Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 365–368

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse complexe

Estimées C^k pour l'équation $\bar\partial_b$ sur un convexe de type fini de $\mathbb{C}^n$

William Alexandre

Université du Littoral Côte d'Opale, centre universitaire de la mi-voix, maison de la recherche Blaise Pascal, 50, rue F. Buisson, BP 699, 62228 Calais cedex, France

Reçu le 5 juin 2003 ; accepté après révision le 7 janvier 2004

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Soit $q=1,\dots,n-1$, $D\subset\mathbb{C}^n$ un domaine convexe, borné et de type fini m. Grâce à la fonction de support de Diederich–Fornæss et à l'estimation de ses dérivées avec les bases ε-extrémales, nous montrons l'existence et la continuité de deux opérateurs $T_q : C^p_{0,q}(bD)\to C^{p+1/m}_{0,q-1}(bD)$ et $\widetilde{T}_q : C^p_{0,q}(bD)\to C^{p+1/m}_{0,q-1}(bD)$, $p\in\mathbb{N}$, tels que pour toute $(0,q)$-forme h continue sur bD, $h=\bar\partial_b(T_q-\widetilde{T}_q)h+(T_{q+1}-\widetilde{T}_{q+1})\bar\partial_b h$ dès que $\bar\partial_b h$ est aussi continue, et lorsque $q=n-1$, $\int_{bD} h\wedge\phi=0$ pour tout $\phi\in C^\infty_{n,0}(bD)$ $\bar\partial_b$-fermée. Afin d'établir la continuité de T_q pour les $p>0$, il faudra intégrer par parties et montrer de bonnes estimées des dérivées tangentielles du noyau. Quant à $\widetilde{T}_q$, la composante normale en z du noyau ayant un mauvais comportement, nous devrons l'isoler des composantes tangentielles afin de trouver un bon représentant de la classe d'équivalence, puis encore intégrer par parties. ***Pour citer cet article : W. Alexandre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

C^k estimates for $\bar\partial_b$ on convex finite type domains in $\mathbb{C}^n$. Let $q=1,\dots,n-1$ and D be a bounded convex domain in $\mathbb{C}^n$ of finite type m. We construct two integral operators T_q and $\widetilde{T}_q$ such that for all $p\in\mathbb{N}$, $T_q,\widetilde{T}_q : C^p_{0,q}(bD)\to C^{p+1/m}_{0,q-1}(bD)$ are continuous, and for all $(0,q)$-forms h continuous on bD with $\bar\partial_b h$ continuous on bD too, with the additional hypothesis when $q=n-1$ that $\int_{bD} h\wedge\phi=0$ for all $\phi\in C^\infty_{n,0}(bD)$ $\bar\partial_b$-fermée, we show $h=\bar\partial_b(T_q-\widetilde{T}_q)h+(T_{q+1}-\widetilde{T}_{q+1})\bar\partial_b h$. For this construction, we use the Diederich–Fornæss support function of Alexandre (Publ. IRMA Lille 54 (III) (2001)). To prove the continuity of T_q, we integrate by parts and take care of the tangential derivatives. The normal component in z of the kernel of $\widetilde{T}_q$ will have a bad behaviour, so, in order to find a good representative of its equivalence class, we isolate the tangential component of the kernel and then integrate by parts again. ***To cite this article: W. Alexandre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Soient D un domaine convexe relativement compact de $\mathbb{C}^n$, de type fini m, r une fonction définissante globale de D, C^∞ et convexe sur $\mathbb{C}^n$, de gradient non nul dans un voisinage U de bD. Soit encore S la fonction de support de Diederich–Fornæss construite dans [4] et $Q=(Q_1,\dots,Q_n)$, l'application définie dans [3] qui satisfait

Adresse e-mail : alexandr@lmpa.univ-littoral.fr (W. Alexandre).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.01.005

$S(\zeta,z)=\sum_{j=1}^n Q_j(\zeta,z)(\zeta_j-z_j)$. Bien qu'il faille utiliser une version globalisée de S (voir [1]), pour ne pas compliquer les notations, nous la garderons ainsi.

