Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 277–280
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations différentielles

La variété des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle

Jean-Pierre Ramis [a], Jacques Sauloy [a], Changgui Zhang [b]

[a] *Laboratoire Emile Picard, CNRS UMR 5580, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France*
[b] *U.F.R. de mathématiques pures et appliquées, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

Reçu et accepté le 9 décembre 2003

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Nous décrivons la structure de variété algébrique affine de l'ensemble des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle donnée. ***Pour citer cet article : J.-P. Ramis et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

The variety of analytical classes of q-difference equations within a formal class. We describe the structure of affine algebraic variety of the set of analytical classes of q-difference equations within a given formal class. ***To cite this article: J.-P. Ramis et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Birkhoff et Guenther posent à la fin de [3] le problème de la classification locale des systèmes aux q-différences analytiques en termes d'obtention d'un système complet d'invariants transcendants explicites. Ils suggèrent une solution par réduction à une *forme normale* à matrice polynomiale triangulaire, qu'ils établissent pour certains cas particuliers. En termes d'opérateurs aux q-différences, ceci correspond à l'existence de factorisations *analytiques*. De telles factorisations n'ont pas d'équivalent dans le cadre parallèle des opérateurs différentiels méromorphes : les factorisations formelles correspondantes sont en général *divergentes*. En termes de modules aux q-différences, ces factorisations analytiques donnent lieu à une filtration par les pentes à quotients purs [7], et l'on montre que la classe d'isomorphie du gradué associé est l'unique classifiant formel. Ainsi, la classification analytique dans une classe formelle se ramène à la classification à gradué donné. La classification formelle est quant à elle bien connue [4]. Nous présentons dans cette Note la partie algébrique de notre solution ; outre la filtration, les outils en sont l'algèbre homologique (pour reconstituer, par extensions successives, la structure d'un module filtré à partir de

Adresse e-mail : sauloy@picard.ups-tlse.fr (J. Sauloy).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.12.009

celle de son gradué) et la transformation de q-Borel–Ramis. Dans [6], nous interprétons ces résultats en termes de faisceaux de Stokes, obtenus à l'aide d'une théorie des développements asymptotiques adaptée et nous décrivons les opérateurs de Stokes à l'aide d'une théorie de la resommation discrète due à C. Zhang.

On fixe un nombre complexe q de module $|q| > 1$. Le symbole σ_q désigne l'automorphisme du corps $\mathbf{C}(\{z\})$ des germes méromorphes en $0 \in \mathbf{C}$ défini par la relation : $(\sigma_q f)(z) = f(qz)$, ainsi que ses extensions naturelles aux espaces vectoriels $\mathbf{C}(\{z\})^n$, $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{C}(\{z\}))$ (matrices), etc. On considère des (germes de) systèmes analytiques aux q-différences $\sigma_q X = AX$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$, que l'on se propose de classifier modulo l'équivalence $A \sim B$, où $B = (\sigma_q F)AF^{-1}$, avec $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ [3]. On traduit ici le problème en termes de modules. Un module aux q-différences est un module à gauche de longueur finie sur l'algèbre $\mathcal{D}_q$ des opérateurs aux q-différences analytiques, ou, de manière équivalente, un couple (E, Φ) formé d'un $\mathbf{C}(\{z\})$-espace vectoriel E de rang fini et d'un automorphisme σ_q-linéaire de E. Par le choix d'une base de E, on peut l'identifier à un couple $(\mathbf{C}(\{z\})^n, \Phi_A)$, où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ et $\Phi_A(X) = A^{-1}\sigma_q X$. D'après [4,7], on peut munir la catégorie $\mathrm{DiffMod}(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ des modules aux q-différences d'une structure tensorielle qui en fait une catégorie abélienne tensorielle rigide sur $\mathbf{C}$; nous noterons $\underline{1}$ l'objet unité et $M^\vee = (E^\vee, \Phi^\vee)$ le dual de $M = (E, \Phi)$. Le foncteur « sections globales » $M \rightsquigarrow \Gamma(M) = \mathrm{Hom}(\underline{1}, M)$ est exact à gauche et $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathrm{DiffMod}(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ dans la catégorie des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de rang fini. On a : $\Gamma(\mathbf{C}(\{z\})^n, \Phi_A) = \{X \in \mathbf{C}(\{z\})^n \mid \sigma_q X = AX\}$. A tout module aux q-différences M, on peut associer un polygone de Newton $N(M)$, ou, de manière équivalente, un ensemble de pentes $S(M) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ de multiplicités $r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{N}^*$. Le module M est dit pur de pente μ si $S(M) = \{\mu\}$. Un module pur de pente $\mu \in \mathbf{Z}$ est isomorphe à un $(\mathbf{C}(\{z\})^n, \Phi_{z^{-\mu}A})$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. D'après [7], tout module M admet une filtration : $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$, telle que les quotients successifs M_i/M_{i-1} $(i = 1, \ldots, k)$ sont purs de pentes $\mu_1 > \cdots > \mu_k$. Les propriétés du polygone de Newton et de cette filtration canonique sont résumées par le fait que le foncteur « gradué associé » $M \rightsquigarrow \mathrm{gr}(M) = \bigoplus M_i/M_{i-1}$ est exact, fidèle, $\mathbf{C}$-linéaire et compatible au produit tensoriel, et que $gr(M)$ a même polygone de Newton que M.

