Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 719–722
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Équations différentielles stochastiques conduites par des lacets dans les groupes de Carnot

Fabrice Baudoin

Laboratoire de probabilités et statistiques, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

Reçu le 24 septembre 2003 ; accepté après révision le 19 février 2004

Présenté par Paul Maliavin

Résumé

Nous étudions la géomètrie sous-riemannienne des équations différentielles stochastiques conduites par des processus générant des lacets dans les groupes de Carnot libres. ***Pour citer cet article : F. Baudoin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Stochastic differential equations driven by loops in Carnot groups. The subriemannian geometry of stochastic differential equations driven by processes generating loops in free Carnot groups are studied. ***To cite this article: F. Baudoin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Dans cette Note, nous considérons dans $\mathbb{R}^n$ une équation différentielle stochastique qui s'écrit sous la forme :

$$X_t^{x_0} = x_0 + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t V_i(X_s) \circ \mathrm{d}M_s^i, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

où :

(1) $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
(2) $V_1, \ldots, V_d$ sont des champs de vecteurs C^∞ bornés sur $\mathbb{R}^n$;
(3) $\circ$ désigne l'intégration au sens de Stratonovitch ;
(4) $(M_t^1, \ldots, M_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ générant un lacet de longueur T dans le groupe libre de Carnot de profondeur N au dessus de $\mathbb{R}^d$.

Adresses e-mail : symplectik@aol.com, fbaudoin@cict.fr (F. Baudoin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.02.016

Nous étudions la géomètrie sous-riemannienne canonique associée à ce type d'équations, et tirons de cette étude certaines propriétés de la variable aléatoire $X_T^{x_0}$.

2. Espace des lacets sur un groupe de Carnot libre

Considérons une algèbre de Lie libre $\mathfrak{g}$ qui peut être graduée de la façon suivante

$$\mathfrak{g} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_N,$$

avec $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] \subset \mathcal{V}_{i+j}$ et $\mathcal{V}_s = 0$, pour $s > N$. On suppose de plus que $\dim \mathcal{V}_1 = d$ et que $\mathcal{V}_1$ engendre $\mathfrak{g}$. Il est facile de voir que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un unique groupe de Lie simplement connexe qui sera noté dans la suite $\mathbb{G}_{d,N}$. Ce groupe s'appelle le groupe libre de Carnot de profondeur N sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}_1$. Une courbe $c : [0,1] \to \mathbb{G}_{d,N}$ qui est absolument continue est dite horizontale si c' est presque sûrement dans la distribution invariante à gauche de $\mathbb{G}_{d,N}$ qui est engendrée par $\mathcal{V}_1$. Fixons maintenant une fois pour toutes une base $(D_1, \ldots, D_d)$ de $\mathcal{V}_1$. On dira qu'un chemin $x \to \mathbb{R}^d$ absolument continu est un lacet de profondeur N et de longueur 1 s'il existe une courbe horizontale $c : [0,1] \to \mathbb{G}_{d,N}$ absolument continue telle que $c(0) = c(1) = 0$ et $\pi c = x$ où π est la projection canonique sur la base $(D_1, \ldots, D_d)$. L'ensemble des lacets de profondeur N sera noté $\mathbf{L}_N(\mathbb{R}^d)$. Considérons maintenant dans $\mathbb{R}^n$ l'équation différentielle ordinaire :

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t V_i(y_s)\, \mathrm{d}x_s^i, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

où :

(1) $y_0 \in \mathbb{R}^n$;
(2) $V_1, \ldots, V_d$ sont des champs de vecteurs C^∞ bornés sur $\mathbb{R}^n$;
(3) $(x_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \in \mathbf{L}_N(\mathbb{R}^d)$.

