Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 471–476
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle

Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent

Jean-Michel Bismut

Département de mathématique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 5 janvier 2004 ; accepté le 6 janvier 2004

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

Dans cette Note, on annonce une construction d'une déformation de la théorie de Hodge. On construit en particulier l'adjoint de l'opérateur de de Rham sur le fibré cotangent relativement à une forme hermitienne de signature non triviale. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

A deformation of Hodge theory on the cotangent bundle. In this Note, we announce the construction of a natural deformation of Hodge theory. In particular we obtain the adjoint of the de Rham operator on the cotangent bundle with respect to a hermitian form of nontrivial signature. ***To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Les constructions annoncées dans cette note et dans les notes [2,3] ont plusieurs motivations. Rappelons que si X est une variété compacte et si $f : X \to \mathbf{R}$ est une fonction C^∞ de Morse, Witten [15] a construit une déformation du complexe de de Rham de X dépendant d'un paramètre $T \in \mathbf{R}$. Quand $T \to +\infty$, le complexe déformé converge en un sens adéquat vers le complexe de Thom–Smale associé au champ de gradient ∇f, par localisation sur les points critiques de f. Ce résultat a été établi rigoureusement dans [8]. Dans [5,6], la déformation de Witten a été utilisée pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Cheeger et Müller [7,13] sur l'égalité de la torsion de Ray–Singer et de la torsion de Reidemeister.

Une première motivation pour notre travail est de chercher à étendre la construction de Witten quand X est remplacé par son espace de lacets LX, et quand f est remplacée par I, qui est la fonctionnelle d'énergie sur LX, dont les points critiques sont les géodésiques fermées. Un tel projet est immédiatement voué à l'échec, vu l'absence d'une théorie de Hodge convenable sur LX.

Une réflexion sur la preuve de [5,6] conduit à l'idée qu'au moins formellement, l'introduction de la fonction de Morse f est réalisée au niveau de l'intégrale fonctionnelle sur LX qui représente les quantités calculées, par

Adresse e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.01.012

l'intermédiaire de formes d'Euler de Mathai–Quillen [12] associées au gradient de la fonction $\int_0^1 f(x_s)\,\mathrm{d}s$. Cette fonction est l'extension naturelle de f en une fonction sur LX invariante sous l'action évidente de S_1. De ce point de vue, la localisation sur les points critiques de f n'est que le versant analytique de l'assertion géométrique sur les formes de Mathai–Quillen, qui se localisent naturellement sur les zéros des sections qui les définissent.

Plutôt que de produire une déformation de Witten sur LX, on peut se demander comment construire rigoureusement un objet dont la contrepartie, du point de vue de l'intégrale fonctionnelle, ferait apparaître la forme de Mathai–Quillen associée à la fonctionnelle d'énergie, et plus généralement à n'importe quelle fonctionnelle du type $I(x) = \int_0^1 L(x,\dot{x})\,\mathrm{d}t$, où $L(x,\dot{x})$ est un lagrangien, qu'on peut supposer du type

$$L(x,\dot{x}) = \frac{a}{2}|\dot{x}|^2 - V(x). \tag{1}$$

L'intérêt d'une telle construction serait que, pour de grandes valeurs du paramètre de déformation, l'intégrale se localiserait sur les points critiques de la fonctionnelle I, qui pour $a = 1$, $V = 0$, sont exactement les géodésiques fermées de X. Dans ce cas, $\nabla I = -\ddot{x}$. L'intégrale fonctionnelle construite dans ce formalisme serait alors associée à une action du type

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}|^2\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}T^2\int_0^1 |\ddot{x}|^2\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Pour $T \neq 0$, une telle action est associée à un processus x dont la vitesse est un mouvement Brownien. Le processus de Markov correspondant $(x,p) = (x,\dot{x})$ est à valeurs dans T^*X, et son générateur n'est plus autoadjoint, à cause du renversement de la vitesse p en $-p$ par retournement du temps. De plus la mesure de probabilité associée est singulière relativement à la mesure brownienne. La solution fondamentale associée à un tel processus a été construite par Kolmogorov [11] dans le cas $X = \mathbf{R}$.

