Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 457–460
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Solutions de type multi-soliton des équations de KdV généralisées

Yvan Martel [1]

Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu et accepté le 22 décembre 2003

Présenté par Haïm Brézis

Résumé

On considère les équations de Korteweg–de Vries généralisées dans les cas sous-critique et critique. Soit $R_j(t,x)=Q_{c_j}(x-c_jt-x_j)$ N solutions de type solitons de l'équation, correspondant à des vitesses $0<c_1<c_2<\cdots<c_N$. Dans cette Note, on donne les idées principales de la démonstration du résultat suivant. Etant donnés $\{c_j\}$, $\{x_j\}$, il existe une et une seule solution φ de l'équation de KdV généralisée telle que $\|\varphi(t)-\sum R_j(t)\|_{H^1}\to 0$ quand $t\to+\infty$. Les preuves complètes seront publiées plus tard. ***Pour citer cet article : Y. Martel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Multi-soliton-type solutions of the generalized KdV equations. We consider the generalized Korteweg–de Vries equations in the subcritical and critical cases. Let $R_j(t,x)=Q_{c_j}(x-c_jt-x_j)$ be N soliton solutions of this equation, with corresponding speeds $0<c_1<c_2<\cdots<c_N$. In this Note, we give a sketch of the proof of the following result. Given $\{c_j\}$, $\{x_j\}$, there exists one and only one solution φ of the generalized KdV equation such that $\|\varphi(t)-\sum R_j(t)\|_{H^1}\to 0$ as $t\to+\infty$. Complete proofs will appear later.

To cite this article: Y. Martel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).

1. Introduction

On considère les équations de Korteweg–de Vries généralisées

$$u_t+(u_{xx}+u^p)_x=0,\quad t,x\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

Pour tout $p\geqslant 2$, l'Éq. (1) est localement bien posée dans $H^1(\mathbf{R})$ (voir Kenig, Ponce et Vega [1]), et pour une solution $u(t)$ dans H^1, les quantités suivantes sont conservées

$$\int u^2(t)\equiv M\big(u(t)\big)=M\big(u(0)\big),\qquad \frac{1}{2}\int u_x^2(t)-\frac{1}{p+1}\int u^{p+1}\equiv E\big(u(t)\big)=E\big(u(0)\big). \tag{2}$$

Adresse e-mail : martel@math.polytechnique.fr (Y. Martel).

[1] Partiellement financé par la National Science Foundation, accord No. DMS-0111298.

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.12.029

Pour $2 \leqslant p < 5$, les solutions H^1 sont globales et uniformément bornées dans H^1. En revanche, pour $p = 5$, il existe des solutions telles que $\|u(t)\|_{H^1} \to +\infty$ quand $t \to T$, pour T fini (voir Merle [8] et Martel et Merle [5]). L'exposant $p = 5$ est donc critique en ce qui concerne le comportement global des solutions de (1). Le cas $p > 5$ est ouvert.

Il est bien connu qu'il existe une famille de solutions de (1) de type ondes progressives $u(t,x) = Q_{c_0}(x - x_0 - c_0 t)$, où

$$Q_{c_0}(x) = \left(\frac{c_0(p+1)}{2\,\mathrm{ch}^2(((p-1)/2)\sqrt{c_0}x)}\right)^{1/(p-1)} \quad \text{est solution de } (Q_{c_0})_{xx} + Q_{c_0}^p = c_0 Q_{c_0},\ c_0 > 0. \tag{3}$$

Ces solutions, appelées solitons, sont très importantes dans la description de la dynamique des Éq. (1). Notons que $\int Q_{c_0}^2 = c_0^\beta \int Q^2$, où $\beta = \frac{5-p}{2(p-1)}$, donc la vitesse du soliton est reliée à sa norme L^2.

