Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 729–734
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse numérique

Approximation par éléments finis de problèmes elliptiques d'optimisation de forme

Denise Chenais [a], Enrique Zuazua [b]

[a] *Université de Nice-Sophia-Antipolis, laboratoire J.A. Dieudonné, mathématiques, parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France*
[b] *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Espagne*

Reçu le 12 février 2004 ; accepté le 16 février 2004

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

On considère un problème de contrôle de forme elliptique où le contrôle est le domaine sur lequel l'équation de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet est posée. En dimension $n = 2$, Šveràk a démontré l'existence d'un domaine optimal dans la classe des ouverts contenus dans un même ouvert borné, et dont les complémentaires ont un nombre de composantes connexes uniformément borné. Ce résultat (J. Math. Pures Appl. 72 (1993) 537–551) est basé sur la compacité de cet ensemble de domaines pour la topologie de Hausdorff-complémentaire et la continuité H^1 des solutions du problème de Dirichlet pour cette topologie. Dans cette Note nous étudions une version discretisée en éléments finis de ce problème. Nous démontrons que le domaine polygonal optimal pour le problème discretisé converge pour cette topologie vers le domaine optimal continu. La preuve est basée sur la convergence H^1 des solutions éléments finis par rapport à cette topologie. ***Pour citer cet article : D. Chenais, E. Zuazua, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Finite element approximation on elliptic singular optimal design. We consider a problem of elliptic optimal design. The control is the shape of the domain on which the Dirichlet problem for the Laplace equation is posed. In dimension $n = 2$, Šveràk proved that there exists an optimal domain in the class of all open subsets of a given bounded open set, whose complements have a uniformly bounded number of connected components. The proof (J. Math. Pures Appl. 72 (1993) 537–551) is based on the compactness of this class of domains with respect to the complementary-Hausdorff topology and the continuous dependence of the solutions of the Dirichlet Laplacian in H^1 with respect to it. In this Note we consider a finite-element discrete version of this problem and prove that the discrete optimal domains converge in that topology towards the continuous one as the mesh-size tends to zero. The key point of the proof is that finite-element approximations of the solution of the Dirichlet Laplacian converge in H^1 whenever the polygonal domains converge in the sense of that topology. ***To cite this article: D. Chenais, E. Zuazua, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Adresses e-mail : chenais@math.unice.fr (D. Chenais), enrique.zuazua@uam.es (E. Zuazua).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.02.003

Abridged English version

Let D be a bounded open Lipschitz connected subset of $\mathbf{R}^2$ and ω be a regular open subset of D such that $\overline{\omega} \subset D$. For any open subset Ω of D, $\sharp_c \Omega$ denotes the number of connected components of $\overline{D} \setminus \Omega$. For a fixed $N \in \mathbf{N}$, we consider the family of domains

$$\mathcal{O}^N = \{\Omega \subset D;\ \Omega \text{ open},\ \sharp_c \Omega \leqslant N,\ \omega \subset \Omega\},$$

and the H^c-topology defined by the metric

$$d_{H^c}\big(\Omega,\ \Omega'\big) = \max\Big\{\max_{x \in \overline{D} \setminus \Omega} d\big(x, \overline{D} \setminus \Omega'\big),\ \max_{x' \in \overline{D} \setminus \Omega'} d\big(x', \overline{D} \setminus \Omega\big)\Big\}.$$

We recall that $\mathcal{O}^N$ is H^c-compact [1,2].

For $f \in H^{-1}(D)$ and $\Omega \in \mathcal{O}^N$, let y_Ω be the solution of the Dirichlet problem in Ω:

$$y_\Omega \in H_0^1(\Omega); \quad \int_\Omega \nabla y_\Omega \cdot \nabla z = \langle f, z \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

We are interested in the following optimal design problem:

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}^N} j(\Omega), \quad \text{with } j(\Omega) = \langle f, y_\Omega \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Šveràk [5] proved that a minimizer $\Omega^\star$ does exist in $\mathcal{O}^N$.

We prove that such a minimum can be approximated using classical finite elements, without regularity assumptions on the optimal shape, by a sequence of minimizers of a suitable finite-element family of discrete optimal design problems.

