Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 527–532
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations différentielles/Théorie des nombres

Polylogarithmes multiples uniformes en une variable

Francis C.S. Brown

A2X, 351, cours de la Libération, Talence cedex 33405, France

Reçu le 17 novembre 2003 ; accepté après révision le 3 février 2004

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Les versions uniformes des polylogarithmes classiques $\mathrm{Li}_n(z)$ ont de nombreuses applications en mathématiques. Elles ont été étudiées, sous diverses formes, par Ramakrishnan, Wojtkowiak, et Zagier entre autres. Dans cette Note nous expliquons comment construire, plus généralement, une version uniforme pour chaque polylogarithme multiple en une variable de façon systématique. Nous démontrons que les fonctions définies sont linéairement indépendantes, qu'elles satisfont aux relations de battage, et que toute version uniforme des polylogarithmes multiples en une variable s'obtient de cette façon. ***Pour citer cet article : F.C.S. Brown, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Single-valued multiple polylogarithms in one variable. Various single-valued versions of ordinary polylogarithms $\mathrm{Li}_n(z)$ have been constructed by Ramakrishnan, Wojtkowiak, Zagier, and others. These single-valued functions are generalisations of the Bloch–Wigner dilogarithm and have many applications in mathematics. In this Note we show how to construct explicit single-valued versions of multiple polylogarithms in one variable. We prove the functions thus constructed are linearly independent, that they satisfy the shuffle relations, and that every possible single-valued version of multiple polylogarithms in one variable can be obtained in this way. ***To cite this article: F.C.S. Brown, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

The ordinary polylogarithms $\mathrm{Li}_n(z)$, for $n \in \mathbb{N}$, are defined in a neighbourhood of $0 \in \mathbb{C}$ by the series $\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$, and have a multi-valued holomorphic continuation to $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{1, \infty\}$. The *Bloch–Wigner dilogarithm* is a single-valued version of the function $\mathrm{Li}_2(z)$ defined by the expression

$$\mathrm{Im}\big(\mathrm{Li}_2(z) + \log|z| \log(1 - z)\big). \tag{1}$$

This extends to a real-valued continuous function on the whole of $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ and satisfies a certain 5-term functional equation. It has important applications in many branches of mathematics [7,14]: for example, it allows one to compute Borel's regulator on the algebraic K-group $K_3(\mathbb{C})$, volumes of hyperbolic manifolds in dimension 3, and special values of Artin L-functions at 2.

Adresse e-mail : brown@clipper.ens.fr (F.C.S. Brown).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.02.001

At least two different generalisations of this function have been constructed by Zagier [12,13] and Wojtkowiak [11] for all $n \in \mathbb{N}$ (see Section 3). The aim of this Note is to construct, more generally, all single-valued versions of multiple polylogarithms in one variable (Section 2). In order to do this, we must study the differential structure of the algebra of functions that these generate (Section 1).[1]

Let $X = \{x_0, x_1\}$ be an alphabet with two letters, and let X^* be the free non-commutative monoid generated by X, i.e., the set of all words w in the symbols x_0 and x_1, along with the empty word e. Let $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0, 1, \infty\}$ denote the punctured complex projective line, and let $p : \widehat{S} \to S$ be a universal covering. A real analytic function on $\widehat{S}$ is said to be *single-valued* if and only if it lifts a continuous function on S. Let $U \subset S$ denote the simply-connected open subset of $\mathbb{C}$ obtained by cutting along the intervals $(-\infty, 0]$ and $[1, \infty)$. One can show [1,5] that there exists a unique family of holomorphic functions $\{\mathrm{Li}_w(z)\colon\ w \in X^*\}$ which satisfy the following recursive differential equations on U:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_{x_0 w}(z) = \frac{\mathrm{Li}_w(z)}{z}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_{x_1 w}(z) = \frac{\mathrm{Li}_w(z)}{1-z},$$

