Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 443–446
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Nouvelles remarques sur l'analyticité des solutions milds des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$

Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset

Département de mathématiques, Université d'Evry, bd F. Mitterrand, 91025 Evry cedex, France

Reçu et accepté le 7 janvier 2004

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Nous donnons une nouvelle preuve élémentaire de l'analyticité en espace des solutions milds des équations de Navier–Stokes sur $\mathbb{R}^3$. ***Pour citer cet article : P.-G. Lemarié-Rieusset, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Further remarks on the analyticity of mild solutions for the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. We give a new simple proof that mild solutions for the Navier–Stokes equations on $\mathbb{R}^3$ are spatial analytic. ***To cite this article: P.-G. Lemarié-Rieusset, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

L'analyticité en la variable d'espace des solutions des équations de Navier–Stokes est bien comprise depuis les travaux de Masuda [7]. L'analyticité spatiale des solutions dans les espaces de Lebesgue a été récemment considérée par plusieurs auteurs (Grujič et Kukavica [4], Lemarié–Rieusset [5,6], Giga et Sawada [3]). La méthode que nous avions développée dans [5] se basait, comme dans l'approche de Foias et Temam [1], sur l'étude de l'opérateur

$$b_2(u,v)=\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{-t\Delta}}u\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{-t\Delta}}v\big).$$

Cependant, cet opérateur n'est pas facilement étudiable pour des données u et v dans des espaces L^p, et nous l'avions remplacé par l'opérateur

$$b_1(u,v)=\mathrm{e}^{\sqrt{t}\Lambda_1}\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{t}\Lambda_1}u\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{t}\Lambda_1}v\big),$$

où Λ_1 est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi_1|+|\xi_2|+|\xi_3|$. Sur une idée de Montgomery-Smith [8], nous remplaçons ici $\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}$ par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}$ avec $\|y\|\leqslant 1$, avec un gain évident :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}u\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}v\big)=uv.$$

Adresse e-mail : lemarie@maths.univ-evry.fr (P.-G. Lemarié-Rieusset).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.01.015

Cela nous permet de montrer pour un espace de Banach E assez général que la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Navier–Stokes sur tout l'espace asociée à une valeur initiale $\vec{u}_0 \in E^3$ a une solution qui satisfait sur un intervalle $]0, T[$ l'estimation $\sup_{0<t<T} \|e^{+\sqrt{-t\Delta}}\vec{u}(t,\cdot)\|_E < \infty$.

Nous considérons l'équation de Navier–Stokes sur tout l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \exists p \in \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^3) & \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}p, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où les derivées sont prises au sens des distributions. Nous étudions le problème de Cauchy avec valeur initiale dans un espace invariant par translation :

Définition 1. Un espace invariant de fonctions tests est un espace de Banach E de fonctions localement de carré intégrable tel que

(a) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et tout $f \in E$, $f(x - x_0) \in E$ et $\|f\|_E = \|f(x - x_0)\|_E$;
(b) il existe une constante $C_E \geqslant 0$ telle que pour tout $f \in E$ on a $\int_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|^2\,dx \leqslant C_E\|f\|_E^2$;
(c) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans E.

Une conséquence directe de (a) est (c) est le lemme suivant :

Lemme 1. *Si E est un espace invariant de fonctions tests, la convolution définit un opérateur bilinéaire continu de $E \times L^1$ vers E et on a, pour tout $f \in E$ et tout $g \in L^1$, $\|f * g\|_E \leqslant \|f\|_E\ \|g\|_1$.*

Pour une donnée initiale à divergence nulle $\vec{u}_0 \in E^3$, où E est un espace invariant de fonctions tests, on cherche une solution $\vec{u}$ de (1) avec $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T[, E^3)$ et $\vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0$. Un résultat de Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo [2] nous permet d'utiliser le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ sur les champs de vecteurs à divergence nulle et de réécrire l'Éq. (1) de manière équivalente en

$$\vec{u} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u})\,ds. \tag{2}$$

La méthode des itérations de Picard fournit alors une méthode simple pour rechercher des solutions de l'Éq. (2). On définit l'opérateur bilinéaire B par

$$B(\vec{u},\vec{v}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{v})\,ds. \tag{3}$$