Nous notons $\widetilde{S}$ la fonction définie par $\widetilde{S}(\zeta,z)=S(z,\zeta)$, $\widetilde{Q}(\zeta,z)=-Q(z,\zeta)$ puis posons : $\eta(z,\zeta,\lambda)=\sum_{j=1}^n((1-\lambda)\frac{\overline{\zeta_j-z_j}}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q_j(\zeta,z)}{S(\zeta,z)})\,\mathrm{d}\zeta_j$ et $\tilde{\eta}(z,\zeta,\lambda)=(1-\lambda)\sum_{j=1}^n\frac{\overline{\zeta_j-z_j}}{|\zeta-z|^2}\,\mathrm{d}\zeta_j+\lambda\sum_{j=1}^n\frac{\widetilde{Q}_j(\zeta,z)}{\widetilde{S}(\zeta,z)}\,\mathrm{d}\zeta_j$, $\Omega_{n,q}=\frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\binom{n-1}{q}\eta\wedge(\bar\partial_z\eta)^q\wedge(\bar\partial_{\zeta,\lambda}\eta)^{n-q-1}$ et $\widetilde{\Omega}_{n,q}=\frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\binom{n-1}{q}\tilde\eta\wedge(\bar\partial_z\tilde\eta)^q\wedge(\bar\partial_{\zeta,\lambda}\tilde\eta)^{n-q-1}$.

Soit $h\in C_{0,q}(bD)$, $n-1\geqslant q\geqslant 1$ et $R_qh:=\int_{(\zeta,\lambda)\in bD\times[0,1]}h(\zeta)\wedge\Omega_{n,q-1}(\cdot,\zeta,\lambda)$. A l'opérateur de Bochner–Martinelli près, R_q coïncide avec l'opérateur de résolution de [3]. R_qh est donc défini et de régularité höldérienne $1/m$ sur $\overline{D}$ ce qui nous permet de définir T_qh comme la valeur au bord de R_qh au sens usuel des classes d'équivalence.

Si D était strictement pseudoconvexe, nous définirions $\widetilde{T}_q$ comme T_q en utilisant le noyau $\widetilde{\Omega}_{n,q-1}$. Cependant, dans le noyau de [3] et dans $\Omega_{n,q}$, la composante normale du noyau en ζ a un mauvais comportement, mais cette dernière se trouve écrasée par l'intégration sur le bord du domaine. Dans $\widetilde{\Omega}_{n,q-1}$, puisque ζ et z ont été échangés, c'est la composante normale en z qui a un mauvais comportement. Comme elle ne disparaît pas lors de l'intégration, la forme définie par $\int_{(\zeta,\lambda)\in bD\times[0,1]}h(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}_{n,q-1}(\cdot,\zeta,\lambda)$ n'est, semble-t-il, pas bornée au voisinage de bD et il est impossible de l'utiliser pour définir une classe d'équivalence. Mais comme ces classes ne tiennent pas compte de la composante normale, nous éliminons cette composante.

Pour z proche de bD, nous notons η_z la normale unitaire extérieure en z et $\Phi(z)$ une matrice unitaire telle $\Phi(z)\eta_z=(1,0,\dots,0)$. Soient alors $\bar{L}_i^z=\sum_{j=1}^n\Phi_{ij}(z)\frac{\partial}{\partial\bar z_j}$, $\bar q_i^z=\sum_{j=1}^n\bar\Phi_{ij}(z)\,\mathrm{d}\bar z_j$, $i=1,\dots,n$. On vérifie que $\bar\partial_z\tilde\eta=-\sum_{i=1}^n\bar L_i^z(\tilde\eta)\wedge\bar q_i^z$ et que $\bar\partial_z^t\tilde\eta:=\bar\partial_z\tilde\eta+\bar L_1^z(\tilde\eta)\wedge\bar q_1^z$ ne dépend pas de $\Phi(z)$ dès que $\Phi(z)\eta_z=(1,0,\dots,0)$. Nous définissons $\widetilde{T}_qh$ au sens usuel des classes d'équivalence comme étant la valeur au bord de $\widetilde{R}_qh:=\int_{bD\times[0,1]}h(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}^t_{n,q-1}(\cdot,\zeta,\lambda)$, où $\widetilde{\Omega}^t_{n,q}=\frac{(-1)^{q(q-1)/2}}{(2\mathrm{i}\pi)^n}\binom{n-1}{q}\tilde\eta\wedge(\bar\partial_z^t\tilde\eta)^q\wedge(\bar\partial_{\zeta,\lambda}\tilde\eta)^{n-q-1}$. Par définition, $\bar q_1^z$ est colinéaire à $\bar\partial r(z)$ et $\widetilde{R}_qh$ et $\int_{(\zeta,\lambda)\in bD\times[0,1]}h(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}_{n,q-1}(\cdot,\zeta,\lambda)$ diffèrent d'une forme du type $g\wedge\bar\partial_zr$. Aussi, comme dans le cas strictement pseudoconvexe (voir [5]), l'égalité $h=\bar\partial_b(T_q-\widetilde{T}_q)h+(T_{q+1}-\widetilde{T}_{q+1})\bar\partial_bh$ est une conséquence de la régularité au bord des intégrales qui définissent T_q et $\widetilde{T}_q$, régularité que nous étudions maintenant. Pour effectuer cette étude, le Lemme 0.1 de [2] sera ici aussi très important.