where we demand that $\mathrm{Li}_e(z) = 1$, $\mathrm{Li}_{x_0^n}(z) = \frac{1}{n!}\log^n(z)$ for all $n \in \mathbb{N}$, and $\mathrm{Li}_w(z) \to 0$ as $z \to 0$ for all words w not of the form x_0^n. We will also denote by $\mathrm{Li}_w(z)$ the continuation of these functions to the universal covering $\widehat{S}$. The function $\mathrm{Li}_{x_0^{n-1}x_1}(z)$ coincides with the classical polylogarithm $\mathrm{Li}_n(z)$ defined above. Note that this family of functions is sometimes referred to as 'generalised polylogarithms' (e.g., [6]), and as 'harmonic polylogarithms' by some mathematical physicists (e.g., [15]).

It is known that the *shuffle product* $ш : \mathbb{C}\langle X\rangle \times \mathbb{C}\langle X\rangle \to \mathbb{C}\langle X\rangle$ makes $\mathbb{C}\langle X\rangle$ into a commutative polynomial algebra. If we now regard $w \mapsto \mathrm{Li}_w(z)$ as a linear map from $\mathbb{C}\langle X\rangle$ to the algebra of holomorphic functions on $\widehat{S}$, then it is easily seen to be a homomorphism of algebras, i.e., it satisfies the *shuffle relations*: $\mathrm{Li}_w(z)\mathrm{Li}_{w'}(z) = \mathrm{Li}_{w\,ш\,w'}(z)$ for all $w, w' \in X^*$. Let us denote by $\mathcal{O} = \mathbb{C}[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}]$, the ring of regular functions on S. It is known that the functions $\mathrm{Li}_w(z)$ are linearly independent over $\mathcal{O}$ ([6,9], see also Corollaire 1.3), and that they have non-trivial monodromy around 0 and 1. Our main result states that there exist non-holomorphic versions of these functions which satisfy all the above properties, except that they have trivial monodromy around 0 and 1, and are therefore defined on S.

Theorem 0.1. *There exists a unique family of single-valued functions* $\{\mathcal{L}_w(z)\colon\ w \in X^*,\ z \in S\}$, *each of which is an explicit linear combination of the functions* $\mathrm{Li}_w(z)\mathrm{Li}_{w'}(\bar{z})$ *where* $w, w' \in X^*$, *which satisfy the differential equations*:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_{x_0 w}(z) = \frac{\mathcal{L}_w(z)}{z}, \quad \textit{and} \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_{x_1 w}(z) = \frac{\mathcal{L}_w(z)}{1-z},$$

such that $\mathcal{L}_e(z) = 1$, $\mathcal{L}_{x_0^n}(z) = \frac{1}{n!}\log^n|z|^2$ *for all* $n \in \mathbb{N}$, *and* $\lim_{z\to 0}\mathcal{L}_w(z) = 0$ *if* w *is not of the form* x_0^n. *The functions* $\mathcal{L}_w(z)$ *satisfy the shuffle relations, and are linearly independent over* $\mathcal{O}\overline{\mathcal{O}}$. *Every linear combination of the functions* $\mathrm{Li}_w(z)\mathrm{Li}_{w'}(\bar{z})$, *where* $w, w' \in X^*$, *which is single-valued, can be written as a unique linear combination of functions* $\mathcal{L}_w(z)$.

The functions $\mathcal{L}_w(z)$ also satisfy an explicit differential equation with respect to $\partial/\partial\bar{z}$ (see Section 2.2).

It follows from the theorem that the single-valued functions constructed by Zagier and Wojtkowiak can be written explicitly in terms of the functions $\mathcal{L}_n(z) = \mathcal{L}_{x_0^{n-1}x_1}(z)$. This is done in Section 3. In particular, the Bloch–Wigner dilogarithm (1) appears as half the imaginary part of our version of the dilogarithm:

$$\mathcal{L}_2(z) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\big(\mathrm{Li}_2(z) + \log|z|\log(1-z)\big) - 2\log|z|\log|1-z|.$$

[1] We have recently been informed by H. Gangl that Wojtkowiak has given another construction of single-valued functions in [10], but without giving the properties discussed here.

