Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 381–384

Géométrie algébrique/Théorie des nombres

Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes, I

Carel Faber [a], Gerard van der Geer [b]

[a] *Institutionen för Matematik, Kungliga Tekniska Högskolan, 10044 Stockholm, Suède*
[b] *Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, NL-1018 TV Amsterdam, Pays-Bas*

Reçu le 22 avril 2003 ; accepté après révision le 1[er] décembre 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous étudions la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces $\mathcal{M}_2$ de modules des courbes de genre 2 et $\mathcal{A}_2$ de modules des surfaces abéliennes. Nous donnons une formule explicite pour la cohomologie d'Eisenstein et une formule conjecturale pour la contribution endoscopique. Notre calcul des courbes sur des corps finis donne des renseignements précis sur les formes modulaires de Siegel. ***Pour citer cet article : C. Faber, G. van der Geer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

On the cohomology of local systems on the moduli spaces of curves of genus 2 and of Abelian surfaces, I. We consider the cohomology of local systems on the moduli space of curves of genus 2 and the moduli space of Abelian surfaces. We give an explicit formula for the Eisenstein cohomology and a conjectural formula for the endoscopic contribution. We show how counting curves over finite fields provides us with detailed information about Siegel modular forms.
To cite this article: C. Faber, G. van der Geer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).

1. Systèmes locaux et caractéristiques motiviques d'Euler

Soit $\mathcal{M}_2$ l'espace de modules des courbes de genre 2 et soit $\mathcal{A}_2$ l'espace de modules des surfaces abéliennes principalement polarisées. Ce sont des champs algébriques définis sur $\mathbb{Z}$. En associant à une courbe sa jacobienne on obtient une immersion ouverte $\mathcal{M}_2 \to \mathcal{A}_2$. Nous notons $\mathcal{A}_{1,1} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{M}_2$. La courbe universelle $\pi' : \mathcal{C} \to \mathcal{M}_2$ et la surface abélienne universelle $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{A}_2$ définissent des systèmes locaux $\mathbb{V}' = R^1\pi'_*(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{M}_2$ et $\mathbb{V} = R^1\pi_*(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{A}_2$ et sous l'immersion $j : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{A}_2$ on a $j^*\mathbb{V} = \mathbb{V}'$. On a un accouplement symplectique $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \to \mathbb{Q}(-1)$.

A chaque paire d'entiers (l, m) avec $l \geqslant m \geqslant 0$ on peut associer une représentation irréductible du groupe $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ et on la relève en une représentation de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q})$ de poids dominant $(l-m)\gamma_\beta + m\gamma_\alpha - (l+m)\eta$

Adresses e-mail : faber@math.kth.se (C. Faber), geer@science.uva.nl (G. van der Geer).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.12.026

avec $\gamma_\alpha = (1,1)$ et $\gamma_\beta = (0,1)$ deux racines fundamentales et η le multiplicateur. Ainsi $(l,m) = (1,0)$ donne le contragrédient de la représentation standard. Cela définit un système local $\mathbb{V}_{l,m}$ sur $\mathcal{A}_2$, facteur direct de $\mathrm{Sym}^{l-m}(\mathbb{V}) \otimes \mathrm{Sym}^m(\wedge^2(\mathbb{V}))$ de poids $l+m$. On a $\mathbb{V} = \mathbb{V}_{1,0}$ et $\wedge^2\mathbb{V} = \mathbb{V}_{1,1} \oplus \mathbb{V}_{0,0}(-1)$. Une paire (l,m) est appelée régulière si on a $l > m > 0$.

On s'intéresse à la caractéristique motivique d'Euler $e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ définie par

$$e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = \sum_{i=0}^{6} (-1)^i \bigl[H_c^i(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})\bigr],$$

où l'on prend la classe de la cohomologie à support compact dans K_0 d'une catégorie convenable, par exemple, la catégorie des modules de Hodge mixtes sur $\mathcal{A}_2$ ou des motifs effectifs de Chow. Pour $l+m$ impair on voit que $e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = 0$, car $-\mathrm{Id} \in \mathrm{Sp}(4)$ agit comme -1 sur $\mathbb{V}$. Dans le cas de genre 1 on a également l'espace $\mathcal{A}_1$ de modules des courbes elliptiques, sa courbe universelle $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{A}_1$, et le système local $\mathbb{W} = R^1\pi_*(\mathbb{Q})$. On pose $\mathbb{W}_k = \mathrm{Sym}^k(\mathbb{W})$. Dans ce cas on sait que $e_c(\mathcal{A}_1, \mathbb{W}_k) = 0$ pour k impair, et $e_c(\mathcal{A}_1, \mathbb{W}_k) = -S[k+2] - 1$, pour $k \geqslant 2$ pair, où $S[k+2]$ est le motif des formes paraboliques de poids $k+2$ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, cf. [2,15]. On a $e_c(\mathcal{A}_1, \mathbb{W}_0) = L$ où L est le motif de Tate de poids 2.

