) - 2Li_{(2,1)}(1,1/2) + 2Li_{(2,1)}(1,-j) + 2Li_{(2,1)}(1,-j^2)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{3} = Li_{(2,1)}(1,-j) + Li_{(2,1)}(1,-j^2)$ et $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k2^k} = 2Li_{(2,1)}(1,1/2)$.

La preuve de la deuxième formule nécessite deux lemmes supplémentaires

Lemme 3.3.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{3} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\quad et\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k2^k} = \frac{\pi^2}{6}\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Démonstration. Par interversion de l'ordre de sommation, il vient

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

or $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\log(2\sin\frac{x}{2})$ pour $0 < x < \pi$, d'où $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{3} = 0$.

De même

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k2^k} = \frac{\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^k} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^k}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

On déduit alors le résultat suivant :

Lemme 3.4. $Li_{(2,1)}(1,-j) + Li_{(2,1)}(1,-j^2) + Li_{(1,2)}(-j,1) + Li_{(1,2)}(-j^2,1) = -\frac{2}{3}\zeta(3)$ *et* $Li_{(1,2)}(1/2,1) + Li_{(2,1)}(1,1/2) + Li_3(1/2) = \frac{\pi^2}{6}\log 2$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $Li_{(1,2)}(-j,1) + Li_{(1,2)}(-j^2,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = Li_{(1,2)}(1/2,1) + Li_3(1/2)$.

De la Proposition 3.2 et du lemme précédent, découle la deuxième formule :

Proposition 3.5. $\frac{79}{12}\zeta(3) = \sqrt{3}\pi L(\chi_{-3},2) + 2Li_3(1/2) + 2Li_{(1,2)}(1/2,1) - 2Li_{(1,2)}(-j,1) - 2Li_{(1,2)}(-j^2,1)$.

Références

[1] B. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Springer, 1989.

[2] J.M. Borwein, D.M. Bradley, D.J. Broadhurst, P. Lisoněk, Special values of polylogarithms, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (3) (2001) 907–941.

[3] D.W. Boyd, Speculations concerning the range of Mahler's measure, Canad. Math. Bull. 24 (1981) 453–469.

[4] L. Lewin, Polylogarithms and Associated Functions, North-Holland, New York, 1981.