Remark 1. One can consider the $\mathcal{O}$-algebra generated by the functions $\mathrm{Li}_w(z)$ to be the universal solution of every unipotent differential equation with singularities in $\{0, 1, \infty\}$ [1]. The $\mathcal{O}$-algebra generated by the functions $\mathcal{L}_w(z)$ may be regarded as the universal single-valued solution of any such differential equation.

This work can be generalised in two different ways. One can consider polylogarithms with an arbitrary set of singularities $\Sigma \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, which is treated in detail in [1]. Alternatively, one can consider multiple polylogarithms in many variables, for which analogous results may also be obtained [2]. Both generalisations have many different applications in number theory (e.g., the construction of higher regulators) and theoretical physics (e.g., the construction of solutions to the Knizhnik–Zamolodchikov equation [3]).

1. L'algèbre universelle des polylogarithmes

Soit $\mathcal{O} = \mathbb{C}[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}]$ l'algèbre des fonctions régulières sur $S = \mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$, et soit X^* l'ensemble des mots sur l'alphabet à deux lettres $X = \{x_0, x_1\}$, y compris le mot vide e. Le *produit de battage* $ш : \mathbb{C}\langle X\rangle \times \mathbb{C}\langle X\rangle \to \mathbb{C}\langle X\rangle$ est l'application définie récursivement par les formules :

$$w \,ш\, e = e \,ш\, w = w,$$
$$x_i w \,ш\, x_j w' = x_i (w \,ш\, x_j w') + x_j (x_i w \,ш\, w'),$$

pour tout $w, w' \in X^*$, $i, j \in \{0, 1\}$. Nous appelons *l'algèbre universelle des polylogarithmes* [1,4] l'espace vectoriel $\mathcal{PL} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X\rangle$, muni du produit de battage ш, et de la dérivation

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} \otimes 1 + \frac{1}{z} \otimes \partial_0 + \frac{1}{1-z} \otimes \partial_1,$$

où ∂_0, ∂_1 opèrent par troncation : i.e. $\partial_i(x_j w) = \delta_{ij} w$ pour tout $w \in X^*$, et $i, j \in \{0, 1\}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Nous appelons *réalisation des polylogarithmes* une $\mathcal{O}$-algèbre différentielle M et un homomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire d'algèbres différentielles $\rho : \mathcal{PL} \to M$. On peut définir des fonctions polylogarithmes $\mathrm{Li}_w(z)$ par une série génératrice $L_X(z) = \sum_{w \in X^*} \mathrm{Li}_w(z) w$, qui est l'unique solution holomorphe sur $U = \mathbb{P}^1 \backslash (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial z} L_X(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right) L_X(z),$$

telle que $\lim_{z \to 0} \exp(-x_0 \log z) L_X(z) = 1$. Notons aussi $\mathrm{Li}_w(z)$ les fonctions holomorphes définies sur un revêtement universel $\widehat{S}$ de $S = \mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ par prolongement analytique. Soit L la $\mathcal{O}$-algèbre engendrée par les fonctions $\mathrm{Li}_w(z)$, et soit ρ_L la réalisation canonique $\rho_L : \mathcal{PL} \to L$, qui à w associe la fonction $\mathrm{Li}_w(z)$. Notons $z \mapsto \bar{z}$ la conjugaison complexe, et soient $\overline{\mathcal{O}}$, $\bar{L}$, $\overline{\mathcal{PL}}$ les algèbres qui s'obtiennent en conjugant les algèbres définies ci-dessus. $\overline{\mathcal{PL}}$ est munie de la dérivation conjuguée $\bar{\partial} = \partial / \partial \bar{z} \otimes 1 + 1/\bar{z} \otimes \partial_0 + 1/(1 - \bar{z}) \otimes \partial_1$.

