Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 59–64
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie analytique

Estimation effective de la perte de positivité dans la régularisation des courants

Dan Popovici

Institut Fourier, bâtiment Maths Pures, 100, rue des Maths, BP 53, 38041 Grenoble cedex, France

Reçu et accepté le 12 novembre 2003

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Soit (X, ω) une variété hermitienne compacte et $T \geqslant \gamma$ un courant quasi-positif d-fermé de bidegré $(1,1)$ sur X. Une variante du théorème de régularisation de Demailly affirme que T est la limite faible d'une suite de courants T_m à singularités analytiques de coefficient $1/m$, dans la même classe de cohomologie que T, avec des nombres de Lelong qui convergent vers ceux de T, et avec une perte de positivité tendant vers zéro. Nous montrons que si la $(1,1)$-forme γ est supposée fermée et de classe C^∞, les courants régularisants T_m peuvent être choisis de sorte que $T_m \geqslant \gamma - \frac{C}{m}$ pour une constante $C > 0$ indépendante de m. ***Pour citer cet article : D. Popovici, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Effective estimate of positivity loss in current regularizations. Let (X, ω) be a compact complex Hermitian manifold, and let $T \geqslant \gamma$ be a d-closed $(1,1)$ almost positive current on X. A variant of Demailly's regularization-of-currents theorem states that T is the weak limit of a sequence of $(1,1)$-currents T_m with analytic singularities of coefficient $1/m$, lying in the same cohomology class as T, whose Lelong numbers converge to those of T, and with a loss of positivity decaying to zero. We prove that if the $(1,1)$-form γ is assumed to be closed and C^∞, the regularizing currents T_m can be chosen such that $T_m \geqslant \gamma - \frac{C}{m}$ for a constant $C > 0$ independent of m. ***To cite this article: D. Popovici, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

Let (X, ω) be a compact complex Hermitian manifold, and let $T \geqslant \gamma$ be a d-closed $(1,1)$ almost positive current on X, where γ is a real continuous $(1,1)$-form. The current T can be globally written as $T = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar{\partial}\varphi$, where α is a global C^∞ $(1,1)$-form and φ is an almost psh function on X (i.e. φ can be locally written as the sum of a plurisubharmonic (psh) function and a C^∞ function). The current T is said to have analytic singularities of coefficient c if the potential φ can be locally written as $\varphi = \frac{c}{2}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2) + v$, where $f_1, \ldots, f_N$ are holomorphic functions, v is a locally bounded function, and c is a positive real number. A variant of Demailly's

Adresse e-mail : Dan.Popovici@ujf-grenoble.fr (D. Popovici).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.11.011

regularization-of-currents theorem (see [1]) states the existence of a sequence of almost psh functions $(\varphi_m)_m$ with analytic singularities of coefficient $1/m$ such that

(i) $\varphi(x) < \varphi_m(x) < \sup_{|\zeta - x| < r} \varphi(\zeta) + C(|\log r|/m + r + 1/\sqrt{m})$, with respect to some coordinate open sets covering X, for all $r > 0$ such that the ball $B(x, r)$ is contained in a coordinate patch. In particular, $(\varphi_m)_m$ converges pointwise and in $L^1(X)$ norm to φ (and therefore the currents $T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m$ converge weakly to T when m tends to $+\infty$), and:

(ii) $\nu(\varphi, x) - n/m \leqslant \nu(\varphi_m, x) \leqslant \nu(\varphi, x)$, for all $x \in X$;

(iii) $T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \varepsilon_m \omega$, for some $\varepsilon_m > 0$ decaying to 0.

Our purpose is to give an effective estimate for the terms ε_m which measure the positivity loss of the regularizing currents T_m with respect to the initial current T as $m \to +\infty$. In the fairly general case of a form γ of class C^1 we obtain the bound $C/\sqrt[4]{m}$ for a constant $C > 0$ independent of m. This bound, which is probably not optimal, can be strengthened into the optimal bound C/m under the slightly more restrictive hypothesis that γ be closed and C^∞. Our result is the following.