Nous ne considérerons que des modules M à pentes entières : $S(M) \subset \mathbf{Z}$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des modules purs de rangs $r_1, \ldots, r_k$ et de pentes $\mu_1 > \cdots > \mu_k$. On identifiera P_i à $(\mathbf{C}(\{z\})^{r_i}, \Phi_{z^{-\mu_i}A_i})$, où $A_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$. Le module $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ est de rang $n = r_1 + \cdots + r_k$. Nous nous proposons, en analogie avec [1], de décrire l'ensemble $\mathcal{F}(M_0)$ des classes d'équivalence de couples (M, g), où les couples (M, g) sont formés d'un module M et d'un isomorphisme $g : \mathrm{gr}(M) \to M_0$ et (M, g) est dit équivalent à (M', g') s'il existe un morphisme $u : M \to M'$ tel que $g = g' \circ \mathrm{gr}(u)$ (u est automatiquement un isomorphisme). Un tel couple peut être décrit sous la forme $(\mathbf{C}(\{z\})^n, \Phi_A)$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} z^{-\mu_1}A_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & U_{i,j} & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & z^{-\mu_k}A_k \end{pmatrix}, \quad \text{où } U_{i,j} \in \mathrm{M}_{r_i,r_j}\big(\mathbf{C}(\{z\})\big). \tag{1}$$

Deux telles matrices A, A' sont équivalentes s'il existe une matrice $F \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\}))$ telle que $(\sigma_q F)A = A'F$. On a noté ici $\mathfrak{G}$ le sous-groupe algébrique de GL_n formé des matrices triangulaires supérieures par blocs unipotentes ; les blocs diagonaux sont donc $I_{r_1}, \ldots, I_{r_k}$. En termes de systèmes analytiques aux q-différences, cette approche correspond à la possibilité de réduire *analytiquement* un tel système à une forme « prénormale » triangulaire, qui n'a pas d'équivalent pour les systèmes différentiels.