Soit ζ_0 un point de bD. Quitte à renuméroter, il existe $R_0>0$ tel que $\frac{\partial r}{\partial\zeta_1}(\zeta)$ soit non nul pour tout ζ dans $\{\zeta\in\mathbb{C}^n,|\zeta-\zeta_0|\leqslant R_0\}$. Soient encore :

$$Z_1^\zeta=\frac12\left(\left(\frac{\partial r}{\partial\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}-\left(\frac{\partial r}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}\right)\quad\text{et}\quad Z_j^\zeta=\frac{\partial}{\partial\zeta_j}-\frac{\partial r}{\partial\zeta_j}(\zeta)\left(\frac{\partial r}{\partial\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\quad\text{si } j\neq1,$$
$$\overline{Z}_1^\zeta=\frac12\left(\left(\frac{\partial r}{\partial\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}+\left(\frac{\partial r}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}\right)\quad\text{et}\quad \overline{Z}_j^\zeta=\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_j}-\frac{\partial r}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta)\left(\frac{\partial r}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}\quad\text{si } j\neq1.$$

$Z_1^\zeta,\dots,Z_n^\zeta,\overline{Z}_2^\zeta,\dots,\overline{Z}_n^\zeta$ forment une base locale de vecteurs tangentiels. Soit encore $L_1^\zeta=\sum_{j=1}^n\overline{\Phi_{1j}(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta_j}-\Phi_{1j}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_j}$ ne dépend pas de $\Phi(\zeta)$ et est un champ de vecteurs tangentiels transversaux à l'espace tangent complexe du bord. Les termes principaux de S et $\widetilde{S}$ varient selon la direction normale complexe, ce qui implique :

Proposition 1. *Il existe $R_0'\in\,]0,R_0]$ tel que pour tout z,ζ avec $|\zeta-\zeta_0|\leqslant R_0'$ et $|\zeta_0-z|\leqslant R_0'$:*

$$1\lesssim\left|L_1^\zeta S(\zeta,z)\right|\quad\textit{et}\quad 1\lesssim\left|L_1^\zeta\widetilde{S}(\zeta,z)\right|.$$

Nous commençons par montrer la continuité de T_q : pour $h\in C^p_{0,q}(bD)$, $p\in\mathbb{N}$ et $V_1,\dots,V_p$ p champs de vecteurs tangentiels, nous montrons que $\|V_1\dots V_pR_qh\|_{1/m,\overline{D\cap U}}\lesssim\|h\|_{p,bD}$. Grâce à la compacité de bD, nous localisons et supposons h à support dans $B(\zeta_0,R_0'):=\{\zeta\in\mathbb{C}^n,\ |\zeta-\zeta_0|<R_0'\}$. Pour $s\leqslant p$, notons Γ^sh une forme de même support que h et de classe C^{p-s} telle que $\|\Gamma^sh\|_{p-s,bD}\lesssim\|h\|_{p,bD}$. Soit $z\in U\cap D\cap B(\zeta_0,R_0')$. Pour $k>0$, nous posons :

$$I[h](j,j',k,k',l,l',s)(z)=\int_{bD}\Gamma^s h(\zeta)\wedge\frac{X^{k'}(\eta_1(z,\zeta)\wedge(\bar\partial_\zeta\eta_1(z,\zeta))^{k-1})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}\bigl(V_i^z+V_i^\zeta\bigr)S(\zeta,z)$$

et pour $k\geqslant 0$:

$$J[h](j,j',k,k',l,l',s)(z)=\int_{bD}\Gamma^s h(\zeta)\wedge\frac{X^{k'}((\bar\partial_\zeta\eta_1(z,\zeta))^{k})\wedge\varpi_{l'}(\zeta,z)}{S^j(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\prod_{i=1}^{j'}\bigl(V_i^z+V_i^\zeta\bigr)S(\zeta,z),$$

où $j,j',k,k',l,l',s\geqslant 0$ sont des entiers, $X^{k'}$ est k' fois la composée de champs de vecteurs de $\{L_1^\zeta, Z_1^z+Z_1^\zeta,\dots,Z_n^z+Z_n^\zeta,\overline{Z}_2^z+\overline{Z}_2^\zeta,\dots,\overline{Z}_n^z+\overline{Z}_n^\zeta\}$, V_i^z appartient à $\{Z_1^z,\dots,Z_n^z,\ \overline{Z}_2^z,\dots,\overline{Z}_n^z\}$ et $\varpi_{l'}$ une forme différentielle telle que $|\varpi_{l'}(\zeta,z)|=\mathrm{O}(|\zeta-z|^{l'})$.

Nous dirons que (j,j',k,k',l,l') satisfait (CI) si $2j-j'\leqslant 2k-k',\ k'\leqslant k,\ 2l-l'+2k\leqslant 2n-1$ et $j>1$, ou $j=k=1,\ k'=j'=0$ et $2l-l'\leqslant 2n-3$. Il satisfera (CJ) si $2j-j'\leqslant 2k-k',\ k'\leqslant k,\ 2l-l'+2k\leqslant 2n-2,\ j>1$, ou si $j=1,\ k=k'=j'=0$, et $2l-l'\leqslant 2n-3$.

Proposition 2. *Soit $V^z\in\{Z_1^z,\dots,Z_n^z,\overline{Z}_2^z,\dots,\overline{Z}_n^z\}$, $z\in D$, avec $|\zeta_0-z|\leqslant R_0'$.*

Si (j,j',k,k',l,l') vérifie (CI), $V^zI[h](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ est une somme de $I[h](\tilde j,\tilde j',\tilde k,\tilde k',\tilde l,\tilde l',\tilde s)(z)$ et de $J[h](\tilde j,\tilde j',\tilde k,\tilde k',\tilde l,\tilde l',\tilde s)(z)$, $\tilde s\leqslant s+1$, satisfaisant respectivement (CI) et (CJ).

Si (j,j',k,k',l,l') vérifie (CJ), $V^zJ[h](j,j',k,k',l,l',s)(z)$ est une somme de $J[h](\tilde j,\tilde j',\tilde k,\tilde k',\tilde l,\tilde l',\tilde s)(z)$ satisfaisant (CJ) pour $\tilde s\leqslant s+1$.

Démonstration. Nous nous intéressons à $J[h](1,0,0,0,l,l',s)$:

$$\begin{aligned}V^zJ[h](1,0,0,0,l,l',s)(z)&=-\int_{bD}\Gamma^s h(\zeta)\wedge\frac{(V^z+V^\zeta)S(\zeta,z)\varpi_l(\zeta,z)}{S^2(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}\\&\quad+\int_{bD}\frac{\Gamma^s h(\zeta)}{S(\zeta,z)}\wedge(V^\zeta+V^z)\frac{\varpi_l(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}-\int_{bD}\Gamma^s h(\zeta)\wedge V^\zeta\frac{\varpi_l(\zeta,z)}{S(\zeta,z)|\zeta-z|^{2l}}=-X+Y_1-Y_2.\end{aligned}$$

Une intégration par parties montre que $Y_2=J[h](1,0,0,0,l,l',s+1)$. Comme $(V^z+V^\zeta)\frac{\varpi_l(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}=\frac{\varpi_l(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{2l}}$, $Y_1=J[h](1,0,0,0,l,l',s)$. Pour X, en utilisant $\frac{1}{S^2}=-\frac{1}{L_1^\zeta S}L_1^\zeta\bigl(\frac{1}{S}\bigr)$, on peut intégrer par parties. Ensuite, en remarquant que $(V^z+V^\zeta)S(\zeta,z)=\mathrm{O}(|\zeta-z|)$ et en utilisant la Proposition 2, on montre que X est somme de $J[h](1,0,0,0,l,l',s)(z)$. Les autres cas se traitent de même. □

Nous estimons les dérivées tangentielles avec les bases ε-extrémales (voir [3]). Soit $\varepsilon>0$. Pour ne pas compliquer les notations, nous supposons que la base canonique est la base ε-extrémale en z.