Proposition 0.1. *Let* (X, ω) *be a compact Hermitian manifold and let* $T = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi \geqslant \gamma$ *be a closed almost positive* $(1,1)$*-current satisfying* $T \geqslant \gamma$ *for some continuous real* $(1,1)$*-form* γ.

(i) *If* γ *is assumed to be closed and* C^∞, *then the regularizing currents* $T_m \to T$ *with analytic singularities of coefficient* $1/m$ *can be chosen such that*

$$T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \frac{C}{m}\omega,$$

for a constant $C > 0$ *independent of* m.

(ii) *If* γ *is only assumed to be of class* C^1, *then the regularizing currents* $T_m \to T$ *can be chosen to satisfy the weaker positivity condition*

$$T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \frac{C}{\sqrt[4]{m}}\,\omega,$$

for a constant $C > 0$ *independent of* m.

The above Hessian estimate is part of a larger project aiming at obtaining a badly needed control of the Monge–Ampère masses of the currents T_m^p, for $p = 1, \ldots, n = \dim X$. This would enable us to study generalizations of Demailly's Morse inequalities for arbitrary singular metrics, as well as new characterizations of Moishezon manifolds. The proof makes use of a local approximation procedure of arbitrary almost psh functions by almost psh functions with analytic singularities (see [1]), followed by a standard patching procedure. The crucial argument is based on Hörmander's L^2 estimates for the $\bar\partial$ operator (see [2]) enabling us to keep track of positivity losses as we shift from one coordinate patch to another. It consists in rendering effective the techniques already developed in [1].

1. L'estimation de la perte de positivité

Soit T un courant d-fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété hermitienne compacte (X, ω) de dimension n. Supposons que $T \geqslant \gamma$, où γ est une $(1,1)$-forme réelle continue sur X. Alors T admet une écriture globale $T = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi$, où α est une $(1,1)$-forme C^∞ et φ est une fonction quasi-psh sur X (à savoir, une fonction qui est localement la somme d'une fonction psh et d'une fonction localement bornée). On dit que le courant T est à singularités analytiques de coefficient c si le potentiel φ s'écrit localement sous la forme $\varphi = \frac{c}{2}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2) + v$, où $f_1, \ldots, f_N$ sont des fonctions holomorphes, v est une fonction localement bornée et c est un réel positif. Une variante du théorème de régularisation des courants de Demailly (cf. [1]) affirme l'existence d'une suite de courants $T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m$ à singularités analytiques de coefficient $1/m$, convergeant faiblement vers T et vérifiant l'estimation $T_m \geqslant \gamma - \varepsilon_m\omega$ pour une suite $\varepsilon_m > 0$ qui décroît vers 0, avec, de plus, les propriétés (i) et (ii) ci-dessus.

Dans ce qui suit nous estimons l'ordre de grandeur de ε_m, qui mesure la perte de positivité de T_m par rapport au courant initial T, lorsque $m \to +\infty$. Notre résultat est le suivant.

Proposition 1.1. *Soit (X, ω) une variété hermitienne compacte et $T = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi \geqslant \gamma$ un courant quasi-positif fermé de bidegré $(1,1)$ vérifiant $T \geqslant \gamma$ pour une $(1,1)$-forme réelle continue γ.*

(i) *Si γ est supposée fermée et C^∞, alors les courants régularisants $T_m \to T$ à singularités analytiques de coefficient $\frac{1}{m}$ peuvent être choisis de sorte que*

$$T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \frac{C}{m}\omega,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de m.

(ii) *Si γ est supposée seulement de classe C^1, alors les courants régularisants $T_m \to T$ à singularités analytiques de coefficient $\frac{1}{m}$ peuvent être choisis de sorte que* :

$$T_m = \alpha + \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \frac{C}{\sqrt[4]{m}}\,\omega,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de m.