Nous appelons *l'algèbre des polylogarithmes généralisés* la $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O}\overline{\mathcal{O}}$-algèbre différentielle

$$\mathcal{PL} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{PL}},$$

munie des deux dérivations ∂ et $\bar{\partial}$. Notons $\rho_c : \mathcal{PL} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{PL}} \to L\bar{L}$ la réalisation généralisée

$$w \otimes w' \mapsto \mathrm{Li}_w(z) \mathrm{Li}_{w'}(\bar{z}).$$

Notre but est de définir la *réalisation uniforme* de $\mathcal{PL}$, i.e. une sous $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{L}$ de $L\bar{L}$ de fonctions uniformes, ainsi qu'un isomorphisme canonique $\rho_{\mathcal{L}} : \mathcal{PL} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$.

1.1. *La structure de $\mathcal{PL}$ et l'indépendance linéaire*

L'indépendance linéaire des fonctions $\{\mathrm{Li}_w(z) \colon\ w \in X^*\}$ se démontre facilement par un argument de monodromie [6]. Cela ne peut s'étendre au cas des polylogarithmes généralisés car les opérateurs de monodromie ont un noyau non-trivial sur $L\bar{L}$. Nous devons donc démontrer l'indépendance linéaire en utilisant seulement l'équation différentielle. La reformulation suivante du résultat principal est due à Cartier [4].

Théorème 1.1 [1]. *L'algèbre $\mathcal{PL}$ est différentiellement simple pour ∂. Son corps des constantes est $\mathbb{C}$, et tout élément dans $\mathcal{PL}$ possède une primitive.*

Cela implique que toute réalisation de $\mathcal{PL}$ est injective. En particulier, ρ_L est un isomorphisme.

Corollaire 1.2. *L'algèbre $\mathcal{PL} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{PL}}$ est différentiellement simple pour les deux dérivations $\partial,\ \bar{\partial}$.*

Corollaire 1.3. *Les fonctions $\{\mathrm{Li}_w(z)\mathrm{Li}_{w'}(\bar{z}):\ w, w' \in X^*\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathcal{O}\overline{\mathcal{O}}$.*

Remarque 1. On peut également raisonner directement sur l'algèbre $L\bar{L}$: on définit l'action des opérateurs ∂_0, ∂_1 sur $L\bar{L}$ et on montre que cette action est bien définie. Cela découle du fait que les fonctions z et $\bar{z}$ sont transcendantes sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Li}_w(z)\mathrm{Li}_{w'}(\bar{z})$, où $w, w' \in X^*$, ce qui se démontre par récurrence sur la longueur des mots en appliquant successivement l'opérateur $z(1-z)\partial/\partial z$.

La structure algébrique de $\mathcal{PL} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{PL}}$ est donnée par le théorème suivant de Radford.

Théorème 1.4 [6]. *$\mathbb{C}\langle X\rangle$ munie de ш est isomorphe à une algèbre de polynômes.*

On peut expliciter une base de transcendance de $\mathbb{C}\langle X\rangle$ au moyen des mots de Lyndon, par exemple ([8]). On déduit que les mots $x_0^n x_1$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont algébriquement indépendants.