Si B est continu sur $(\mathcal{E}_T)^3$, où $\mathcal{E}_T$ est un espace de Banach de fonctions sur $]0, T[\times\mathbb{R}^3$:

$$\left\|B(\vec{u},\vec{v})\right\|_{\mathcal{E}_T} \leqslant C_0\|\vec{u}\|_{\mathcal{E}_T}\|\vec{v}\|_{\mathcal{E}_T}, \tag{4}$$

alors, pour toute donnée initiale à divergence nulle $\vec{u}_0$ qui satisfait que $(e^{t\Delta}\vec{u}_0)_{0<t<T}$ appartient à $\mathcal{E}_T$ avec $\|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{\mathcal{E}_T} \leqslant 1/(4C_0)$, on peut construire une solution de (2) en définissant par récurrence $\vec{u}_{(0)} = 0$ et $\vec{u}_{(n+1)} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - B(\vec{u}_{(n)}, \vec{u}_{(n)})$; la suite $\vec{u}_{(n)}$ converge vers une solution $\vec{u}$ de (2). De telles solutions sont usuellement appelées des solutions milds de (1) [6].

Théorème 1. *Soit E un espace invariant de fonctions tests. On suppose de plus qu'il existe un second espace invariant de fonctions tests G tel que*

(H1) *le produit ponctuel est un opérateur bilinéaire continu de $G \times G$ vers E.*

(H2) *Pour $t>0$, $\mathrm{e}^{t\Delta}$ est continu de E vers G et il existe $C\geqslant 0$ et $\alpha\in[0,1/2]$ tel que pour tout $f\in E$ on a*

$$\left\|\mathrm{e}^{t\Delta}f\right\|_G\leqslant Ct^{-\alpha/2}\|f\|_E. \tag{5}$$

Pour $T\in\,]0,+\infty]$, on définit $\mathcal{E}_T$ l'espace des fonctions continues de $]0,T[$ vers G qui vérifient

$$\sup_{0<t<T}\sup_{\|y\|\leqslant 4}t^{\alpha/2}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}f(t,\cdot)\right\|_G<\infty\quad et\quad \lim_{t\to 0}\sup_{\|y\|\leqslant 4}t^{\alpha/2}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}f(t,\cdot)\right\|_G=0,$$

normé par $\|f\|_{\mathcal{E}_T}=\sup_{0<t<T}\sup_{\|y\|\leqslant 4}t^{\alpha/2}\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}f(t,\cdot)\|_G$.

Alors, pour tout $T<+\infty$ ($\alpha<1/2$) ou tout $T\leqslant+\infty$ ($\alpha=1/2$), l'opérateur bilinéaire B est continu de $(\mathcal{E}_T)^3\times(\mathcal{E}_T)^3$ vers $(\mathcal{E}_T)^3$. Plus précisément, on a

$$\sup_{0<t<T}\sup_{\|y\|\leqslant 4}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}B(\vec{u},\vec{v})(t,\cdot)\right\|_E+\left\|B(\vec{u},\vec{v})\right\|_{\mathcal{E}_T}\leqslant C_1T^{1/2-\alpha}\|\vec{u}\|_{\mathcal{E}_T}\|\vec{v}\|_{\mathcal{E}_T}, \tag{6}$$

où C_1 ne dépend pas de T, de $\vec{u}$ ni de $\vec{v}$.

De plus, $\|\mathrm{e}^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{\mathcal{E}_T}\leqslant C_2\|\vec{u}_0\|_E$, de sorte que l'Éq. (2) *a une solution sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ pour T assez petit* (*ou pour $T=\infty$ si $\alpha=1/2$ et que $\|\vec{u}_0\|_E$ est assez petite*)*, telle que $\vec{u}\in\mathcal{C}([0,T[,E^3)$ et* $\sup_{0<t<T}\sup_{\|y\|\leqslant 4}\|\mathrm{e}^{i\sqrt{t}\,y\cdot\vec{\nabla}}\vec{u}(t,\cdot)\|_E<\infty$.