L'estimation (ii) n'est vraisemblablement pas optimale, mais sous les hypothèses légèrement plus restrictives faites sur γ au point (i) nous obtenons l'ordre de grandeur optimal de $1/m$ pour ε_m. Ces estimations du hessien sont faites dans le but d'obtenir un contôle des masses de Monge–Ampère des puissances extérieures T_m^p, $p = 1, \ldots, n = \dim X$, lorsque $m \to +\infty$. Ceci permettrait de déduire des inégalités de Morse pour des métriques singulières à singularités quelconques, généralisant les inégalités de Morse holomorphes de Demailly, et d'étudier ensuite de nouvelles caractérisations des variétés de Moishezon.

Quitte à remplacer T par $T - \alpha$ et γ par $\gamma - \alpha$, on peut supposer $T = \mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi \geqslant \gamma$. Soit $\delta > 0$. La variété X étant compacte, il existe quatre recouvrements finis $(B_j^{(3)})_j$, $(B'_j)_j$, $(B''_j)_j$ et $(B_j)_j$ de X par des boules de coordonnées concentriques de rayons respectifs $\frac{\delta}{2}$, δ, $\frac{3}{2}\delta$ et 2δ. La forme γ étant fermée, elle est localement exacte. Il existe alors, pour chaque boule B_j, une fonction C^∞ h_j telle que $\gamma = \mathrm{i}\partial\bar\partial h_j$ sur B_j. La fonction $h_j - h_k$ est pluriharmonique sur $B_j \cap B_k$ (car $\mathrm{i}\partial\bar\partial(h_j - h_k) = 0$) et on peut supposer, quitte à rétrécir les boules B_j, qu'il existe une fonction holomorphe h_{jk} sur $B_j \cup B_k$ telle que $h_j - h_k = \operatorname{Re} h_{jk}$ sur $B_j \cap B_k$. On pose

$$\psi_j = \varphi - h_j, \quad \text{fonction plurisousharmonique sur } B_j.$$

On applique à chaque ψ_j le procédé d'approximation par des fonctions plurisousharmoniques à singularités analytiques décrit dans la Proposition 3.1 de [1]. Ainsi, si $(\sigma_{j,l})_{l \geqslant 0}$ est une base orthonormée de l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}_{B_j}(m\psi_j) = \{f \in \mathcal{O}(B_j);\ \int_{B_j} |f|^2 \mathrm{e}^{-2m\psi_j}\,\mathrm{d}\lambda < +\infty\}$, on pose :

$$\psi_{j,m} = \frac{1}{2m}\log\sum_{l=0}^{+\infty}|\sigma_{j,l}|^2.$$

La suite $(\psi_{j,m})_m$ converge vers ψ_j en chaque point de B_j et dans la topologie L^1_{loc}. On recolle les approximations quasi-psh locales $\varphi_{j,m} = \psi_{j,m} + h_j$ de φ sur B_j en une approximation globale

$$\varphi_m(z) = \sup_{B''_j \ni z}\left(\varphi_{j,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}\big(\delta^2 - |z^j|^2\big)\right),$$

où $C_1(\delta) > 0$ est une constante ne dépendant que de δ dont on précisera le choix plus bas et z^j est un système de coordonnées holomorphes locales centrées au centre de B_j. Comme $\mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_{j,m} \geqslant \mathrm{i}\partial\bar\partial h_j = \gamma$ sur B_j, le hessien de φ_m vérifie l'estimation

$$\mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \frac{C'C_1(\delta)}{m}\omega \quad \text{sur } X, \tag{1}$$

où $C' > 0$ est une constante telle que $\mathrm{i}\partial\bar\partial|z^j|^2 \leqslant C'\omega$ sur B_j pour tous les j, si les fonctions quasi-psh $\varphi_{j,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}(\delta^2 - |z^j|^2)$ vérifient la condition de recollement

$$\varphi_{j,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}\big(\delta^2 - |z^j|^2\big) \leqslant \varphi_{k,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}\big(\delta^2 - |z^k|^2\big), \quad \text{pour } z \in \big(\overline{B}''_j \setminus B'_j\big) \cap B^{(3)}_k \text{et tout } m. \tag{$\star$}$$