Notons $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs V_i et pour $p \geqslant 2$ par $\mathfrak{L}^p$ la sous-algèbre $\{[X,Y],\ X \in \mathfrak{L}^{p-1},\ Y \in \mathfrak{L}\}$ (Remarquons que $\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}$). De plus, si $\mathfrak{a}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{L}$, on note pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{a}(x) = \{V(x),\ V \in \mathfrak{a}\}$. Dans ce paragraphe, nous ferons désormais l'hypothèse que pour tous les y_0 de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathfrak{L}^{N+1}(y_0) = \mathbb{R}^n$. On a alors le théorème de connectivité suivant.

Théorème 2.1. *Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, il existe au moins une courbe y absolument continue et de la forme* (2) *telle que $y_0 = a$ et $y_1 = b$.*

Ce théorème permet d'associer une distance naturelle au système de contrôle (2) : Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$d^N(a,b) = \inf \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{d} \left(x_s^i\right)^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}s,$$

où l'infimum est pris sur les lacets x de profondeur N tels que le processus y résolvant (2) vérifie $y_0 = a$ et $y_1 = b$. Il est facile de vérifier que cela définit bien une distance sur $\mathbb{R}^n$. Nous nous intéressons maintenant à quelques propriétés importantes de l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d^N)$. Précisons pour cela quelques notations. Si $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, d\}^k$ est un mot, on note $|I|$ sa longueur et V_I le commutateur $[V_{i_1}, [V_{i_2}, \ldots, [V_{i_{k-1}}, V_{i_k}] \ldots]$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $k \geqslant N$, on note $\mathcal{U}_k(x)$ l'espace vectoriel engendré par les V_I où I décrit l'ensemble des mots dont la longueur est comprise entre N et k. É tant donné que l'on suppose qu'on a toujours $\mathfrak{L}^{N+1}(x) = \mathbb{R}^n$, il est possible de trouver le plus petit des entiers $k \geqslant N+1$ tels que $\mathcal{U}_k(x) = \mathbb{R}^n$. On notera cet entier $d(x)$. On suppose que $d(x)$ et $(\dim \mathcal{U}_k(x))_{N+1 \geqslant d(x)}$ ne dépendent pas de x. Nous omettrons donc le x dans nos notations.

Théorème 2.2. *L'application identité* $(\mathbb{R}^n, \textbf{Euclidien}) \to (\mathbb{R}^n, d^N)$ *est* $C^{1/d}$*-Hölder et la dimension de Hausdorff de* $(\mathbb{R}^n, d^N)$ *est égale à* $\sum_{k=N+1}^{d} k(\dim \mathcal{U}_k - \mathcal{U}_{k-1})$.

3. Équations différentielles stochastiques conduites par des lacets browniens de profondeur N

3.1. Théorèmes de type Hörmander

Considérons sur le groupe de Carnot $\mathbb{G}_{d,N}$ le processus Y solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i(Y_s) \circ \mathrm{d}B_s^i, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

où B est un mouvement brownien standard d-dimensionnel. Le théorème d'Hörmander assure l'existence d'un noyau de transition C^∞, $p_t(x,y)$ pour Y.

Proposition 3.1. *Pour chaque* $T > 0$*, il existe un unique processus continu* $(Q_{t,T}^N)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *tel que*

(1) *Presque sûrement,* $Q_{t,T}^N = 0$;
(2) *Si* F *est une fonctionnelle prévisible et bornée sur l'espace des trajectoires de* $(Y_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$,
$$\mathbb{E}\big(F\big((Y_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}\big) \mid Y_T = 0\big) = \mathbb{E}\big(F\big(\big(Q_{t,T}^N\big)_{0 \leqslant t \leqslant T}\big)\big) ;$$
(3) $(Q_{t,T}^N)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *est une semimartingale jusqu'au temps* T.

Le processus $(Q_{t,T}^N)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *sera appelé le lacet de longueur* T *sur* Y.

