Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 27–30

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Existence globale pour une classe d'équations d'ondes perturbées

Nicola Visciglia

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Pisa, Via F. Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italie

Reçu le 20 août 2003 ; accepté après révision le 4 novembre 2003

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

Dans cet article nous prouvons que le problème de Cauchy suivant est bien posé :

$$\partial_{tt}u - \Delta u + a_0\partial_t u + \sum_{i=1}^{3} a_i\partial_{x_i}u + Vu = -u|u|^{\alpha-1}, \quad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^3, \quad u(0)=f, \quad \partial_t u(0)=g,$$

où $(f,g)\in\dot H^1(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)$ sont à support compact, $1\leqslant\alpha<5$, $a_i(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^3)$, $V(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R}_t, L^3(\mathbb{R}_x^3))$. ***Pour citer cet article : N. Visciglia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Globale existence for a class of semilinear perturbed wave equations. In this paper we prove a global well-posedness result for the following Cauchy problem:

$$\partial_{tt}u - \Delta u + a_0\partial_t u + \sum_{i=1}^{3} a_i\partial_{x_i}u + Vu = -u|u|^{\alpha-1}, \quad \text{for } (t,x)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^3, \quad u(0)=f, \quad \partial_t u(0)=g,$$

where the initial data $(f,g)\in\dot H^1(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)$ are compactly supported, $1\leqslant\alpha<5$, $a_i(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^3)$, $V(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R}_t; L^3(\mathbb{R}_x^3))$. ***To cite this article: N. Visciglia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Dans ce travail nous prouvons que le problème de Cauchy hyperbolique suivant est bien posé :

$$\partial_{tt}u - \Delta u + a_0\partial_t u + \sum_{i=1}^{3} a_i\partial_{x_i}u + Vu = -u|u|^{\alpha-1}, \quad \text{où } (t,x)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^3, \quad u(0)=f, \quad u_t(0)=g. \tag{1}$$

Adresse e-mail : viscigli@mail.dm.unipi.it (N. Visciglia).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.11.007

Nous supposons que les coefficients $a_i(t,x)$, pour $i = 0, 1, 2, 3$, et $V(t,x)$ sont mesurables et en plus $a_i(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$, $V(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_t, L^3(\mathbb{R}^3_x))$. Rappelons que dans le cas de l'équation des ondes libres, i.e. $a_i = V = 0$, beaucoup de résultats ont été établis sur l'Éq. (1). Dans cette direction nous rappelons le travail de Jörgens [5], où l'auteur prouve que le problème de Cauchy (1) est bien posé, dans le cas où $a_i = V = 0$, $1 \leqslant \alpha < 5$ et les données initiales $(f,g) \in C^2(\mathbb{R}^3) \times C^1(\mathbb{R}^3)$ sont à support compact. L'outil principal utilisé dans le travail de Jörgens repose sur une représentation explicite de la solution fondamentale de l'équation des ondes libres linéaire. Ce résultat a été amélioré dans les travaux [2,3] où est prouvée l'existence et l'unicité de la solution pour $1 \leqslant \alpha < 5$ et pour des données initiales qui sont à support compact mais qui sont moins régulières que celles considerées par Jörgens. Plus précisement les auteurs supposent que $(f,g) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$. Le cas critique, i.e. $a_i = V = 0$ et $\alpha = 5$, il a été traité dans les travaux [9,4].

Une famille trés large de pérturbations de l'équation des ondes libres qui dépendent du temps a été considerée par Kapitansky dans [6]. Les perturbations qu'il considére sont données par des opérateurs pseudodifferentiels. Le point principale de notre travail tiens dans la faible régularité qu'on éxige aux coefficients a_i, V. En fait nous ne supposons que des propriétées de sommabilité sur les coefficients a_i, V, aucune hypothèse n'est faite sur leur régularité.

Avant d'ennoncer notre résultat on commence par définir le sens que nous donnons aux solutions de l'Éq. (1).

Définition 1.1. Une solution pour le problème (1) est une distribution u telle que pour tout $0 < T < \infty$

$$u \in C\big([0,T]; \dot{H}^1\big(\mathbb{R}^3\big)\big) \cap C^1\big([0,T]; L^2\big(\mathbb{R}^3\big)\big) \cap L^{2\alpha/(\alpha-3)}\big([0,T], L^{2\alpha}\big(\mathbb{R}^3\big)\big)$$

et satisfait à

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^3} (\partial_{tt}\phi - \Delta\phi)u + \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(a_0\partial_t u + \sum_{i=1}^3 a_i \partial_{x_i} u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Vu + u|u|^{\alpha-1}\right)\phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^3} g(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\partial_t\phi(0,x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pour toute $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.2. *Supposons que $a_i(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et que $V(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_t, L^3(\mathbb{R}^3_x))$, alors pour tout $1 \leqslant \alpha < 5$ et pour tout $(f,g) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact l'Éq.* (1) *a une unique solution.*

L'idée principale de la démonstration est d'établir des estimations de Strichartz pour le problème linéaire associé à (1) ; c'est-à-dire pour l'équation suivante :

$$\partial_{tt}u - \Delta u + a_0\partial_t u + \sum_{i=1}^3 a_i \partial_{x_i} u + Vu = F, \quad \text{for } (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x, \qquad u(0) = f, \quad u_t(0) = g. \tag{2}$$

Ces estimations seront utilisées pour prouver que le problème sémilinéaire est bien-posé localement en temps. Ensuite à l'aide d'une estimation a priori de l'énergie des solutions de (1) et du principe de continuation classique, voir [8], nous prouvons que le problème est globalement bien-posé.