Par ailleurs, on a :

$$\psi_j - \psi_k = h_k - h_j = -\operatorname{Re} h_{jk} \quad \text{sur } B_j \cap B_k.$$

Lemme 1.2. *Il existe une constante $C_6(n) > 0$ ne dépendant que de la dimension n de X telle que l'on ait l'estimation uniforme suivante* :

$$\psi_{j,m} - \psi_{k,m} \leqslant -\operatorname{Re} h_{jk} + \frac{C(\delta)}{m} \quad \textit{sur } B''_j \cap B''_k,$$

où $C(\delta) = \frac{1}{2}\log(2 + 2C_6(n)\,\mathrm{e}^{16\delta^2}/\delta^2)$.

Démonstration. Soit f_j une fonction holomorphe sur B_j telle que

$$\int_{B_j} |f_j|^2\,\mathrm{e}^{-2m\psi_j}\,\mathrm{d}\lambda = 1,$$

où $\mathrm{d}\lambda$ est la mesure de Lebesgue définie par les coordonnées de la carte qui contient B_j et B_k. Comme $\psi_j - \psi_k = -\operatorname{Re} h_{jk}$ sur $B_j \cap B_k$, on obtient :

$$\int_{B_j\cap B_k} |f_j|^2\,\mathrm{e}^{-2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk})}\,\mathrm{d}\lambda \leqslant 1.$$

Soit $x_0 \in B''_j \cap B''_k$. Nous allons démontrer qu'il existe une fonction f_k holomorphe sur B_k telle que $f_k(x_0) = f_j(x_0)$ et qui vérifie l'estimation

$$\int_{B_k} |f_k|^2\,\mathrm{e}^{-2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk})}\,\mathrm{d}\lambda \leqslant 2\left(1 + C_6(n)\frac{\mathrm{e}^{16\delta^2}}{\delta^2}\right).$$

L'idée, classique, est d'utiliser les estimations L^2 de Hörmander pour résoudre une équation du $\bar\partial$ sur B_k. Soit θ une fonction tronquante à support dans $B(x_0, \frac{\delta}{4}) \subset B_j \cap B_k$ telle que $\theta \equiv 1$ sur $B(x_0, \frac{\delta}{8})$. On résout l'équation

$$\bar\partial g = \bar\partial(\theta f_j) \quad \text{sur } B_k,$$

avec le poids strictement plurisousharmonique

$$2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk}) + 2n\log|z - x_0| + |z - x_0|^2.$$

On obtient ainsi une solution g satisfaisant l'estimation

$$\int\limits_{B_k} \frac{|g(z)|^2}{|z-x_0|^{2n}}\, \mathrm{e}^{-2m(\psi_k(z)-\mathrm{Re}\, h_{jk})}\, \mathrm{e}^{-|z-x_0|^2}\, \mathrm{d}\lambda(z) \leqslant 2 \int\limits_{B_k} \frac{|\bar\partial\theta|^2 |f_j|^2}{|z-x_0|^{2n}}\, \mathrm{e}^{-2m(\psi_k(z)-\mathrm{Re}\, h_{jk})} \mathrm{e}^{-|z-x_0|^2}\, \mathrm{d}\lambda(z).$$