On annonce dans cette Note et dans la note [2] qu'on peut réaliser cette construction en remplaçant X par le fibré cotangent T^*X, en prenant l'adjoint de l'opérateur de de Rham relativement à une forme bilinéaire faisant intervenir la forme symplectique de T^*X. Pour $T = b^2$, le Laplacien associé $\mathcal{L}_b$ est tel que $\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{L}_b$ est hypoelliptique, grâce aux résultats de Hörmander [9]. Ce laplacien reste autoadjoint relativement à une forme hermitienne non dégénérée, qui n'est plus positive. On ne doit donc plus s'attendre à ce que le théorème de Hodge soit vrai, comme le montrent les résultats qui suivent relativement à la théorie de Hodge en dimension finie. Dans un travail mené avec Lebeau [4], on verra que les résultats en dimension finie s'étendent effectivement à notre opérateur. De plus le Laplacien interpole naturellement entre le laplacien de Hodge ordinaire de X pour $b = 0$, et le flot géodésique pour $b = +\infty$.

Dans la présente Note, on donne des résultats de théorie de Hodge en dimension finie, lorsqu'on suppose que le complexe hermitien considéré est muni d'une forme hermitienne non nécessairement positive. On construit l'adjoint de l'opérateur de de Rham d^{T^*X} sur T^*X relativement à des formes sesquilinéaires non triviales. Dans les notes [2,3], on donne des propriétés du Laplacien correspondant, et on étudie le cas d'une famille de variétés X.

Les résultats annoncés sont démontrés dans [1].

2. La théorie de Hodge pour des formes hermitiennes arbitraires

Soit

$$(E^{\cdot},\partial): 0 \to E^1 \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} E^n \to 0 \tag{3}$$

un complexe d'espaces vectoriels complexes de dimension finie. On note $h^{E^{\cdot}} = \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant n} h^{E^i}$ une forme hermitienne non dégénérée sur $E^{\cdot} = \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant n} E^i$. En particulier h^E est de signature arbitraire. On dira aussi que h^E est une métrique généralisée sur $E^{\cdot}$. Si $A \in \mathrm{End}(E)$, A^* désigne l'adjoint de A relativement à h^E.

On pose

$$D = \partial + \partial^*. \tag{4}$$

L'opérateur D et le Laplacien généralisé $D^2 = [\partial, \partial^*]$ sont autoadjoints relativement à h^E. Il en résulte que les spectres $\operatorname{Sp} D$ et $\operatorname{Sp} D^2$ sont invariants par conjugaison. Soit

$$E^{\cdot} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} D^2} E^{\cdot}_{\lambda} \tag{5}$$

la décomposition de E en blocs de Jordan relativement à D^2. On pose

$$E^{\cdot}_* = \bigoplus_{\lambda \neq 0} E^{\cdot}_{\lambda}. \tag{6}$$

Alors le complexe $E^{\cdot}$ est scindé de manière h^E orthogonale sous la forme

$$E^{\cdot} = E^{\cdot}_0 \oplus E^{\cdot}_*. \tag{7}$$

Le complexe $(E^{\cdot}_*, \partial)$ est acyclique. De plus

$$E^{\cdot}_* = \operatorname{Im} \partial|_{E^{\cdot}_*} \oplus \operatorname{Im} \partial^*|_{E^{\cdot}_*}, \tag{8}$$

et la décomposition (8) est h^E-orthogonale. Notons que en général, contrairement à ce qui se passe habituellement en théorie de Hodge, le complexe $(E^{\cdot}_0, \partial)$ est nontrivial. Il se peut même que $D^2 = 0$, auquel cas $E^{\cdot} = E^{\cdot}_0$. On a cependant

$$H^{\cdot}(E) = H^{\cdot}(E^{\cdot}_0). \tag{9}$$

On dit que h^E est de type Hodge si

$$E^{\cdot}_0 = \ker \partial \cap \ker \partial^*, \tag{10}$$

ou si, de manière équivalente,

$$E^{\cdot}_0 = \ker D, \tag{11}$$

Une forme équivalente de la condition de Hodge est que

$$E^{\cdot} = (\ker \partial \cap \ker \partial^*) \oplus \operatorname{Im} \partial \oplus \operatorname{Im} \partial^*. \tag{12}$$

Les produits hermitiens habituels sur E sont naturellement de type Hodge.