Remarque 1. Comme les coefficients a_i, V dépendent du temps et en plus ne sont que mesurables il n'est pas clair que le problème linéaire (2) soit bien posé au sens classique dans l' espace de l'énergie. Une fois que l'existence et l'unicité des solution est établie dans l'espace de l'énergie, on prouvera des estimations de Strichartz.

Les estimations principales que nous prouvons pour l'équation linéaire (2) sont contenues dans la proposition suivante.

Proposition 1.3. *Supposons que*

$$a_i \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x), \quad V \in L^\infty(\mathbb{R}_t, L^3(\mathbb{R}^3_x)), \quad F \in L^1(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}^3_x)), \quad (f,g) \in \dot H^1(\mathbb{R}^3_x) \times L^2(\mathbb{R}^3_x)$$

et que (p,q) *est un couple de nombres tel que*

$$(p,q) \in [2,\infty] \times [2,\infty], \quad (p,q) \neq (2,\infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{3}{q} = \frac{1}{2},$$

alors il existe une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}_t; \dot H^1(\mathbb{R}^3_x) \cap C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}^3_x))$ *de l'Éq.* (2) *vérifiant pour tout* $0 < \overline{T} < \infty$ *l' estimation suivante*

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C^0((0,T);\dot H^1(\mathbb{R}^3_x))} + \|u\|_{C^1((0,T);L^2(\mathbb{R}^3_x))} + \|u\|_{L^p((0,T);L^q(\mathbb{R}^3_x))} \\ &\quad \leqslant C\big(\|f\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3_x)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} + \|F\|_{L^1((0,T);L^2(\mathbb{R}^3_x))}\big), \end{aligned} \tag{3}$$

où $C := C(\overline{T}, p, q) > 0$ *et* $0 < T < \overline{T} < \infty$.

Remarque 2. Dans [7] il est prouvé que si u est solution de (2) avec $a_i = V = 0$ alors on a :

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}_t, L^s(\mathbb{R}^3_x))} \leqslant C\big(\|f\|_{\dot H^\sigma(\mathbb{R}^3_x)} + \|g\|_{H^{\sigma-1}(\mathbb{R}^3_x)} + \|F\|_{L^{\tilde r}(\mathbb{R}_r, L^{\tilde s}(\mathbb{R}^3_x))}\big)$$

pourvu que

$$(r,s) \neq (2,\infty), \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\tilde r} + \frac{1}{\tilde s} \geqslant \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{r} + \frac{3}{s} = -2 + \frac{1}{\tilde r} + \frac{3}{\tilde s} = \frac{3}{2} - \sigma.$$

Ces conditions peuvent etre bien visualisées à l'aide de la Fig. 1. En fait les couples $(\frac{1}{r}, \frac{1}{s})$ admissibles dans le cas libre sont les points qui appartiennent au triangle $0AB$, sauf le point B. Alors que les couples $(\frac{1}{r}, \frac{1}{s})$ pour lesquels nous prouvons les estimations de Strichartz associées au problème perturbé (2) sont ceux qui appartiennent au segment BC, sauf le point B. En tout cas ces estimations sont suffisantes pour montrer que le problème (1) est globalement bien posé.

Remarque 3. Une autre différence essentielle entre le cas libre et le cas perturbé est liée au fait que, dans le premier cas on prouve des estimations globales en temps alors que dans le second nous ne prouvons que des estimations locales en temps.

Dans [1] sont établies des estimations de Strichartz globales en temps dans le cas $a_i = 0$, $V(t,x) = V(x) \geqslant 0$ avec $|V(x)| \leqslant C/(1+|x|)^{2+\epsilon_0}$, où $C, \epsilon_0 > 0$ sont des constantes. Nous signalons que pour la classe d'equations que nous avons considéré, en général on peut pas établir des estimations de Strichartz globales en temps, comme le montre si bien le prochaine exemple.

Exemple 1. Soit $\overline{V} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ un potentiel tel que $\overline{V}(\bar x) < 0$ en un point $\bar x \in \mathbb{R}^3$. Il est facile de prouver, à l'aide de la compacité des injections de Sobolev pour les domaines bornés, qu'il existe un minimisant de l'énergie de Dirichlet $\dot H^1(\mathbb{R}^3) \ni u \to \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \in \mathbb{R}$, sur la varieté suivante : $M_V := \{u \in \dot H^1(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} V|u|^2\,\mathrm{d}x = -1\}$.