2. Extensions de modules purs

Notons Γ^i $(i \in \mathbf{N})$ les foncteurs dérivés à droite de Γ. Tout objet de $\mathrm{DiffMod}(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ admet, en tant que $\mathcal{D}_q$-module, une résolution projective de longueur $\leqslant 2$. D'autre part, on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}(M, M') = \Gamma(M^\vee \otimes M')$ et les foncteurs $- \otimes -$ et $-^\vee$ sont exacts, d'où un isomorphisme naturel $\mathrm{Ext}^i(M, M') = \Gamma^i(M^\vee \otimes M')$. A tout module $M = (E, \Phi)$ associons le complexe de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels défini en degrés 0 et 1 par $E \overset{\Phi - \mathrm{Id}_E}{\longrightarrow} E$ et nul ailleurs. Ses groupes de cohomologie s'identifient naturellement aux $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $\Gamma^0(M)$ et $\Gamma^1(M)$, ce qui permet de ramener la détermination de ces derniers à des calculs d'indices. On prouve alors, par des calculs proches de ceux de [2] et de [5], que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\Gamma^i(M)$ est nul pour $i \geqslant 2$ et de dimension finie $\gamma^i(M)$ pour $i = 0, 1$, puis que $\gamma^0(M) - \gamma^1(M) = -\sum_{\mu_i > 0} r_M(\mu_i)\mu_i$. On se ramène au cas de l'opérateur $1 - z\sigma_q : \mathbf{C}(\{z\}) \to \mathbf{C}(\{z\})$. On considère alors la *transformation de q-Borel–Ramis* : $\mathcal{B}_{q,1}(\sum f_n z^n) = \sum q^{-n(n-1)/2} f_n z^n$. Celle-ci envoie $\mathbf{C}(\{z\})$ sur l'espace $\mathbf{C}(\{z\})_{q,-1}$ des séries q-Gevrey de niveau -1 (voir [5]) et conjugue $1 - z\sigma_q$ à la multiplication par $1 - z$ dans $\mathbf{C}(\{z\})_{q,-1}$. Cette dernière est injective et $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}(\{z\})_{q,-1}$ est un supplémentaire de son image. On peut *expliciter* un projecteur par un calcul *transcendant* (on conjugue l'évaluation de séries entières par des transformations de q-Borel–Ramis).

Soient maintenant P, P' deux modules purs de pentes $\mu > \mu'$ et de rangs r, r'. Alors $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ext}^1(P', P) = (\mu - \mu')rr'$. Identifions P à $(\mathbf{C}(\{z\})^r, \Phi_{z^{-\mu}A})$, où $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{C})$ (notations analogues pour P'). Soit $U \in \mathrm{M}_{r,r'}(\mathbf{C}(\{z\}))$ et soit M_U le module $(\mathbf{C}(\{z\})^n, B_U)$, où $n = r + r'$ et où B_U est la matrice triangulaire supérieure par blocs $B_U = \begin{pmatrix} z^{-\mu}A & U \\ 0 & z^{-\mu'}A' \end{pmatrix}$. Le module M_U définit donc une classe $\overline{M_U} \in \mathrm{Ext}^1(P', P)$, d'où un épimorphisme $\phi_{P,P'} : U \mapsto \overline{M_U}$, $\mathrm{M}_{r,r'}(\mathbf{C}(\{z\})) \to \mathrm{Ext}^1(P', P)$. Par ailleurs, il existe un unique couple (F, V) (que l'on peut, comme plus haut, décrire *explicitement* par des calculs *transcendants*) où $F \in \mathrm{M}_{r,r'}(\mathbf{C}(\{z\}))$ et $V \in \mathcal{V}(r, r', \mu, \mu')$ (sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{r,r'}(\mathbf{C}(\{z\}))$ formé par les matrices dont tous les coefficients sont éléments de $\sum_{\mu' \leqslant k < \mu} \mathbf{C} z^k$) tel que la matrice $\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & I_{r'} \end{pmatrix}$ définisse un isomorphisme de B_U avec B_V. Ce couple sera noté $\mathrm{Red}(\mu, A, \mu', A', U)$.