2. Construction des polylogarithmes uniformes

2.1. La série Z et la monodromie

Notons $X_c^* = x_0 X^* x_1$ l'ensemble des *mots convergents*. On démontre facilement que $\mathrm{Li}_w(z)$ est régulière en $z = 1$ pour tout mot $w \in X_c^*$. Soit $\zeta_{\text{ш}}(w) = \mathrm{Li}_w(1)$ la valeur correspondante en 1 : c'est une *valeur zêta multiple*, et c'est un nombre réel. On peut démontrer que $w \mapsto \zeta_{\text{ш}}(w)$ se prolonge en l'unique fonction linéaire sur $\mathbb{C}\langle X\rangle$ satisfaisant à

$$\zeta_{\text{ш}}(x_0) = \zeta_{\text{ш}}(x_1) = 0,$$
$$\zeta_{\text{ш}}(w \,\text{ш}\, w') = \zeta_{\text{ш}}(w)\zeta_{\text{ш}}(w') \quad \text{pour tout } w, w' \in X^*.$$

La *série zêta régularisée* est la série formelle non-commutative $Z(x_0, x_1) = \sum_{w \in X^*} \zeta_{\text{ш}}(w) w$. Elle peut s'interpréter comme la valeur régularisée en $z = 1$ de la série génératrice des polylogarithmes $L_X(z)$.

Proposition 2.1 ([6], voir aussi [1]). *Soient $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ les opérateurs de monodromie autour de 0 et 1 agissant sur les fonctions holomorphes sur $\widehat{S}$. Alors*

$$\mathcal{M}_0 L_X(z) = L_X(z)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x_0},$$
$$\mathcal{M}_1 L_X(z) = L_X(z) Z(x_0, x_1)^{-1}\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x_1} Z(x_0, x_1).$$

2.2. La réalisation uniforme

Soit $\tilde{}: X^* \to X^*$ l'application qui retourne les mots. C'est l'unique anti-homomorphisme de monoïdes qui envoie x_0 sur x_0 et x_1 sur x_1. Définissons un deuxième alphabet $Y = \{y_0, y_1\}$ comme étant l'unique solution des équations :

$$y_0 = x_0,$$
$$\widetilde{Z}(y_0, y_1)y_1\widetilde{Z}(y_0, y_1)^{-1} = Z(x_0, x_1)^{-1}x_1 Z(x_0, x_1),$$

où l'application $\widetilde{\ }: \mathbb{C} \ll Y \gg \to \mathbb{C} \ll Y \gg$ est définie de façon analogue. La série y_1 se calcule récursivement en fonction de x_0 et x_1, poids par poids [1]. Notons que y_1 n'est pas identiquement x_1, car $Z(x_0, x_1)\widetilde{Z}(x_0, x_1)$ n'est pas une puissance de x_1, et donc ne commute pas à x_1. D'autre part, on a $Z(x_0, x_1) = 1 + \zeta(2)(x_0x_1 - x_1x_0) + \cdots$, et il suit que $y_1 = x_1 + \varepsilon$, où ε est une série de mots de longueur $\geqslant 4$. Notons $\phi : Y^* \to X^*$ l'application qui envoie $y_0 \mapsto x_0$ et $y_1 \mapsto x_1$. Nous posons $\widetilde{L_Y}(\bar z) = \sum_{w\in Y^*} \mathrm{Li}_{\phi(w)}(\bar z)\, \widetilde{w} = 1 + \mathrm{Li}_{x_0}(\bar z)\, x_0 + \mathrm{Li}_{x_1}(\bar z)\, (x_1 + \tilde\varepsilon) + \cdots$.

Définition 2.2. Soit $\mathcal{L}(z) = L_X(z)\widetilde{L_Y}(\bar z)$ et définissons $\mathcal{L}_w(z)$ par la série génératrice : $\mathcal{L}(z) = \sum_{w\in X^*} \mathcal{L}_w(z)w$.

Notons $\mathcal{L}$ la $\mathcal{O}$-algèbre engendrée par les fonctions $\{\mathcal{L}_w(z) : w \in X^*\}$ et munie de la dérivation $\partial/\partial z$. Nous avons donc une réalisation $\rho_{\mathcal{L}} : \mathcal{PL} \to \mathcal{L}$ qui envoie w sur $\mathcal{L}_w(z)$. C'est un isomorphisme d'algèbres différentielles par le Théorème 1.1.