Démonstration. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans G^3, $\|y\|\leqslant 4$ et $0<s<t$, on cherche à estimer la norme de $A_y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}\,\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{v})$ qu'on réécrit en

$$A_y=\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}\circ\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{t}-\sqrt{s})y\cdot\vec{\nabla}}\circ\left(\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot\right)\circ\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{s}y\cdot\vec{\nabla}}\vec{u}\otimes\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{s}y\cdot\vec{\nabla}}\vec{v}\right). \tag{7}$$

L'opérateur $\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}$ est une contraction sur E et sur G, et envoie G sur E avec une norme $\mathrm{O}((t-s)^{-\alpha/2})$. L'opérateur de convolution $\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{t}-\sqrt{s})y\cdot\vec{\nabla}}$ a un noyau intégrable dont la norme L^1 vaut $\mathrm{e}^{\|y\|^2(\sqrt{t}-\sqrt{s})^2/(t-s)}$ (qui reste inférieur à $\mathrm{e}^{\|y\|^2}$). Enfin, $\mathrm{e}^{(t-s)\Delta/4}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot$ est une matrice d'opérateurs de convolution avec des noyaux intégrables dont la norme L^1 est $\mathrm{O}(1/(\sqrt{t-s}))$. On obtient

$$\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}\,\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{v})\right\|_E\leqslant C\,\mathrm{e}^{\|y\|^2}(t-s)^{-1/2}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{s}y\cdot\vec{\nabla}}\vec{u}(s,\cdot)\right\|_G\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{s}y\cdot\vec{\nabla}}\vec{v}(s,\cdot)\right\|_G, \tag{8}$$

$$\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}\,\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{v})\right\|_G\leqslant C\,\mathrm{e}^{\|y\|^2}(t-s)^{-(1+\alpha)/2}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{s}y\cdot\vec{\nabla}}\vec{u}(s,\cdot)\right\|_G\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{s}y\cdot\vec{\nabla}}\vec{v}(s,\cdot)\right\|_G. \tag{9}$$

En intégrant (8) et (9), on obtient l'inégalité (6).

Pour finir, il suffit d'écrire que $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}y\cdot\vec{\nabla}}\,\mathrm{e}^{t\Delta}\vec{u}_0\|_G\leqslant\mathrm{e}^{\|y\|^2}\|\,\mathrm{e}^{3t\Delta/4}\vec{u}_0\|_G$ pour conclure. □

On peut assez facilement en déduire l'estimation $\sup_{0<t<T}\|\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}\vec{u}\|_E<\infty$:

Théorème 2. *Soit E un espace invariant de fonctions tests. Alors il existe une constante C telle que, pour tout $f\in E$, on a*

$$\left\|\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}f\right\|_E\leqslant C\sup_{\|y\|\leqslant 4}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{t}\,y\cdot\vec{\nabla}}f\right\|_E. \tag{10}$$

Démonstration. On note, pour $j\in\{1,2,3\}$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$, $\Omega_{j,\varepsilon}=\{\xi\in S^2\mid\varepsilon\ \xi_j>1/2\}$. À une partition de l'unité $1=\sum_{j=1}^3\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}}\omega_{j,\varepsilon}$ où la fonction $\omega_{j,\varepsilon}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur S^2 et à support compact dans $\Omega_{j,\varepsilon}$, on associe les multiplicateurs de Fourier $\omega_{j,\varepsilon}(D)$ de symbole $\omega_{j,\varepsilon}(\frac{\xi}{\|\xi\|})$. On considère également $\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ avec $\theta(\xi)=1$ pour $\|\xi\|\leqslant 1$ et 0 for $\|\xi\|\geqslant 2$, et on lui associe le multiplicateur de Fourier $\theta(\sqrt{t}D)$, de symbole $\theta(\sqrt{t}\xi)$. On écrit

$$\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}f=\theta(\sqrt{t}D)\,\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}f+\sum_{j=1}^3\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}}\left(\mathrm{Id}-\theta(\sqrt{t}D)\right)\omega_{j,\varepsilon}(D)\,\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{t}\,4\partial_j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{t}\,4\partial_j}f. \tag{11}$$

Or l'opérateur $(\mathrm{Id} - \theta(\sqrt{t}D))\omega_{j,\varepsilon}(D)\,\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{t}\,4\partial_j}$ est un opérateur de convolution avec un noyau $K_{j,\varepsilon,t}(x) = \frac{1}{t^{3/2}}K_{j,\varepsilon}(\frac{x}{\sqrt{t}})$, où $K_{j,\varepsilon}$ appartient à la classe de Schwartz. Par ailleurs, $\theta(\sqrt{t}D)\,\mathrm{e}^{\sqrt{-t\Delta}}$ est un opérateur de convolution avec un noyau $K_t(x) = \frac{1}{t^{3/2}}K(\frac{x}{\sqrt{t}})$, où