Les cas $p = 2$ et 3 sont très particuliers car l'Éq. (1) est alors complètement intégrable : il existe une infinité de lois de conservation. De plus, il existe des solutions explicites qui généralisent les solutions soliton. Ces solutions sont appelées N-solitons et sont remarquables par deux aspects. Premièrement, elles décrivent une intéraction parfaite entre deux ou plusieurs solitons : les solitons ont la même vitesse après qu'avant l'intéraction, et il n'y a pas de perte de masse par dispersion. Deuxièmement, les N-solitons se comportent asymptotiquement quand $t \to +\infty$ comme la somme de N solitons dans H^1. Plus précisèment, étant donnés $0 < c_1 < \cdots < c_N$, $x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{R}$, il existe une solution N-soliton $U(t)$ telle que $\|U(t) - \sum Q_{c_j}(x - x_j - c_j t)\|_{H^1} \to 0$ quand $t \to +\infty$. Lorsque $t \to -\infty$, ces solutions ont le même comportement, avec les mêmes vitesses $\{c_j\}$ mais en général des paramètres $\{x_j\}$ différents. On renvoie à Lamb [2] et Miura [9] pour plus de précision sur ces solutions, et plus généralement sur la méthode du « scattering inverse », utilisée dans le cas intégrable.

D'autre part, il existe un certain nombre de résultats d'un autre type concernant les équations (1), qui n'utilisent pas le scattering inverse, et sont valables sous la condition p sous critique ($p = 2$, 3 et 4 si on se contente des exposants entiers). La question n'est pas seulement d'étudier le cas particulier $p = 4$ en plus des cas intégrables. Les résultats de ce type sont largement applicables à d'autres généralisations de l'équation de KdV, sous hypothèse de stabilité (voir Weinstein [10], Section 4 par exemple). Rappelons les résultats principaux pour le cas sous-critique.

D'abord, les solitons sont stables dans H^1, aux translations près. C'est-à-dire que la propriété suivante est vérifiée : *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que si* $\|u(0) - Q\|_{H^1} \leqslant \delta$, *alors* $\forall t \in \mathbf{R}$, *il existe* $x(t) \in \mathbf{R}$, *tel que* $\|u(t, \cdot + x(t)) - Q\|_{H^1} \leqslant \varepsilon$. Voir par exemple [10] pour une démonstration dont le principe sera repris dans cette Note (voir les références dans [10] pour d'autres démonstrations).

On sait aussi que la famille des solitons est asymptotiquement stable (voir Martel et Merle [4]) : *si* $\|u_0 - Q\|_{H^1}$ *est assez petit, alors il existe* $c_+ > 0$ *proche de* 1 *et* $x(t)$ *tels que* $u(t, \cdot + x(t)) \rightharpoonup Q_{c+}$ *dans* H^1 *faible quand* $t \to +\infty$.

Il n'est pas vrai en général que $u(t, \cdot + x(t))$ converge vers Q_{c_+} dans $L^2(\mathbf{R})$. En effet, si c'est le cas, on a $u(t,x) = Q_{c_+}(x - x_+ - c_+ t)$ pour un certain $x_+ \in \mathbf{R}$ (c'est une conséquence de la caractérisation variationnelle de Q). Comme c_+ est proche de 1, la plus grande partie de la norme L^2 de $u(t)$ va sur le soliton, mais comme il n'y a pas convergence forte dans $L^2(\mathbf{R})$, il y a soit de la dispersion sur la gauche ($x < 0$), soit des solitons lents (car petits en norme L^2), dans une région $x < \alpha t$, où $\alpha > 0$ est petit, soit les deux phénomènes.

Dans le cas des multi-solitons, Martel, Merle et Tsai [6] ont prouvé le résultat suivant (voir [6] pour un énoncé plus précis) : *si* $u(0)$ *est proche dans* H^1 *de la somme de* N *solitons bien ordonnés* (*le plus rapide devant, de telle sorte que les solitons se découplent pour les temps positifs*), *et initialement suffisamment éloignés, alors pour tout temps positif,* $u(t)$ *est proche d'une telle somme, avec la même distribution de vitesses*. Ce résultat a pour conséquence dans les cas intégrables la stabilité dans H^1 des N-solitons (ce qui était connu pour l'équation de KdV dans H^N, voir les références dans [6]).

Nous présentons dans cette Note la réponse à une question naturelle dans la suite de ces travaux.