On pose

$$\det E^{\cdot} = \bigotimes_{0 \leqslant i \leqslant n} \left(\det E^i\right)^{(-1)^i}, \qquad \det H^{\cdot}(E^{\cdot}) = \bigotimes_{0 \leqslant i \leqslant n} \left(\det H^i(E^{\cdot})\right)^{(-1)^i}. \tag{13}$$

Alors par [10], on a l'isomorphisme canonique $\det E^{\cdot} \simeq \det H^{\cdot}(E^{\cdot})$. Soit $\det h^{E^{\cdot}}$ la métrique généralisée sur $\det E^{\cdot}$ associée à $h^{E^{\cdot}}$. Elle sera notée, par abus de notation, sous la forme $\|\cdot\|^2_{\det E^{\cdot}}$. Cette métrique généralisée a maintenant un signe.

Notons que la restriction de $h^{E^{\cdot}}$ à $E^{\cdot}_0$ est une métrique généralisée. Elle induit donc une métrique généralisée sur $\det E^{\cdot}_0$, qu'on note $\|\cdot\|^2_{\det E^{\cdot}_0}$. Notons que comme $\det E^{\cdot} \simeq \det E^{\cdot}_0$, on a ainsi deux métriques généralisées sur $\det E^{\cdot}$.

On pose

$$S\left(E, h^{E^{\cdot}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\det D^2|_{E^i_*}\right)^{(-1)^i i}. \tag{14}$$

Le réel $S(E, h^{E^\cdot})$ sera appelé torsion analytique généralisée. Son signe est arbitraire. On a alors la relation qui étend une formule bien connue pour les métriques hermitiennes classiques,

$$\|\cdot\|^2_{\det E^\cdot} = S\big(E, h^{E^\cdot}\big)\|\cdot\|^2_{\det E_0^\cdot}. \tag{15}$$

Les arguments de Quillen [14] sur la construction de la métrique de Quillen par troncation du spectre doivent être convenablement modifiés. Soit en effet $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}\, D^2$. Si $\mu \neq \bar{\lambda}$, il résulte de ce qui précède que $E^\cdot_\lambda$ et $E^\cdot_\mu$ sont $h^{E^\cdot}$ orthogonaux. De plus la restriction de $h^{E^\cdot}$ à $E^\cdot_\lambda + E^\cdot_{\bar{\lambda}}$ est non dégénérée.

Soit alors $r \in \mathbf{R}$ tel que si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, D^2$, alors $|\lambda| \neq r$. Posons

$$E^\cdot_{<r} = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}\, D^2\\ |\lambda| < r}} E^\cdot_\lambda, \qquad E^\cdot_{>r} = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}\, D^2\\ |\lambda| > r}} E^\cdot_\lambda. \tag{16}$$

Alors les $E^\cdot_{<r}, E^\cdot_{>r}$ sont des sous-complexes $h^{E^\cdot}$ orthogonaux dans E, et leur somme est égale à $E^\cdot$. En particulier la restriction de $h^{E^\cdot}$ à chacun d'entre eux est non dégénérée. On peut donc adapter ces arguments de Quillen dans ce contexte quand $(E^\cdot, \partial)$ est un fibré vectoriel sur une variété S. Comme dans Quillen [14], ces arguments doivent ultérieurement être appliqués dans un cas où $E^\cdot$ est de dimension infinie.

3. L'adjoint de l'opérateur de de Rham relativement à une forme bilinéaire

Soit M une variété, soit η une forme bilinéaire non dégénérée sur TM. Alors η induit une identification $\phi : TM \to T^*M$, de telle sorte que

$$\eta(U, V) = \langle U, \phi V\rangle. \tag{17}$$

On note η^* la forme bilinéaire correspondante sur T^*M. Alors η^* induite une forme bilinéaire correspondante sur $\Lambda^\cdot(T^*M)$. Soit dv_M une forme volume sur M.

Soit $(\Omega^\cdot(M), d^M)$ le complexe de de Rham des formes à support compact dans M. On munit $\Omega^\cdot(M)$ de la forme bilinéaire non dégénérée,

$$\langle s, s'\rangle_\phi = \int_M \eta^*(s, s')\,\mathrm{d}v_M. \tag{18}$$

Notons que la forme (18) n'est en général pas symétrique.