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \theta(\xi)\,\mathrm{e}^{\|\xi\|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{12}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^3$ avec $|\alpha| \leqslant 3$, il est immédiat que $x^\alpha K(x)$ est une fonction bornée, puisque $\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}(\theta(\xi)\,\mathrm{e}^{\|\xi\|})$ est intégrable :

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\big(\theta(\xi)\,\mathrm{e}^{\|\xi\|}\big)\right| \leqslant C_\alpha\|\xi\|^{-2}\chi_{\|\xi\|<2}. \tag{13}$$

Pour $R \in]0,1]$, on pose $f_{\alpha,R} = \theta(\frac{D}{R})(x^\alpha K)$ et $g_{\alpha,R} = (1-\omega(\frac{D}{R}))(x^\alpha K)$. Comme la fonction $\|\xi\|^{-2}\chi_{\|\xi\|<2}$ appartient à $L^{3/2,\infty}$, on voit que $\|f_{\alpha,R}\| \leqslant C\|\theta(\frac{\xi}{R})\|_{L^{3,1}} \leqslant C'R^{1/3}$. Par ailleurs, pour $j = 1,\ldots,3$, on a

$$\left|x_j g_{\alpha,R}(x)\right| \leqslant C\int\limits_{R\leqslant|\xi|\leqslant 2}\left(\|\xi\|^{-3} + \frac{\|\xi\|^{-2}}{R}\right)\mathrm{d}\xi \leqslant C'\frac{\int_{|\xi|\leqslant 2}\|\xi\|^{-2}\,\mathrm{d}\xi}{R}.$$

Pour $|x| \geqslant 1$ et $R = |x|^{-3/4}$, on trouve $|x^\alpha K(x)| \leqslant C|x|^{-1/4}$.

On obtient finalement que $|K(x)| \leqslant C\frac{1}{(1+\|x\|)^{13/4}}$ et donc $\int |K(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. $\square$

On vérifie facilement qu'on peut appliquer ces résultats aux espaces suivants :

- espaces de Lebesgue : $E = L^p$ avec $3 \leqslant p < \infty$ (on a $G = L^{2p}$ et $\alpha = 3/(2p)$),
- espaces de Sobolev homogènes : $E = \dot{W}^{1,p} = \{f \in L^{3p/(3-p)} \mid \vec{\nabla} f \in (L^p)^3\}$ pour $1 < p < 3$ (avec $G = \dot{W}^{1,r}$ où $1/r = \frac{1}{2}(1/p + 1/3)$ et $\alpha = \frac{3}{2}(1/p - 1/3)$),
- espaces de Sobolev : $E = W^{1,p}$ pour $3/2 \leqslant p < \infty$ (avec $G = W^{1,r}$ où $1/r = \frac{1}{2}(1/p+1/3)$ et $\alpha = \frac{3}{2}(1/p - 1/3)$ si $3/2 \leqslant p < 3$ et $r = 2p$ et $\alpha = 3/(2p)$ si $3 \leqslant p < \infty$).

Références

[1] C. Foias, R. Temam, Gevrey class regularity for the solutions of the Navier–Stokes equations, J. Funct. Anal. 87 (1989) 359–369.

[2] G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ and d'autres espaces limites pour Navier–Stokes, Rev. Mat. Iberoamericana 16 (2000) 605–667.

[3] Y. Giga, O. Sawada, On regularizing-decay rate estimate for solutions to the Navier–Stokes initial value problem, Nonlinear Anal. Appl. (2003) à paraître.

[4] Z. Grujič, I. Kukavica, Space analyticity for the Navier–Stokes and related equations with initial data in L^p, J. Func. Anal. 152 (1998) 247–466.

[5] P.G. Lemarié-Rieusset, Une remarque sur l'analyticité des solutions milds des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 330 (2000) 183–186.

[6] P.G. Lemarié-Rieusset, Recent Developments in the Navier–Stokes Problem, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[7] K. Masuda, On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier–Stokes equation, Proc. Japan Acad. 43 (1967) 827–832.

[8] S. Montgomery-Smith, Communication personnelle.