Théorème 1.1. *Soit* $p = 2$, 3, 4 *ou* 5. *Soit* $N \in \mathbf{N}$, $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_N$, *et* $x_1^+, \ldots, x_N^+ \in \mathbf{R}$. *Il existe une et une seule solution* φ *de* (1) *dans* $C([T_0, +\infty), H^1(\mathbf{R}))$, *pour un certain* T_0, *telle que*

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \varphi(t) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j}\bigl(\cdot - x_j^+ - c_j t\bigr) \right\|_{H^1(\mathbf{R})} = 0. \tag{4}$$

De plus, $\varphi \in C([T_0, +\infty), H^s(\mathbf{R}))$ *pour tout* $s \geqslant 0$, *et il existe* $A_s > 0$ *telles que*

$$\forall s \geqslant 0,\ \forall t \geqslant T_0, \qquad \left\| \varphi(t) - \sum_{j=1}^{N} Q_{c_j}\bigl(\cdot - x_j^+ - c_j t\bigr) \right\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant A_s \,\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{5}$$

où $\gamma = \sigma_0 \sqrt{\sigma_0}/32$ *et* $\sigma_0 = \min(c_1, c_2 - c_1, c_3 - c_2, \ldots, c_N - c_{N-1})$.

La partie existence n'est intéressante que pour $p = 4$ et 5 puisque dans les cas intégrables, une telle solution est donnée explicitement (toutefois le théorème reste vrai pour d'autres généralisations de l'équation de KdV). La partie unicité semble être nouvelle même dans le cas intégrable.

Le comportement de la solution $\varphi(t)$ pour tout t, et en particulier quand $t \to -\infty$ est complètement ouvert dans les cas non intégrables. Il est peu probable dans ces cas que $\varphi(t)$ soit aussi particulière qu'une solution N-soliton du cas intégrable.

Pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire critique, Merle [7] montre un résultat similaire à la partie existence du théorème précédent. L'idée de départ de la démonstration est la même, mais les outils techniques sont ensuite très différents. Le résultat dans [7] est spécifique au cas critique, car il est basé sur la transformation conforme et sur un résultat fin d'explosion en temps fini.

2. Idées de démonstrations

On rappelle la technique introduite dans [10], puis on donne des idées nouvelles pour les multi-solitons. Les preuves complètes seront publiées dans [3].

(a) *Stabilité du soliton* [10] : On considère $u(0)$ proche de Q et on décompose $u(t, x + y(t)) = Q(x) + v(t, x)$, où la taille de $v(t)$ est à contrôler en fonction de $\|v(0)\|_{H^1}$. Le paramètre de translation $y(t)$ est choisi de sorte que $\int v(t) Q_x = 0$. D'autre part, par un argument de scaling, on peut se ramener à la situation $\int v(t) Q = \mathrm{O}(\|v(t)\|_{H^1}^2)$. On définit $F(u(t)) = E(u(t)) + \frac{1}{2} M(u(t))$. En écrivant $F(u(t)) = F(u(0))$ et en utilisant la décomposition de $u(t)$, on trouve $H(v(t)) = H(v(0)) + \mathrm{O}(\|v\|_{H^1}^3)$, où

$$H\bigl(v(t)\bigr) = \int v_x^2(t) + v^2(t) - p Q^{p-1} v^2(t). \tag{6}$$

Weinstein a montré que $H(v(t)) \geqslant \lambda_0 \|v(t)\|_{H^1}^2$, pour $v(t)$ ayant les propriétés précédentes. On en conclut $\|v(t)\|_{H^1} \leqslant A_0 \|v(0)\|_{H^1}$, ce qui montre la stabilité.

(b) *Stabilité de la somme de* N *solitons* [6] : L'idée supplémentaire pour traiter le cas de plusieurs solitons découplés est d'utiliser des propriétés de presque monotonie de quantités du type $M(u(t))$ localisées en espace. On part de la décomposition suivante $u(t) = \sum Q_{c_j}(\cdot - x_j(t)) + v(t)$ avec $\int v(t) Q_{c_j x}(\cdot - x_j(t)) = 0$ et $\int v(t) Q_{c_j}(\cdot - x_j(t)) = \mathrm{O}(\|v(t)\|_{H^1}^2)$ (ce point est en fait délicat, voir [6]). De plus, l'hypothèse de découplage initial des solitons implique $x_j(t) > x_{j-1}(t) + L_0$, où L_0 est grand.