Soit $\bar{d}^M_\phi$ l'adjoint formel de d^M relativement à (18), de telle sorte que si $s, s' \in \Omega^\cdot(M)$,

$$\big\langle s, d^M s'\big\rangle_\phi = \big\langle \bar{d}^M s, s'\big\rangle_\phi. \tag{19}$$

Si η est associée à une forme symplectique ω sur M, on montre que

$$\big[d^M, \bar{d}^M_\phi\big] = 0. \tag{20}$$

Plus généralement, si F est un fibré complexe plat sur M, muni d'une métrique hermitienne, on peut munir le complexe de de Rham $(\Omega^\cdot(M, F), d^M)$ d'une forme sesquilinéaire, qui est l'extension évidente de (18). On désigne encore par $\bar{d}^M_\phi$ l'adjoint de d^M.

4. Le cas du fibré cotangent

Soit X une variété compacte de dimension n, et soit $\pi : T^*X \to X$ son fibré cotangent. Soit $\theta = \pi^* p$ la 1-forme canonique de T^*X, et soit $\omega = \mathrm{d}\theta$ la forme symplectique de T^*X. Alors T^*X est muni de la forme volume associée $\mathrm{d}v_{T^*X}$.

Soit F un fibré plat hermitien sur X. On pose

$$\omega\big(\nabla^F, g^F\big) = \big(g^F\big)^{-1}\nabla^F g^F. \tag{21}$$

Alors $\omega(\nabla^F, g^F)$ est une 1-forme sur X à valeurs dans $\mathrm{End}(F)$.

On peut alors appliquer la construction de la Section 3 à $(\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F), d^{T^*X})$, pour $\eta = \omega$. Dans ce cas, on désigne par $\bar{d}^{T^*X}$ l'adjoint de d^{T^*X}. Cet adjoint sera aussi appelé adjoint symplectique. Si $\omega\big(\nabla^F, g^F\big) = 0$, d'après ce qui précède on a $[d^{T^*X}, \bar{d}^{T^*X}] = 0$. En général, l'opérateur $[d^{T^*X}, \bar{d}^{T^*X}]$ est d'ordre 0.

Pour poursuivre la construction, on introduit une métrique Riemannienne g^{TX} sur TX. Si nécessaire, on identifie les fibres de TX et T^*X par g^{TX}. Soit ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita sur TX. La connexion ∇^{TX} induit les scindages,

$$TT^*X = \pi^*(TX \oplus T^*X), \qquad T^*T^*X = \pi^*(T^*X \oplus TX). \tag{22}$$

On en déduit l'identification,

$$\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X) = \pi^*\big(\Lambda^{\cdot}(T^*X)\,\widehat{\otimes}\,\Lambda^{\cdot}(TX)\big). \tag{23}$$

On notera avec un $\widehat{\ }$ les objets se rapportant aux deuxième facteur à droite de (23). Soit $\nabla^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)}$ la connexion induite par ∇^{TX} sur $\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)$.

On pose

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

On identifie ϕ à un automorphisme de $TT^*X = TX \oplus T^*X$. La forme bilinéaire η correspondante sur TT^*X est donnée par

$$U, V \to \eta(U, V) = \langle \pi_* U, \pi_* V\rangle_{g^{TX}} + \omega(U, V). \tag{25}$$

Soit $\mathcal{H}: T^*X \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞. Soit $Y^{\mathcal{H}}$ le champ de vecteurs hamiltonien sur T^*X associé à $\mathcal{H}$, de telle sorte que

$$d^{T^*X}\mathcal{H} + i_{Y^{\mathcal{H}}}\omega = 0. \tag{26}$$

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormale de TX, soit $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n$ la base duale correspondante de T^*X. On pose $\widehat{\nabla^V \mathcal{H}} = \nabla_{\hat{e}^i}\mathcal{H}\hat{e}^i$.