Il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de m et de δ telle que $|\bar\partial\theta| \leqslant C_3/\delta$. Comme le support de $\bar\partial\theta$ est inclus dans $B(x_0, \frac{\delta}{4}) \setminus B(x_0, \frac{\delta}{8})$, on a $1/|z-x_0|^{2n} \leqslant C_4(n)/\delta^{2n}$, sur le support de $\bar\partial\theta$. Ceci entraîne que l'intégrale de droite est majorée par

$$\frac{C_3^2 C_4(n)}{\delta^{2n+2}} \int\limits_{B_j\cap B_k} |f_j|^2\, \mathrm{e}^{-2m(\psi_k-\mathrm{Re}\, h_{jk})}\, \mathrm{d}\lambda \leqslant \frac{C_3^2 C_4(n)}{\delta^{2n+2}}.$$

Par ailleurs, l'intégrale de gauche est minorée par

$$\frac{C_5(n)}{\mathrm{e}^{16\delta^2}\delta^{2n}} \int\limits_{B_k} |g|^2\, \mathrm{e}^{-2m(\psi_k-\mathrm{Re}\, h_{jk})}\, \mathrm{d}\lambda,$$

car pour $z \in B_k$, $1/\mathrm{e}^{|z-x_0|^2} \geqslant 1/\mathrm{e}^{16\delta^2}$ et $1/|z-x_0|^{2n} \geqslant C_5(n)/\delta^{2n}$. En combinant les deux, on obtient l'estimation

$$\int\limits_{B_k} |g|^2\, \mathrm{e}^{-2m(\psi_k-\mathrm{Re}\, h_{jk})}\, \mathrm{d}\lambda \leqslant C_6(n)\frac{\mathrm{e}^{16\delta^2}}{\delta^2}.$$

La non-intégrabilité de $|z-x_0|^{-2n}$ force la solution g à s'annuler en x_0. La fonction recherchée est $f_k = \theta f_j - g$. Elle est holomorphe sur B_k et $f_k(x_0) = f_j(x_0)$. Sa norme L^2 vérifie l'estimation

$$\int\limits_{B_k} |f_k|^2\, \mathrm{e}^{-2m(\psi_k-\mathrm{Re}\, h_{jk})}\, \mathrm{d}\lambda \leqslant 2\left(1 + C_6(n)\frac{\mathrm{e}^{16\delta^2}}{\delta^2}\right).$$

En ajustant f_k par une constante pour qu'elle soit dans la sphère unité de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{B_k}(m(\psi_k - \mathrm{Re}\, h_{jk}))$, en prenant le sup de $\log|f_j(x_0)|$ et de $\log|f_k(x_0)|$ sur tous les f_j et f_k dans la boule unité de l'espace de Hilbert correpondant, on obtient l'estimation

$$\psi_{j,m}(x_0) \leqslant \psi_{k,m}(x_0) - \mathrm{Re}\, h_{jk} + \frac{\log 2}{2m} + \frac{1}{2m}\log\left(1 + C_6(n)\frac{\mathrm{e}^{16\delta^2}}{\delta^2}\right).$$

Cette estimation est uniforme par rapport au point $x_0 \in B''_j \cap B''_k$, car pour tout point $x \in B''_j \cap B''_k$, on a $B(x, \frac{\delta}{4}) \Subset B_j \cap B_k$, donc le choix du rayon $\frac{\delta}{4}$ est uniforme. L'estimation uniforme annoncée pour $\psi_{j,m} - \psi_{k,m}$ sur $B''_j \cap B''_k$ s'ensuit. □

Le lemme précédent implique aussitôt :

$$\varphi_{j,m} - \varphi_{k,m} = \psi_{j,m} - \psi_{k,m} + \mathrm{Re}\, h_{jk} \leqslant \frac{C(\delta)}{m} \quad \text{sur } B''_j \cap B''_k.$$

Comme $(\delta^2 - |z^k|^2) - (\delta^2 - |z^j|^2) \geqslant \frac{3}{4}\delta^2$ pour $z \in (\overline{B}''_j \setminus B'_j) \cap B^{(3)}_k$, la condition de recollement $(\star)$ est satisfaite dès que l'on a l'inégalité :

$$\frac{C(\delta)}{m} \leqslant \frac{3}{4}\frac{C_1(\delta)}{m}\delta^2 \quad \text{pour tout } m.$$