Pour une fonction ψ bien choisie telle que $\psi(x) \sim 1$ pour $x \geqslant K$, $\psi(x) \sim 0$ pour $x \leqslant -K$, on définit

$$M_j(t) = \int u^2(t, x) \psi\bigl(x - m_j(t)\bigr)\,\mathrm{d}x \quad \text{où } m_j(t) \text{ se situe entre le soliton } j \text{ et le soliton } j+1. \tag{7}$$

On montre pour tout $t \geqslant 0$, $M_j(t) - M_j(0) \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\theta L_0}$. En développant $u(t)$ dans l'inégalité suivante, $E(u(t)) + \frac{1}{2}\sum(c_j - c_{j-1})M_j(t) \leqslant E(u(0)) + \frac{1}{2}\sum(c_j - c_{j-1})M_j(0) + C\,\mathrm{e}^{-\theta L_0}$, et en utilisant une forme quadratique de type $H(v(t))$, on trouve $\|v(t)\|_{H^1} \leqslant A_0\|v(0)\|_{H^1} + C\,\mathrm{e}^{-\theta L_0}$.

(c) *Construction de $\varphi(t)$ dans le Théorème* 1.1 : Pour une suite $S_n \to +\infty$, on définit (u_n) par

$$u_{nt} + (u_{nxx} + u_n^p)_x = 0, \qquad u_n(S_n) = \sum Q_{c_j}\big(\cdot - x_j^+ - c_j S_n\big). \tag{8}$$

Alors, en utilisant des arguments similaires, on montre qu'il existe $T_0 > 0$, $A_s > 0$, $\gamma > 0$, tels que,

$$\forall s \geqslant 0, \forall n \geqslant 0, \forall t \in [T_0, S_n], \qquad \Big\|u_n(t) - \sum Q_{c_j}\big(\cdot - x_j^+ - c_j t\big)\Big\|_{H^s} \leqslant A_s\,\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{9}$$

Cette estimation plus précise est due au fait que $v_n(S_n) = 0$, avec les notations de (b) et que la distance entre les solitons est $\gamma' t$. Par ces estimations uniformes, on définit une fonction $\varphi_0 \in \bigcap_{s\geqslant 0} H^s(\mathbf{R})$, limite forte dans tout H^s d'une sous-suite de $(u_n(T_0))$. On définit la solution $\varphi(t)$ de (1) telle que $\varphi(T_0) = \varphi_0$. Par dépendance continue, on obtient (5) en passant à la limite $n \to +\infty$ dans (9).

(d) *Unicité dans le Théorème* 1.1 : Si $u(t)$ vérifie la même propriété asymptotique que $\varphi(t)$, alors $z(t) = u(t) - \varphi(t)$ décroit exponentiellement vers 0 en norme H^1 quand $t \to +\infty$. C'est un corollaire de l'argument précédent. On écrit alors l'équation de $z(t)$ et on utilise des propriétés de presque monotonie sur une quantité définie directement en $z(t)$ ce qui est plus précis. On en déduit $\widetilde{H}(z(t)) \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{t'\geqslant t}\|z(t')\|_{H^1}^2$, où $\widetilde{H}$ est une forme quadratique comparable à H avec des potentiels $pQ_{c_j}^{p-1}(\cdot - x_j^+ - c_j t)$. On contrôle les directions $\int z(t)Q_{c_j}(\cdot - x_j^+ - c_j t)$ et $\int z(t)Q_{c_j x}(\cdot - x_j^+ - c_j t)$ directement par l'équation de $z(t)$ et des propriétés structurelles. On conclut $\|z(t)\|_{H^1}^2 \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{t'\geqslant t}\|z(t')\|_{H^1}^2$, ce qui implique $z \equiv 0$.

Références

[1] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993) 527–620.

[2] G.L. Lamb Jr., Element of Soliton Theory, Wiley, New York, 1980.

[3] Y. Martel, Asymptotic N-soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg–de Vries equations, Préprint.

[4] Y. Martel, F. Merle, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations, Arch. Rational Mech. Anal. 157 (2001) 219–254.

[5] Y. Martel, F. Merle, Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equations, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002) 617–664.

[6] Y. Martel, F. Merle, T.-P. Tsai, Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations, Commun. Math. Phys. 231 (2002) 347–373.

[7] F. Merle, Construction of solutions with exactly k blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity, Commun. Math. Phys. 129 (1990) 223–240.

[8] F. Merle, Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized Korteweg–de Vries equation, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001) 555–578.

[9] R.M. Miura, The Korteweg–de Vries equation: a survey of results, SIAM Rev. 18 (1976) 412–459.

[10] M.I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986) 51–68.