To do this, for each $h > 0$ we introduce a regular triangular mesh $\mathcal{T}_h$ of the domain D of size h and the family $\mathcal{O}_h^N$ of polygonal open subsets of D, union of triangles in $\mathcal{T}_h$, such that $\sharp_c \Omega_h \leqslant N$, and containing the domain ω_h constituted by all triangles contained in ω. To be more precise, for each $h > 0$, the triangulation $\mathcal{T}_h$ of $\overline{D}$ with mesh size h is assumed to fulfill the usual finite element requirements so that the involved triangles are closed and σ non-degenerated, σ being uniform in h.

For all $h > 0$ and $\Omega_h \in \mathcal{O}_h^N$, we define the finite-element space $V_h(\Omega_h) \subset H_0^1(\Omega_h)$ constituted by continuous and piecewise P_1 polynomial (over triangles) functions and introduce the Galerkin finite-element approximation of the Dirichlet problem:

$$y_h \in V_h(\Omega_h); \quad \int_{\Omega_h} \nabla y_h \cdot \nabla z_h = \langle f, z_h \rangle_{H^{-1}(\Omega_h), H_0^1(\Omega_h)}, \quad \forall z_h \in V_h(\Omega_h).$$

First of all we analyze the convergence of the finite-element solutions towards the solution of the Dirichlet problem.

To do that, for any $\Omega \in \mathcal{O}^N$, and for each $h > 0$, we define an approximation $\Omega_h \in \mathcal{O}_h^N$ of Ω as follows:

$$F = \overline{D} \setminus \Omega, \quad F_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h,\ T \cap F \neq \emptyset} T, \quad \Omega_h = \overline{D} \setminus F_h.$$

It is easy to prove that $d_{H^c}(\Omega_h, \Omega) \xrightarrow{h \to 0} 0$, $\sharp_c \Omega_h \leqslant N$ for any h, and $\omega_h \subset \Omega_h$. It follows that $\widetilde{y_h} \xrightarrow{h \to 0} \widetilde{y_\Omega}$ strongly in $H^1(D)$. Here and in the sequel $\tilde{z}$ denotes the extension of $z \in H_0^1(\Omega)$ by 0 to D.

This result guarantees, roughly speaking, the convergence of the Galerkin finite-element approximations with respect to the H^c-convergence of domains. It plays the key role in our analysis.

Note that, as a consequence of this fact, we also have that $j_h(\Omega_h) := \langle f, y_h \rangle_{H^{-1}(\Omega_h), H_0^1(\Omega_h)} \xrightarrow{h \to 0} j(\Omega)$.

We can then face at the discrete optimal design problem and its convergence towards the continuous one. As we mentioned above, the existence of minimizers $\Omega^\star$ for j was proved by Šveràk [5]. The existence of minimizers $\Omega_h^\star$ for j_h in the class $\mathcal{O}_h^N$ for each $h > 0$ is obvious since $\mathcal{O}_h^N$ has a finite number of elements. Using sequences of discrete minimizers $(\Omega_h^\star)_h$, the compactness property of the H^c-topology, and the convergence result above for the Galerkin approximations, we prove the main result guaranteeing that $(\Omega_h^\star)_h$ converges, up to subsequences, in the H^c-topology to continuous minimizers $\Omega^\star$ as h tends to zero.

This convergence result provides a rigorous justification to the most common engineering approach that, to compute an approximation of the continuous optimal domain, consists in solving a discrete finite-element version of the optimal design problem. In other words, this result justifies the commutativity of the optimal design and numerical approximation processes.

1. Introduction et résultat principal

Soit D un ouvert borné lipschitzien connexe de $\mathbf{R}^2$ et ω un ouvert régulier de D tel que $\overline{\omega} \subset D$. Pour tout ensemble Ω de D, on note $\sharp_c\Omega$ le nombre de composantes connexes de $\overline{D} \setminus \Omega$. Pour $N \in \mathbf{N}$ arbitraire fixé on considère la famille de domaines

$$\mathcal{O}^N = \{\Omega \subset D;\ \Omega \text{ ouvert},\ \sharp_c\Omega \leqslant N,\ \omega \subset \Omega\},$$

et la topologie H^c definie par la métrique

$$d_{H^c}\big(\Omega,\ \Omega'\big) = \max\Big\{ \max_{x \in \overline{D}\setminus\Omega} d\big(x,\ \overline{D} \setminus \Omega'\big),\ \max_{x' \in \overline{D}\setminus\Omega'} d\big(x',\ \overline{D} \setminus \Omega\big)\Big\}.$$

Rappellons que $\mathcal{O}^N$ est H^c-compact [1,2].