On peut alors fixer $\delta > 0$ et choisir la constante $C_1(\delta)$ de sorte que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite. Comme on l'a vu plus haut (cf. (1)), la perte de positivité du hessien de φ_m par rapport à γ est de $\frac{C' C_1(\delta)}{m}$. L'affirmation (i) de la Proposition 1.1 est démontrée. □

Pour obtenir l'affirmation (ii) de la Proposition 1.1 on ne peut plus travailler avec des recouvrements fixes de la variété X. On est amené à choisir $\delta = \delta(m) = 1/\sqrt[3]{m}$. La forme γ n'étant plus localement exacte, elle peut seulement être approchée localement par des formes exactes $\mathrm{i}\partial\bar\partial h_j$ et le défaut d'approximation introduit une perte supplémentaire de positivité pour T_m.

Pour $\delta > 0$, considérons un module de continuité $\varepsilon(\delta)$ pour la forme γ sur les ouverts B_j, à savoir une fonction $\varepsilon(\delta) > 0$ telle que $\lim_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta) = 0$ et $\gamma_x - \gamma_{x'} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon(\delta)\omega_x$, pour tous $x, x' \in B_j$. Pour tout j, soit $\tau_j : B_j \to B(a_j, 2\delta)$ l'isomorphisme défini par les coordonnées de B_j, et γ_j la $(1,1)$-forme à coefficients constants sur $B(a_j, 2\delta)$ telle que $\tau_j^\star\gamma_j = \gamma - \varepsilon(\delta)\omega$ au point $\tau_j^{-1}(a_j)$. On a ainsi :

$$0 \leqslant \gamma - \tau_j^\star\gamma_j \leqslant 2\varepsilon(\delta)\omega, \quad \text{sur } B_j,$$

pour $\delta > 0$ petit. Si $\tilde\gamma_j$ est la fonction quadratique homogène en $z - a_j$ telle que $\frac{\mathrm{i}}{\pi}\partial\bar\partial\tilde\gamma_j = \gamma_j$ sur $B(a_j, 2\delta)$, on pose :

$$\psi_j = \varphi - \tilde\gamma_j \circ \tau_j, \quad \text{fonction plurisousharmonique sur } B_j.$$

On définit l'approximation globale de φ sur X par

$$\varphi_m(z) = \sup_{B_j''\ni z}\left(\psi_{j,m}(z) + \tilde\gamma_j\big(z^j\big) + \frac{m^{3/4}}{m}\big(\delta^2 - \big|z^j\big|^2\big)\right), \quad \text{où } z^j = \tau_j(x) \text{ est la coordonnée sur } B_j,$$

et on observe que son hessien vérifie la minoration :

$$\mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi_m \geqslant \gamma - \left(2\varepsilon(\delta) + C'\frac{1}{m^{1/4}}\right)\omega.$$

L'ajout du terme $\frac{m^{3/4}}{m}(\delta^2 - |z^j|^2)$ dans la définition de l'approximation globale assure la condition de recollement $(\star)$. (À la différence du cas précédent, on a remplacé $C_1(\delta)$ par $m^{3/4}$.) La forme γ étant supposée de classe C^1, le module de continuité $\varepsilon(\delta)$ peut être choisi égal à $\mathrm{Const}\cdot\delta = \mathrm{Const}\cdot 1/\sqrt[3]{m}$. Les détails se trouvent dans [3].

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Jean-Pierre Demailly pour son soutien constant.

Références

[1] J.-P. Demailly, Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. Algebraic Geom. 1 (1992) 361–409.
[2] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator, Acta Math. 113 (1965) 89–152.
[3] D. Popovici, Quelques applications des méthodes effectives en géométrie analytique, Thèse Univ. de Grenoble, en préparation.