Proposition 3. *Soient $\zeta\in P_\varepsilon(z)$, $i,j=1,\dots,n$, $V^z\in\{Z_1^z,\dots,Z_n^z,\overline{Z}_2^z,\dots,\overline{Z}_n^z\}$. Alors, uniformément en z, ζ et ε : $|(V^\zeta+V^z)Q_i(\zeta,z)|\lesssim\frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau_i(z,\varepsilon)}$, $|(V^\zeta+V^z)\frac{\partial Q_i}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta,z)|\lesssim\frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau_j(z,\varepsilon)\tau_i(z,\varepsilon)}$, $|(V^\zeta+V^z)S(\zeta,z)|\lesssim\varepsilon^{1/2}$.*

Démonstration. Notons $\delta_j=\frac{\partial}{\partial\zeta_j}+\frac{\partial}{\partial z_j}$. Lorsque $V^z=Z_1^z,\dots,Z_n^z$, la majoration de $(V^z+V^\zeta)Q_i(\zeta,z)$ se résume à celles de $\delta_kQ_i(\zeta,z)$ et $\frac{\partial r}{\partial\zeta_k}(\zeta)-\frac{\partial r}{\partial\zeta_k}(z)$, $k=1,\dots,n$. L'action de δ_k a déjà été étudiée dans [2]. Le Lemme 0.1 de [2] et (vii) de la Proposition 3.1 de [3] permettent de montrer que $|\frac{\partial r}{\partial\zeta_k}(\zeta)-\frac{\partial r}{\partial\zeta_k}(z)|\lesssim\varepsilon^{1/2}$ ce qui suffit. Comme Q_j est holomorphe par rapport à z, $(\overline{Z}_k^\zeta+\overline{Z}_k^z)Q_i(\zeta,z)=\overline{Z}_k^\zeta Q_i(\zeta,z)$ et la majoration découle de celle de $\frac{\partial Q_i}{\partial\bar\zeta_k}(\zeta,z)$ montrée dans [2]. Les autres majorations se montrent pareillement. □

Proposition 4. *Soient $\zeta \in P_\varepsilon(z)$, $i, j = 1, \dots, n$. Alors uniformément par rapport à ε, z et ζ :* $|L_1^\zeta Q_i(\zeta, z)| \lesssim \frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau_i(z,\varepsilon)}$, $\left|L_1^\zeta \frac{\partial Q_i}{\partial \bar\zeta_j}(\zeta, z)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau_i(z,\varepsilon)\tau_j(z,\varepsilon)}$.

Démonstration. Le cas $i = 1$ est trivial car $\tau_1(z, \varepsilon) \approx \varepsilon$. Si $i \neq 1$, $\Phi_{1i}(\zeta)$ est petit face à ε et les estimations de [2] et [3] donnent le résultat. □

Corollaire 5. *Soient (j, j', k, k', l, l') et $(\tilde{j}, \tilde{j}', \tilde{k}, \tilde{k}', \tilde{l}, \tilde{l}')$ vérifiant respectivement (CI) et (CJ), et soit $s \leqslant p$. Alors uniformément par rapport à h et z :* $|d_z I[h](j, j', k, k', l, l', s)(z)| + |d_z J[h](\tilde{j}, \tilde{j}', \tilde{k}, \tilde{k}', \tilde{l}, \tilde{l}', s)(z)| \lesssim \|h\|_{k,bD}|r(z)|^{1/m-1}$.

Démonstration. Le Lemme 4.2 de [3], les Propositions 3 et 4 et les conditions (CI) et (CJ) donnent des majorations du même type que dans [3] : nous concluons alors comme dans [3]. □

Pour établir $\|V_1 \dots V_p R_q h\|_{1/m,bD} \lesssim \|h\|_{p,bD}$, nous montrons pour $\widetilde{V}_1, \dots, \widetilde{V}_p \in \{Z_1^z, \dots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \dots, \overline{Z}_n^z\}$ et z dans $U \cap D$ que $|d_z \widetilde{V}_1 \dots \widetilde{V}_p R_q h(z)| \lesssim \|h\|_{p,bD}|r(z)|^{1/m-1}$ puis appliquons le lemme de Hardy–Littlewood. Comme h est à support dans $B(\zeta_0, R_0')$, seuls les z de $B(\zeta_0, R_0')$ comptent. Puisque $R_q h$ est une somme de $I[h](k, 0, k, 0, 2(n-k), 1, 0)$, $k = 1, \dots, n-q-1$, une récurrence utilisant la Proposition 2 et l'application du Corollaire 5 donne le résultat et la continuité de T_q.