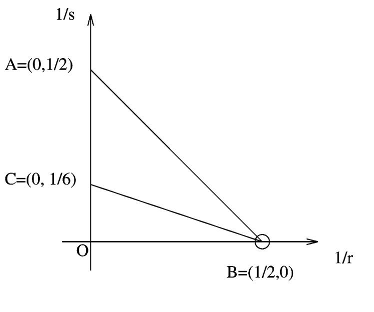

Fig. 1. Domaine des paramètres.

Si $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ est un minimisant alors à l'aide des multiplicateurs de Lagrange on peut déduire que u_0 est solution de l'équation elliptique suivante : $-\Delta u_0 + \lambda \overline{V} u_0 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc la function $u(t,x) := u_0(x)$ est solution de (2), où $a_i = 0$, $V(t,x) = \lambda \overline{V}(x)$, $F = 0$, $f = u_0$, $g = 0$.

Mais comme $u(t,x)$ ne dépend que des variables de l'espace celle ci n'est pas integrable globalement en temps.

Remarque 4. Le problème des conditions optimales sur les coefficients a_i, V pour que l'equation associée (2) satisfasse des estimations de Strichartz analogues au cas libre demeure ouvert. Nous signalons en outre que le problème d'existence locale pour le problème (1) avec des données initiales moins régularières, c'est-à-dire pour des données $(f,g) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ avec $s < 1$, reste également ouvert.

2. Idée de la démonstration de la Proposition 1.3

Dans cette section on va décrire, sans rentrer dans les détails techniques, l'idée de la démonstration de la Proposition 1.3. Comme on a remarqué, la faible régularité demandée aux coefficients a_i et V, pose déjà des problèmes sur l'existence de solutions de (2) dans les espaces classiques de l'énergie. Pour surmonter cette difficulté on applique le théorème des contractions, qui nous permet de montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour l'application suivante : $Y_T \ni u \to N(u) \to v \in Y_T$, où : $Y_T := C^0([0,T]; \dot{H}^1(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3_x))$, $N(u) := -a_0 \partial_t u - \sum_{i=1}^3 a_i \partial_{x_i} u - Vu$ et $v \in Y_T$ est l'unique solution de

$$\partial_{tt} v - \Delta v = N(u) + F, \quad u(0) = f, \quad \partial_t u(0) = g.$$

Cette méthode nous donne l'existence et l'unicité de solution dans Y_T pour l'Éq. (2). On peut aussi prouver que pour cette solution u on a l' estimation suivante :

$$\|u\|_{Y_T} \leqslant C(T)\big(\|F\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^3_x))} + \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3_x)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}\big). \tag{4}$$

Pour prouver les estimations $L^p([0,T]; L^q(\mathbb{R}^3_x))$, on écrit l'Éq. (2) satisfaite par u, de la manière suivante :

$$\partial_{tt} u - \Delta u = N(u) + F, \quad u(0) = f, \quad \partial_t u(0) = g.$$

En appliquant les estimations de Strichartz, satisfaites par l'équation des ondes libres, à l'équation précédente on obtient :

$$\|u\|_{L^p_T L^q_x} \leqslant C\big(\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3_x)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} + \|F\|_{L^1_T L^2(\mathbb{R}^3_x)} + \|N(u)\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^3_x))}\big),$$

qui à l'aide de l'inégalité de Hölder et de l'injection de Sobolev nous donne :

$$\|u\|_{L^p([0,T];L^q(\mathbb{R}^3_x))} \leqslant C\big(\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3_x)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} + \|F\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^3_x))}\big) + CT\|u\|_{Y_T},$$

où Y_T denote l'espace fonctionnel de l'énergie. Cette estimation va impliquer, à l'aide de (4), la Proposition 1.3.

Références

[1] V. Georgiev, N. Visciglia, Decay estimates for the wave equation with potential, Comm. Partial Differential Equation, in press.
[2] J. Ginibre, G. Velo, The global Cauchy problem for the nonlinear Klein–Gordon equation, Math. Z. 189 (1985) 487–505.
[3] J. Ginibre, G. Velo, The global Cauchy problem for the nonlinear Klein–Gordon equation. II, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 6 (1989) 15–35.
[4] M.G. Grillakis, Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity, Ann. of Math. 132 (1990) 485–509.
[5] K. Jörgens, Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen, Math. Z. 77 (1961) 295–308.
[6] L.V. Kapitanskiĭ, The Cauchy problem for the semilinear wave equation I, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 163 (Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezhn. Vopr. Teor. Funktsii 19) 188 (1987) 76–104.
[7] M. Keel, T. Tao, Endpoint Strichartz estimates, Amer. J. Math. 120 (1998) 955–980.
[8] I. Segal, Non-linear semi-groups, Ann. of Math. 78 (1963) 339–364.
[9] M. Struwe, Globally regular solutions to the u^5 Klein–Gordon equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 15 (4) (1989) 495–513.