Définition 4.1. Soit $\bar{d}_\phi^{T^*X}$ l'adjoint de d^{T^*X} relativement à η, g^F et dv_{T^*X}. On pose

$$\begin{aligned} &d_{\mathcal{H}}^{T^*X} = e^{-\mathcal{H}} d^{T^*X} e^{\mathcal{H}}, && \bar{d}_{\phi,\mathcal{H}}^{T^*X} = e^{\mathcal{H}} \bar{d}_\phi^{T^*X} e^{-\mathcal{H}}, \\ &\lambda_0 = e^i \wedge i_{\hat{e}^i}, && \delta^{T^*X,V} = -i_{\hat{e}^i}\nabla_{\hat{e}^i}. \end{aligned} \tag{27}$$

Proposition 4.2. *On a les identités suivantes,*

$$\begin{aligned} &d_{\mathcal{H}}^{T^*X} = d^{T^*X} + d^{T^*X}\mathcal{H}, \\ &\bar{d}_{\phi,\mathcal{H}}^{T^*X} = \bar{d}^{T^*X} - i_{Y^{\mathcal{H}}} - \big[\bar{d}^{T^*X} - i_{Y^{\mathcal{H}}}, \lambda_0\big] = \bar{d}^{T^*X} - i_{Y^{\mathcal{H}} - \widehat{\nabla^V \mathcal{H}}} + \delta^{T^*X,V}. \end{aligned} \tag{28}$$

5. Une propriété d'autoadjonction

On pose

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Alors f définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$, et F est une involution isométrique de $\mathbf{R}^2$. On identifie f à un produit scalaire $\mathfrak{g}^{\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)}$ sur $TT^*X = TX \oplus T^*X$, et F à l'involution correspondante de TT^*X. On suppose $\mathcal{H}$ invariant par l'involution $p \to -p$.

Définition 5.1. Soit $\langle\cdot\rangle_{\mathfrak{g}^{\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)}}$ le produit Hermitien sur $\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$ associé à $\mathfrak{g}^{TT^*X}$, g^F et dv_{T^*X}. Soit u l'involution isométrique de $\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$ telle que si $s \in \Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$,

$$us(x,p) = Fs(x,-p). \tag{30}$$

Soit $\langle\cdot\rangle_{\mathfrak{h}^{\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)}}$ la forme hermitienne sur $\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$,

$$\langle s,s'\rangle_{\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)}} = \big\langle us, s'\,\mathrm{e}^{-2\mathcal{H}}\big\rangle_{\mathfrak{g}^{\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)}}. \tag{31}$$

Notons que cette forme hermitienne est aussi loin qu'il est possible d'une métrique hermitienne. Notons enfin que contrairement à (18), elle a la propriété de symétrie qui en fait effectivement une forme hermitienne.

Théorème 5.2. *L'opérateur $\bar{d}^{T^*X}_{\phi,2\mathcal{H}}$ est l'adjoint formel de d^{T^*X} pour $\langle\cdot\rangle_{\mathfrak{h}^{\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)}}$.*

Remerciements

L'auteur remercie Gilles Lebeau pour de très nombreuses discussions, ainsi que Viviane Baladi et Yves Le Jan.

Références

[1] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle (2004) à paraître.
[2] J.-M. Bismut, Le laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004) sous presse.
[3] J.-M. Bismut, Une déformation en famille du complexe de de Rham-Hodge, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004) sous presse.
[4] J.-M. Bismut, G. Lebeau, The analysis of the hypoelliptic Laplacian (2004) à paraître.
[5] J.-M. Bismut, W. Zhang, An extension of a theorem by Cheeger and Müller, Astérisque (205) (1992) 235. With an appendix by François Laudenbach.
[6] J.-M. Bismut, W. Zhang, Milnor and Ray–Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle, Geom. Funct. Anal. 4 (2) (1994) 136–212.
[7] J. Cheeger, Analytic torsion and the heat equation, Ann. of Math. (2) 109 (2) (1979) 259–322.
[8] B. Helffer, J. Sjöstrand, Puits multiples en mécanique semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten, Comm. Partial Differential Equations 10 (3) (1985) 245–340.
[9] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967) 147–171.
[10] F.F. Knudsen, D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on "det" and "Div", Math. Scand. 39 (1) (1976) 19–55.
[11] A. Kolmogoroff, Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung), Ann. of Math. (2) 35 (1) (1934) 116–117.
[12] V. Mathai, D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, Topology 25 (1) (1986) 85–110.
[13] W. Müller, Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds, Adv. in Math. 28 (3) (1978) 233–305.
[14] D. Quillen, Determinants of Cauchy–Riemann operators on Riemann surfaces, Funct. Anal. Appl. 19 (1) (1985) 31–34.
[15] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Differential Geom. 17 (4) (1983) 661–692.