Passons à la continuité de $\widetilde{T}_q$. Il suffit donc de montrer que pour p champs de vecteurs tangentiels $V_1, \dots, V_p$, $\|V_1 \dots V_p \widetilde{R}_q h\|_{1/m,\overline{U-D}} \lesssim \|h\|_{p,bD}$ uniformément par rapport à h. Nous fixons un z dans $(B(\zeta_0, R_0') \cap U) - \overline{D}$ et $\varepsilon > 0$. Afin de ne pas alourdir les notations, nous supposons que la base ε-extrémale en z est la base canonique. Si ε est suffisamment petit, $\Phi(z)$ sera donc à ε près la matrice identité. Nous avons alors :

Proposition 6. *Pour ζ dans $(P_\varepsilon(z) \setminus c_1 P_\varepsilon(z)) \cap bD$, $i, j = 1, \dots, n$ et $V^z \in \{Z_1^z, \dots, Z_n^z, \overline{Z}_2^z, \dots, \overline{Z}_n^z\}$:*

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{Q}_i(\zeta, z)\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z, \varepsilon)},\\
&\left|(V^z + V^\zeta)\big(\bar{L}_j^z(\widetilde{Q}_i)(\zeta, z)\bar{q}_j^z\big)\right| + \left|L_1^\zeta\big(\bar{L}_j^z(\widetilde{Q}_i)(\zeta, z)\bar{q}_j^z\big)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau_i(z, \varepsilon)\tau_j(z, \varepsilon)}, \quad \left|\widetilde{S}(\zeta, z)\right| \gtrsim \varepsilon,\\
&\left|\bar{L}_j^z(\widetilde{Q}_i)(\zeta, z)\bar{q}_j^z\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_i(z, \varepsilon)\tau_j(z, \varepsilon)},\\
&\left|(V^z + V^\zeta)\widetilde{Q}_i(\zeta, z)\right| + \left|L_1^\zeta \widetilde{Q}_i(\zeta, z)\right| \lesssim \frac{\varepsilon^{1/2}}{\tau_i(z, \varepsilon)}, \quad \left|(V^z + V^\zeta)\widetilde{S}(\zeta, z)\right| \lesssim \varepsilon^{1/2}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Ces inégalités se montrent comme pour z dans $U \cap D$ (voir [3] et les Propositions 3 et 4). □

Après quelques intégrations par parties comme pour $T_q h$, avec la Proposition 6, nous montrons que $|d_z V_1 \dots V_p \widetilde{R}_q h(z)| \lesssim \|h\|_{p,bD}|r(z)|^{1/m-1}$ uniformément en z et h. Le lemme de Hardy–Littlewood implique que $\|V_1 \dots V_p \widetilde{R}_q h\|_{1/m,\overline{U-D}} \lesssim \|h\|_{p,bD}$. Comme $V_1, \dots, V_p$ sont quelconques, $\widetilde{T}_q h$ appartient à $C_{0,q-1}^{p+1/m}(bD)$ et satisfait $\|\widetilde{T}_q h\|_{p+1/m,bD} \lesssim \|h\|_{p,bD}$ uniformément par rapport à h, ce qui montre la continuité de $\widetilde{T}_q$.

Références

[1] W. Alexandre, Construction d'une fonction de support à la Diederich–Fornæss, Pub. IRMA Lille 54 (III) (2001).

[2] W. Alexandre, Estimées C^k pour les domaines convexes de type fini de $\mathbb{C}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 23–26.

[3] K. Diederich, B. Fischer, J.E. Fornæss, Hölder estimates on convex domains of finite type, Math. Z. 232 (1999) 43–61.

[4] K. Diederich, J.E. Fornæss, Support functions for convex domains of finite type, Math. Z. (1999) 145–164.

[5] G.M. Henkin, The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds, Russian Math. Survey 32.3 (1977) 59–130.