Théorème 2.3. *L'algèbre $\mathcal{L}$ est différentiellement simple. Son corps des constantes est $\mathbb{C}$, et tout élément possède une primitive. $\mathcal{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}$ n'est autre que l'ensemble des fonctions uniformes dans $L\bar L$:*

$$\mathcal{L} \otimes \overline{\mathcal{O}} = \big\{F(z) \in L\bar L\colon\ \mathcal{M}_0 F(z) = \mathcal{M}_1 F(z) = F(z)\big\}.$$

L'uniformité des fonctions $\mathcal{L}_w(z)$ découle de la définition et de la Proposition 2.1. On démontre que toute fonction uniforme est combinaison $\mathcal{O}\overline{\mathcal{O}}$-linéaire des $\mathcal{L}_w(z)$ par un argument de récurrence qui utilise l'unipotence de l'algèbre $\mathcal{L}$ [1]. Le Théorème 0.1 est un corollaire. Les fonctions $\mathcal{L}_w(z)$ satisfont, bien entendu, à une équation différentielle par rapport à $\partial/\partial\bar z$. Cela peut s'écrire de la façon suivante : $\frac{\partial}{\partial \bar z}\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(z)(y_0/\bar z + y_1/(1-\bar z))$. On peut déduire du théorème précédent que toute équation différentielle unipotente en $\partial/\partial z$ sur S possède une solution uniforme dans l'algèbre $\mathcal{L}$ [1].

3. Exemples

Il suit des équations différentielles pour $\mathcal{L}_w(z)$, que

$$\mathcal{L}_{x_0^n}(z) = \frac{1}{n!}\log^n|z|^2, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{x_1^n}(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\log^n|1-z|^2.$$

Notons $\mathcal{L}_n(z) = \mathcal{L}_{x_0^{n-1}x_1}(z)$, et considérons les séries génératrices : $L(z,t) = \sum_{n=1}^\infty \mathrm{Li}_n(z)t^n$ et $\mathcal{L}(z,t) = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{L}_n(z)t^n$. On montre facilement que $\mathcal{L}(z,t) = L(z,t) - \exp(2t\log|z|)L(\bar z, -t)$, d'où

$$\mathcal{L}_n(z) = \mathrm{Li}_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\log^k|z|\mathrm{Li}_{n-k}(\bar z).$$

Les fonctions $\mathcal{L}_n(z)$ sont à valeurs complexes, à la différence de celles définies dans [11] et [12]. Par exemple, la fonction de Bloch–Wigner (1) est la moitié de la partie imaginaire de notre version du dilogarithme : $\mathcal{L}_2(z) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z) + \log|z|\log(1-z)) - 2\log|z|\log|1-z|$.

3.1. Comparaison avec les versions uniformes de Zagier et Wojtkowiak

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathrm{Re}_n = \mathrm{Re}$ si n est impair, et $\mathrm{Re}_n = \mathrm{i}\,\mathrm{Im}$ si n est pair. Si $n \geqslant 2$, la version uniforme de $\mathrm{Li}_n(z)$ définie par Zagier [14] (à un multiple de i près) est

$$P_n(z) = \mathrm{Re}_n\left(\sum_{r=0}^{n-1}\frac{2^r B_r}{r!}\big(\log|z|\big)^r\mathrm{Li}_{n-r}(z)\right),$$

où les B_r sont les nombres de Bernoulli. Posons $P_1(z) = -\log|1-z|$. Si $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\widetilde{D}_n(z) = \mathrm{Re}_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\bigl(-\log|z|\bigr)^k \mathrm{Li}_{n-k}(z) + \frac{1}{n!}\bigl(-\log|z|\bigr)^{n-1}\log|1-z|\right)$$

la version donnée par Wojtkowiak [11,13]. Définissons les séries génératrices suivantes : $P(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)t^n$, et $\widetilde{D}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{D}_n(z)t^n$. Pour toute série génératrice $f(z,t)$, soit $Rf(z,t)$ la série $(f(z,t) - f(\bar{z},-t))/2$. Le théorème principal nous dit que les fonctions P_n et $\widetilde{D}_n$ peuvent s'écrire en fonction des $\mathcal{L}_w(z)$.