Proposition 2.1. *L'application $\phi_{P,P'}$ induit un isomorphisme entre le conoyau de l'endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathrm{M}_{r,r'}(\mathbf{C}(\{z\}))$ défini par : $X \mapsto (\sigma_q X)(z^{-\mu'}A') - (z^{-\mu}A)X$ et l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(P', P)$; elle induit de même un isomorphisme $\mathcal{V}(r, r', \mu, \mu') \to \mathrm{Ext}^1(P', P)$.*

Exemple 1. L'existence d'une solution convergente f de l'équation avec second membre $f - z\sigma_q f = u$ a pour seule obstruction le nombre $v = \mathcal{B}_{q,1}u(1)$. S'il est nul, cette solution existe et est unique ; en général, $\mathrm{Red}(-1, 1, 0, 1, u) = (f, v)$. Le nombre v est le classifiant analytique du module $(\mathbf{C}(\{z\})^2, \Phi_A)$ dans sa classe formelle, où $A = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & z \end{pmatrix}$. Comme l'équation $f - z\sigma_q f = u$ admet une unique solution formelle $\hat{f}$, c'est un cas particulier du problème de la resommation d'une série divergente. Pour $u = 1$, on a là un q-analogue de la série d'Euler, la série de Tschakaloff : $\hat{f}(z) = \sum_{n \geqslant 0} q^{n(n-1)/2} z^n$.

3. Application à la classification analytique

Lorsque $k = 2$, $\mathcal{F}(M_0)$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Ext}^1(P_2, P_1)$, que l'on vient de décrire. Dans le cas général, on voit qu'à toute famille $(U_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \in \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathcal{V}(r_i, r_j, \mu_i, \mu_j)$ on peut associer une matrice A de la forme (1), donc un élément de $\mathcal{F}(M_0)$.

Théorème 3.1. *On obtient ainsi une bijection $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathcal{V}(r_i, r_j, \mu_i, \mu_j) \simeq \mathcal{F}(M_0)$. La dimension obtenue de cet espace affine est $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} r_i r_j (\mu_i - \mu_j)$,* i.e. *l'aire contenue « au dessus » du polygone de Newton.*

Ce théorème admet une variante explicite (au sens transcendant). Soit A_U une matrice de la forme (1), où $U = (U_{i,j}) \in \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathrm{M}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\}))$. L'unique couple $(\underline{F}, V)$ avec $\underline{F} = (F_{i,j}) \in \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathrm{M}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\}))$ et $V = (V_{i,j}) \in \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathcal{V}(r_i, r_j, \mu_i, \mu_j)$, tel que la matrice associée $F \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\}))$ définit un isomorphisme de A_U avec A_V, se calcule en résolvant un système d'équations avec seconds membres : pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, $z^{-\mu_i} A_i F_{i,j} + \sum_{i<l<j} V_{i,l} F_{l,j} + V_{i,j} = U_{i,j} + \sum_{i<l<j} (\sigma_q F_{i,l}) U_{l,j} + z^{-\mu_j} (\sigma_q F_{i,j}) A_j$. La formule $(F_{i,j}, V_{i,j}) = \mathrm{Red}(\mu_i, A_i, \mu_j, A_j, U_{i,j} + \sum_{i<l<j} (\sigma_q F_{i,l}) U_{l,j} - \sum_{i<l<j} V_{i,l} F_{l,j})$ permet le calcul par récurrence sur $j - i$ des $(F_{i,j}, V_{i,j})$.

Références

[1] D.G. Babbitt, V.S. Varadarajan, Local moduli for meromorphic differential equations, Astérisque (1989) 169–170.
[2] J.-P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Math. 43 (1992) 159–176.
[3] G.D. Birkhoff, P.E. Guenther, Note on a canonical form for the linear q-difference system, Proc. Nat. Acad. Sci. 27 (4) (1941) 218–222.
[4] M. van der Put, M.F. Singer, Galois Theory of Difference Equations, in: Lecture Notes in Math., vol. 1666, Springer-Verlag, 1997.
[5] J.-P. Ramis, About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) I (1) (1992) 53–94.
[6] J.-P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang, Local analytic classification of irregular q-difference equations, 2003, in preparation.
[7] J. Sauloy, La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé, Ann. Inst. Fourier (2004) sous presse.