Pour $f \in H^{-1}(D)$ et $\Omega \in \mathcal{O}^N$, soit y_Ω la solution du problème de Dirichlet dans Ω :

$$y_\Omega \in H_0^1(\Omega)\ ; \quad \int_\Omega \nabla y_\Omega \cdot \nabla z = \langle f, z\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

On considère le problème d'optimisation de forme suivant :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}^N} j(\Omega), \quad \text{avec } j(\Omega) = \langle f, y_\Omega\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{2}$$

Šveràk [5] a démontré que le minimum de j est atteint pour au moins un élément $\Omega^\star$ de $\mathcal{O}^N$.

Le but de cette Note est de démontrer que le problème d'optimisation continu peut être approché à l'aide d'éléments finis standards. Plus précisément, toute suite de domaines optimaux discrets est H^c-compacte, et ses points adhérents sont des minima pour le problème continu.

Pour ceci, pour chaque $h > 0$ on introduit un maillage triangulaire $\mathcal{T}_h$ de D de taille h. On considère la famille $\mathcal{O}_h^N$ des domaines polygonaux de D qui sont l'intérieur d'unions de triangles de $\mathcal{T}_h$, tels que $\sharp_c\Omega_h \leqslant N$, et qui contiennent le domaine ω_h formé des triangles inclus dans ω. La triangulation $\mathcal{T}_h$ est supposée vérifier les hypothèses standard de regularité garantissant la convergence de la méthode des eléments finis P_1 pour l'approximation des solutions du problème de Dirichlet lorsque h tend vers 0.

Quel que soit Ω_h dans $\mathcal{O}_h^N$, on introduit le sous-espace $V_h(\Omega_h)$ de $H_0^1(\Omega_h)$ des fonctions continues et P_1 par morceaux sur les triangles de Ω_h. On considère maintenant l'approximation éléments finis du problème de Dirichlet

$$y_h \in V_h(\Omega_h)\ ; \quad \int_{\Omega_h} \nabla y_h \cdot \nabla z_h = \langle f, z_h\rangle_{H^{-1}(\Omega_h), H_0^1(\Omega_h)}, \quad \forall z_h \in V_h(\Omega_h). \tag{3}$$

Pour tout $z \in H_0^1(\Omega)$, on note $\tilde{z} \in H_0^1(D)$ son prolongement par 0.

On considère enfin le problème de contrôle de forme discret :

$$\min_{\Omega_h \in \mathcal{O}_h^N} j_h(\Omega_h), \quad \text{avec } j_h(\Omega_h) = \langle f, y_h \rangle_{H^{-1}(\Omega_h), H_0^1(\Omega_h)}. \tag{4}$$

Le résultat principal de la Note est le suivant :

Théorème 1.1. *Pour tout $h > 0$ le minimum de j_h sur $\mathcal{O}_h^N$ est atteint pour au moins un domaine admissible $\Omega_h^\star$.*

Toute suite de domaines discrets optimaux $(\Omega_h^\star)_h$ est H^c-compacte, et chacun de ses points d'accumulation est un minimum $\Omega^\star$ de j.

La suite $(j_h(\Omega_h^\star))_h$ (complete) converge vers $\min_{\Omega \in \mathcal{O}^N} j(\Omega)$.

De plus, si une sous-suite $(\Omega_{h'})_{h'}$ H^c-converge vers $\Omega^\star$, alors

$$\widetilde{y_{h'}^\star} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \widetilde{y_\Omega^\star} \quad \text{dans } H_0^1(D)\text{-fort},$$

où $y_h^\star$ est la solution éléments finis de l'Éq. (3) *dans $\Omega_{h'}^\star$, et $y_\Omega^\star$ la solution de l'équation continue* (1) *dans $\Omega^\star$*

Dans la section suivante nous allons donner les idées principales de la preuve du Théorème 1.1.

Ce résultat justifie la démarche usuelle de l'ingénieur, qui discrétise le problème de contrôle de forme pour obtenir une approximation du domaine optimal pour le modèle continu. En effet, le résultat décrit la convergence des optima discrets vers les optima continus sans besoin d'aucun renseignement complémentaire a priori sur la régularité des domaines optimaux continus.