Les composantes de $(\ln Q_{t,T}^N)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ dans la base $D_1, \ldots, D_d$ de $\mathcal{V}_1$ définissent une semimartingale d-dimensionnelle qui sera appelée le lacet brownien de profondeur N et noté $(P_{t,T}^N)_{0 \leqslant t \leqslant T}$. On considère maintenant une équation différentielle stochastique du type

$$X_t = x_0 + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t V_i(X_s) \circ \mathrm{d}P_{s,T}^{i,N}, \quad t \leqslant T, \tag{4}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et où $(P_{t,T}^{1,N}, \ldots, P_{t,T}^{d,N})_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est un lacet brownien de profondeur N.

Proposition 3.2. *Pour chaque* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, on a une unique solution* $(X_t^{x_0})_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *de* (4)*. De plus, le flot stochastique* $(\Phi_t, 0 \leqslant t \leqslant T)$ *correspondant est* C^∞.

Théorème 3.3. *Supposons que* $\mathfrak{L}^{N+1} = 0$*, alors pour chaque solution* $(X_t^{x_0})_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *de* (4)*, nous avons presque sûrement* $X_T^{x_0} = x_0$*. À l'opposé, si on suppose que* $\mathfrak{L}^{N+1}(x_0) = \mathbb{R}^n$*, alors pour la solution* $(X_t^{x_0})_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *de* (4)*, la variable aléatoire* $X_T^{x_0}$ *a une densité* C^∞ *notée* p_T*, qui sous les hypothèses de la section précédente satisfait*

$$p_T(x) \sim_{T \to 0} \frac{m(x)}{T^{\delta/2}},$$

avec m *fonction* C^∞ *et* δ *dimension de Hausdorff de l'espace métrique* $(\mathbb{R}^n, d^N)$.

4. Operateurs d'holonomie de profondeur N

On note $\mathbb{T}_{r,s}$ l'espace des tenseurs C^∞ de type (r, s) sur $\mathbb{R}^n$ qui ont un support compact.

Définition 4.1. On définit l'opérateur d'holonomie de profondeur N par

$$\big(\mathcal{H}_T^N K\big)(x) = \mathbb{E}\big((\Phi_T^* K)(x)\big), \quad K \in \mathbb{T}_{r,s},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

où Φ est le flot stochastique de l'Éq. (4).

Théorème 4.2. *Pour $K \in \mathbb{T}_{r,s}$, on a la limite suivante dans L^2,*

$$\lim_{T\to 0} \frac{\mathcal{H}_T^{N+1} K - K}{T^{N+1}} = \Delta_{N+1} K,$$

où Δ_{N+1} est un opérateur du second ordre qui peut être écrit

$$\Delta_{N+1} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}_{Q_i}^2$$

avec :

(1) $$m = \frac{1}{N+1} \sum_{k|N+1} \mu(k) d^{(N+1)/k}\ ;$$
(2) *$\mathcal{L}$ dérivée de Lie*;
(3) *$Q_i \in \mathfrak{L}^{N+1}$ polynôme de Lie universel de $\mathfrak{L}$.*

Further reading

[1] G. Ben Arous, Flots et séries de Taylor stochastiques, J. Probab. Theory Related Fields 81 (1989) 29–77.
[2] K.T. Chen, Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker–Hausdorff formula, Ann. Math. 65 (1) (1957).
[3] K.D. Elworthy, X.M. Li, Formulae for the derivatives of heat semigroups, J. Func. Anal. 125 (1994) 252–286.
[4] V.Ya. Gershkovich, A.M. Vershik, Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems, in: V.I. Arnold, S.P. Novikov (Eds.), Dynamical Systems VII, in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 16, 1994.
[5] H. Kunita, Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, in: Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[6] R. Léandre, Développement asymptotique de la densité de diffusions dégénérées, J. Probab. Theory Related Fields 76 (1987) 341–358.
[7] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev. Math. Iberoamericana 14 (2) (1998) 215–310.
[8] P. Malliavin, Stochastic Analysis, in: Grundlehren Math. Wiss., vol. 313, Springer, 1997.
[9] L.P. Rotschild, E.M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, Acta Math. 137 (1976) 247–320.