Proposition 3.1. *Nous avons les formules explicites* :

$$P(z,t) = R\left[\frac{t\log|z|}{\exp(2t\log|z|)-1}\mathcal{L}(z,t)\right],$$
$$\widetilde{D}(z,t) = \frac{1}{2}R\bigl[\exp\bigl(-t\log|z|\bigr)\mathcal{L}(z,t)\bigr] + \frac{\sinh(t\log|z|)}{\log|z|}\log|1-z|.$$

On obtient ainsi une nouvelle démonstration du fait que les fonctions $P_n(z)$ et $\widetilde{D}_n(z)$ sont uniformes.

Corollaire 3.2. *Les fonctions* $\{P_n(z)\colon n \in \mathbb{N}\}$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathcal{O}$. *Il en est de même pour les fonctions* $\{\widetilde{D}_n(z)\colon n \in \mathbb{N}\}$.

Cela découle de la remarque qui suit le Théorème 1.5 et du fait que $\rho_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme.

Remarque 2. Les fonctions $P_n(z)$ et $\widetilde{D}_n(z)$ satisfont aussi à une relation d'inversion [7,11–13]. La relation analogue pour $\mathcal{L}(z,t)$ s'écrit $\mathcal{L}(z,t) + \mathcal{L}(1/z,-t) = 1 - \exp(2t\log|z|)$, et peut se démontrer très facilement en différentiant. En utilisant la Proposition 3.1 ci-dessus, nous récupérons les relations $P(1/z,-t) = -P(z,t) - t\log|z|$ et $\widetilde{D}(1/z,-t) = -\widetilde{D}(z,t)$.

Références

[1] F.C.S. Brown, Hyperlogarithms, unipotent differential equations and a variant of the Riemann–Hilbert problem, à paraître.
[2] F.C.S. Brown, Single-valued multiple polylogarithms and their applications, à paraître.
[3] F.C.S. Brown, Uniform solutions to the K–Z equation, à paraître.
[4] P. Cartier, D-modules et polylogarithmes, en préparation.
[5] P. Cartier, Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents, Séminaire Bourbaki 885 (2000) 1–20.
[6] M. Hoang Ngoc, M. Petitot, J. Van Der Hoeven, Polylogarithms and shuffle algebra, in: FPSAC '98, Toronto, Canada, Juin 1998.
[7] J. Oesterlé, Polylogarithmes, Séminaire Bourbaki 762 (1992–1993).
[8] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, in: London Math. Soc. Monographs, vol. 7, Clarendon Press, Oxford Sci. Publications, 1993.
[9] E.A. Ulanskii, Identities for generalized polylogarithms, Math. Notes 73 (4) (2003) 571–581.
[10] Z. Wojtkowiak, Mixed Hodge structures and iterated integrals I, in: F. Bogomolov, L. Katzarkov (Eds.), Motives, Polylogarithms and Hodge Theory (I), International Press, 2002, pp. 121–208.
[11] Z. Wojtkowiak, A construction of analogs of the Bloch–Wigner function, Math. Scand. 65 (1) (1989) 140–142.
[12] D. Zagier, The Bloch–Wigner–Ramakrishnan polylogarithm function, Math. Ann. 286 (1–3) (1990) 613–624.
[13] D. Zagier, Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields, in: Proc. Texel Conf. on Arith. Alg. Geometry 1989, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 391–430.
[14] D. Zagier, H. Gangl, Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series, in: The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Proc. NATO Conf. Banff, 1998, pp. 561–615.
[15] http://www.fis.unipr.it/~stefanw/nestedsums/classnestedsums_1_1harmonic_polylog.html#4.