On peut dire aussi que le résultat ci-dessus garantit que les procédures d'optimisation de forme et d'approximation numérique par éléments finis commutent.

Le Théorème 1.1 assure aussi la convergence des minima des fonctionnelles, ainsi que celle des états discrets associés vers l'état continu.

Notons aussi que le résultat ci-dessus est vrai pour tout maillage $\mathcal{T}_h$ qui satisfait, lorsque h tend vers zéro, les conditions classiques garantissant la convergence de la méthode d'éléments finis.

Remarquons que si ω est vide, alors $\emptyset \in \mathcal{O}^N$. On définit par continuité $\widetilde{y_\emptyset} = 0$. Le problème devient trivial, $\emptyset$ est solution.

L'obtention des taux de convergence reste ouvert. Ceci peut dépendre fortement de la régularité du domaine optimal continu.

2. Idée de la preuve

La preuve découle d'un résultat de convergence des solutions du problème discret vers la solution du problème continu lorsque les domaines discrets H^c convergent vers le domaine continu. Nous démontrons d'abord ce résultat de continuité pour ensuite donner une idée de la preuve du Théorème 1.1

2.1. Convergence des solutions éléments finis pour la topologie H^c

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soient $(\Omega_h)_h \subset \mathcal{O}_h^N$ et $\Omega \in \mathcal{O}^N$ tels que $\Omega_h \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \Omega$ pour la topologie H^c. On a $\widetilde{y_h} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \widetilde{y_\Omega}$ dans $H_0^1(D)$-fort.*

Démonstration. D'après l'Éq. (3), il est clair que la suite $(\widetilde{y_h})_h$ est bornée dans $H_0^1(D)$. Soit w un de ses points d'accumulation pour la topologie faible de $H_0^1(D)$.

Tout d'abord, on sait que $d_{H^c}(\Omega, \Omega_h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ implique que $\Omega_h \overset{\text{Mosco}}{\longrightarrow} \Omega$ (voir [2,3,5]). Par définition de la convergence au sens de Mosco, on sait qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $w = \tilde{u}$. Il suffit de voir que $u = y_\Omega$, et pour ceci que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pour chaque h, on note π_h l'opérateur d'interpolation associé à la triangulation $\mathcal{T}_h$ et à l'espace d'éléments finis $V_h(D)$ associé à cette triangulation.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, de support K. Comme $d_{H^c}(\Omega, \Omega_h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, on sait [2,4] que

$$\exists h_0 \text{ t.q. } h < h_0 \quad \Rightarrow \quad K \subset \Omega_h.$$

On a donc $\pi_h \tilde{\varphi}\,|_{D\setminus\Omega_h} = 0$ et $\pi_h \tilde{\varphi} \in V_h(D)$. On en déduit avec les hypotheses faites sur les triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ que

$$\|\tilde{\varphi} - \pi_h \tilde{\varphi}\|_{H^1(D)} \leqslant C(\sigma, D) h \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}.$$

En outre

$$\int_D \nabla \widetilde{y_h} \cdot \nabla(\pi_h \tilde{\varphi}) = \langle f, \pi_h \tilde{\varphi} \rangle_{H^{-1}(D), H_0^1(D)}.$$

En utilisant la convergence faible (resp. forte) de $\widetilde{y_h}$ (resp. $\pi_h \tilde{\varphi}$) dans $H_0^1(D)$ et en passant à la limite, on obtient

$$\int_D \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\varphi} = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle_{H^{-1}(D), H_0^1(D)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

soit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et donc $u = y_\Omega$.

En utilisant y_h comme fonction test dans la formulation variationnelle, on obtient aussi la convergence des normes, ce qui donne la convergence forte. $\square$

2.2. Approximation de $\mathcal{O}^N$ par $\mathcal{O}_h^N$

Théorème 2.2. *Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}^N$, il existe $(\Omega_h)_h$ tel que $\Omega_h \in \mathcal{O}_h^N$ et $\Omega_h \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \Omega$ pour la topologie H^c.*

Démonstration. Soit $\Omega \in \mathcal{O}^N$ quelconque (pas nécessairement un domaine optimal). On lui associe la suite $(\Omega_h)_h$ définie comme suit. On considère

$$F = \overline{D} \setminus \Omega, \quad F_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h,\ T\cap F \neq \emptyset} T, \quad \Omega_h = \overline{D} \setminus F_h \quad \text{qui contient } \omega_h.$$