2. La contribution de la cohomologie d'Eisenstein

On a une flèche naturelle $H_c^*(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) \to H^*(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$. L'image est appelée la cohomologie intérieure $H_!^*$ et on note sa caractéristique motivique d'Euler $e_!$. On définit la cohomologie d'Eisenstein comme le noyau, et la caractéristique correspondante est définie par $e_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) - e_!(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$. En utilisant les techniques et résultats de Harder [6,7], Pink [13] et Schwermer [16] on peut démontrer le théorème suivant pour la cohomologie de Betti et pour la cohomologie étale avec coefficients ℓ-adiques en caractéristique $p > 0$.

Théorème 2.1. *Soit (l,m) régulière. La caractéristique motivique d'Euler pour la cohomologie de Betti et pour la cohomologie étale ℓ-adique de la cohomologie d'Eisenstein est*

$$e_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = s_{l-m+2} - s_{l+m+4}L^{m+1} + \begin{cases} S[m+2]+1 & l \text{ pair}, \\ -S[l+3] & l \text{ impair}, \end{cases}$$

où s_n est la dimension de l'espace vectoriel des formes paraboliques de poids n sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Pour $l > m = 0$ et pour $l = m > 0$ cette formule garde un sens quand on interprète $S[2]$ comme $-L-1$ et s_2 comme -1 et devrait être vraie sauf dans le cas $l = m > 0$, m pair quand il y ont des annulations inattendues des fonctions L de formes modulaires, cf. [7].

3. Formes modulaires de Siegel

Soit (U,ρ) une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ de type (j,k), c'est-à-dire de la forme $\mathrm{Sym}^j(R) \otimes \det(R)^k$, où R est la représentation standard. Une forme modulaire de Siegel de poids ρ ou (j,k) est une fonction holomorphe $f : \mathcal{H}_2 \to U$ sur le demi-plan de Siegel $\mathcal{H}_2$ telle que

$$f\bigl((A\tau+B)(C\tau+D)^{-1}\bigr) = \rho(C\tau+D)f(\tau)$$

pour $\tau \in \mathcal{H}_2$ et $(A,B;C,D) \in \mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$, cf. [1]. Notons $M_{j,k}$ l'espace vectoriel de telles formes de poids (j,k) et $S_{j,k}$ le sous-espace des formes paraboliques. On a $M_{j,k} = (0)$ si j est impair, ou $j < 0$ ou $k < 0$. Les formes modulaires forment un anneau $\mathcal{R} = \bigoplus_{j,k} M_{j,k}$ et $\bigoplus S_{j,k}$ est un idéal de cet anneau. Le sous-anneau $\mathcal{R}^0 = \bigoplus_k M_{0,k}$

est la $\mathbb{C}$-algèbre des formes modulaires classiques et des générateurs de $\mathcal{R}^0$ ont été déterminés par Igusa. On connait également des générateurs du $\mathcal{R}^0$-modules $\bigoplus_k M_{2,k}$ et $\bigoplus_k M_{4,k}$ d'après Satoh [14] et Ibukiyama [8,9]. Mais à l'exception de ces résultats et une formule pour la dimension de $S_{j,k}$ due à Tsushima [18], presque rien n'est connu.

L'espace $S_{6,8}$ est de dimension 1 et à notre demande Ibukiyama [10] a construit une forme $0 \neq F \in S_{6,8}$, en utilisant le réseau $\Gamma = \{x \in \mathbb{Q}^{16}\colon\ 2x_i \in \mathbb{Z},\ x_i - x_j \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{16} x_i \in 2\mathbb{Z}\}$. On pose $a = (2, \mathrm{i}, \mathrm{i}, \mathrm{i}, \mathrm{i}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{16}$ et on note par $(\ ,\ )$ le produit scalaire usuel. Soit $F = (F_0, \ldots, F_6)$ le vecteur de fonctions sur $\mathcal{H}_2$ défini par

$$F_\nu = \sum_{x,y \in \Gamma} (x,a)^{6-\nu}(y,a)^\nu \, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}((x,x)\tau_1 + 2(x,y)\tau_2 + (y,y)\tau_3)} \quad (\nu = 0, \ldots, 6)$$

pour $\tau = (\tau_1, \tau_2; \tau_2, \tau_3) \in \mathcal{H}_2$. Le résultat de Ibukiyama dit que $F \neq 0$ et $F \in S_{6,8}$.