On a $d_{H^c}(\Omega, \Omega_h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. En effet, on a

$$\Omega = \overline{D} \setminus F, \quad \Omega_h = \overline{D} \setminus F_h, \quad F \subset F_h,$$

donc $d_{H^c}(\Omega_h, \Omega) = \max_{x_h \in F_h} d(x_h, F)$. De plus, puisque $F_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h,\ T\cap F \neq \emptyset} T$, on a

$$\forall x_h \in F_h,\ \exists T \in \mathcal{T}_h,\ \exists y \in T \cap F \text{ t.q. } x_h \in T.$$

On a $d_{H^c}(\Omega_h, \Omega) \leqslant \|x_h - y\| \leqslant h$. Ainsi $d_{H^c}(\Omega, \Omega_h) \xrightarrow{h\to 0} 0$.

On a aussi $\sharp_c \Omega_h \leqslant N$. En effet, soit F^i une composante connexe de Ω, et

$$F_h^i = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h,\ T \cap F^i \neq \emptyset} T = F^i \cup \left(\bigcup_{T \cap \partial F^i \neq \emptyset} T \right).$$

Comme chaque T est connexe et recoupe F^i, $F^i \cup T$ est connexe et F_h^i est connexe. On en déduit que $\sharp_c \Omega_h \leqslant \sharp_c \Omega \leqslant N$. □

2.3. Preuve du Théorème 1.1

Le problème (2) a au moins une solution $\Omega^\star$ d'après Šveràk [5]. Le problème (4) a aussi au moins une solution $\Omega_h^\star$ car, à h fixé, $\mathcal{O}_h^N$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

On sait que $\mathcal{O}^N$ est H^c-compact. Il existe donc une sous-suite, que l'on note encore $(\Omega_h^\star)_h$, qui converge pour la topologie H^c vers un ensemble limite $\mathcal{U}$. Montrons maintenant que $\mathcal{U}$ est un minimiseur pour la fonctionnelle continue j.

D'après le Théorème 2.1, on a $j_h(\Omega_h^\star) \to j(\mathcal{U})$.

Soit $\Omega \in \mathcal{O}^N$ quelconque. D'après le Théorème 2.2, il existe $(\Omega_h)_h$ telle que $\Omega_h \xrightarrow{h\to 0} \Omega$ au sens de H^c. D'après le Théorème 2.1, on a $j_h(\Omega_h) \xrightarrow{h\to 0} j(\Omega)$. Or on sait que $j_h(\Omega_h^\star) \leqslant j_h(\Omega_h)$ pout tout h. En passant à la limite, on obtient

$$j(\mathcal{U}) \leqslant j(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathcal{O}^N.$$

Ainsi, $\mathcal{U}$ est un minimiseur pour le problème continu. Nous avons montré que $j_h(\Omega_h^\star) \to \min_{\Omega \in \mathcal{O}^N} j(\Omega)$, et que toute limite de sous-suite de $(\Omega_h^\star)_h$ est un minimiseur de j.

Le dernier résultat énoncé dans le Théorème 1.1 découle du Théorème 2.1.

Remerciements

Ce travail a été accompli pendant le séjour du second auteur à l'Université de Nice (France). Cette institution est chaleuresement remerciée pour son soutien et son hospitalité. Le second auteur a aussi été financé par le Programme BFM2002-03345 du MCyT Espagnol, et les Réseaux Européens « Homogenization and Multiple Scales » et « New materials, adaptative systems and their nonlinearities : modelling, control and numerical simulation ».

Références

[1] C. Dellacherie, Ensembles analytiques, capacités, mesures de Hausdorff, in: Lecture Notes in Math., vol. 295, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[2] M. Hayouni, A. Henrot, N. Samouh, On the Bernouilli free boundary problem and related shape optimization problems, Interface and Free Bound. 3 (1) (2001) 1–13.

[3] U. Mosco, Convergence of convex sets and solutions of variationnal inequalities, Adv. Math. 3 (1969) 510–585.

[4] O. Pironeau, Optimal Shape Design for Elliptic Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[5] V. Šveràk, On optimal shape design, J. Math. Pures Appl. 72 (1993) 537–551.