4. Systèmes locaux et formes modulaires

On sait que pour (l,m) régulière $H_!^i(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = (0)$ quand $i \neq 3$, cf. [17]. Faltings a montré dans [3] (cf. [4], VI, Théorème 5.5) que $H^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ et $H_c^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ sont munis de filtrations de Hodge de poids $\geqslant l+m+3$ et $\leqslant l+m+3$ respectivement et on trouve que $H_!^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ est muni d'une filtration de Hodge

$$(0) \subset F^{l+m+3} \subset F^{l+2} \subset F^{m+1} \subset F^0 = H_!^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}).$$

De plus, on sait que $F^{l+m+3} \cong S_{l-m,m+3}$, cf. [5], Théorème 17. Soit M le groupe « endoscopique » $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)/\mathbb{G}_m$, où $\mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$ via $x \mapsto (x, x^{-1})$. Le relèvement endoscopique de M contribue aussi à la cohomologie intérieure $H_!^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$. Nous n'avons pas pu trouver une assertion précise sur cette contribution dans la littérature. Dans [12], il y a beaucoup de renseignements sur la contribution endoscopique (cas $l = m = 0$). Nous nous attendons à ce que les experts sachent démontrer notre description conjecturale de cette contribution endoscopique. Cette description semble en accord avec les résultats de Kudla et Rallis [11] et de Weissauer [19].

Conjecture 4.1. *Si la paire (l,m) est régulière la contribution endoscopique du groupe M à $e_!(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m})$ a une intersection nulle avec F^{l+m+3} et est égale à*

$$e_{\mathrm{endo}}(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = -s_{l+m+4} S[l-m+2] L^{m+1}.$$

Comme nous le verrons, nos calculs donnent un très fort support en faveur de cette conjecture (voir partie II). Nous définissons

$$S[l-m, m+3] := H_!^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) - H_{\mathrm{endo}}^3(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}),$$

où H_{endo}^3 est la partie endoscopique de $H_!^3$. Cela devrait être un motif de rang égal à $4 \dim S_{l-m,m+3}$ avec des poids de Hodge $l+m+3,\ l+2,\ m+1$ et 0. Nous le considérons dans la catégorie des structures de Hodge mixtes ou des représentations galoisiennes. On a la formule conjecturale

$$e_c(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}) = -S[l-m, m+3] - s_{l+m+4} S[l-m+2] L^{m+1} + e_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{A}_2, \mathbb{V}_{l,m}).$$

Cette formule garde un sens pour $l > m = 0$ et pour $l = m > 0$ quand on interprète $S[2]$ comme $-L-1$ et s_2 comme -1.

La deuxième partie, *Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre* 2 *et des surfaces abéliennes, II*, sera publiée dans le prochain numéro.

Remerciements

Nous remercions P. Deligne, G. Harder, A.J. de Jong et J.-P. Serre de leurs remarques sur une version préliminaire de ce manuscrit et T. Ibukiyama pour une correspondance utile. Enfin, nous remercions S. del Baño, notre collaborateur dans le premier phase de ce projet.

Références

[1] T. Arakawa, Vector valued Siegel's modular forms of degree 2 and the associated Andrianov L-functions, Manuscr. Math. 44 (1983) 155–185.
[2] P. Deligne, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, in: Sém. Bourbaki, Exp. 355, in: Lecture Notes in Math., vol. 179, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[3] G. Faltings, On the cohomology of locally symmetric Hermitian spaces, in: Paul Dubreil and Marie-Paule Malliavin Algebra Seminar, Paris, 1982, in: Lecture Notes in Math., vol. 1029, Springer, Berlin, 1983, pp. 55–98.
[4] G. Faltings, C.L. Chai, Degeneration of Abelian Varieties, in: Ergebn. Math., vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[5] E. Getzler, Topological recursion relations in genus 2, in: Integrable Systems and Algebraic Geometry (Kobe/Kyoto, 1997), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998, pp. 73–106.
[6] G. Harder, Eisensteinkohomologie und die Konstruktion gemischter Motive, in: Lecture Notes in Math., vol. 1562, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[7] G. Harder, Modular symbols and special values of automorphic L-functions, Manuscrit non publié.
[8] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of symmetric tensor representations of degree 2, Manuscrit non publié.
[9] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of $\det^k \mathrm{Sym}(4)$ and $\det^k \mathrm{Sym}(6)$, Manuscrit non publié.
[10] T. Ibukiyama, Lettre à G. van der Geer, Juillet 2001.
[11] S. Kudla, S. Rallis, A regularized Siegel–Weil formulap: the first term identity, Ann. of Math. 140 (1994) 1–80.
[12] G. Laumon, Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$, Compositio Math. 105 (1997) 267–359.
[13] R. Pink, On ℓ-adic sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily–Borel compactification, Math. Ann. 292 (1992) 197–240.
[14] T. Satoh, On certain vector valued Siegel modular forms of degree 2, Math. Ann. 274 (1986) 335–352.
[15] A. Scholl, Motives for modular forms, Invent. Math. 100 (2) (1990) 419–430.
[16] J. Schwermer, On Euler products and residual Eisenstein cohomology classes for Siegel modular varieties, Forum Math. 7 (1995) 1–28.
[17] R. Taylor, On the ℓ-adic cohomology of Siegel threefolds, Invent. Math. 114 (1993) 289–310.
[18] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (1983) 139–142.
[19] R. Weissauer, Four-dimensional Galois representations, Manuscrit non publié.