Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 13–18
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Régularité du rayon hyperbolique

Satyanad Kichenassamy

Laboratoire de mathématiques (UMR 6056), CNRS & Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

Reçu et accepté le 26 octobre 2003

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné de classe $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. On montre que si u est la solution maximale de $\Delta u = 4\exp(2u)$, qui tend vers $+\infty$ si $(x, y) \to \partial\Omega$, alors le rayon hyperbolique $v = \exp(-u)$ est de classe $C^{2+\alpha}$ jusqu'au bord. La démonstration repose sur de nouvelles estimations de Schauder pour des équations fuchsiennes elliptiques. ***Pour citer cet article : S. Kichenassamy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

Smoothness of hyperbolic radius. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain of class $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. We show that if u is the maximal solution of $\Delta u = 4\exp(2u)$, which tends to $+\infty$ as $(x, y) \to \partial\Omega$, then the hyperbolic radius $v = \exp(-u)$ is of class $C^{2+\alpha}$ up to the boundary. The proof relies on new Schauder estimates for Fuchsian elliptic equations. ***To cite this article: S. Kichenassamy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain of class $C^{2+\alpha}$, with $0 < \alpha < 1$. Let $d(x, y)$ denote the distance of (x, y) to the boundary. Let u be the maximal solution of

$$-\Delta u + 4\,\mathrm{e}^{2u} = 0. \tag{1}$$

It satisfies $u(x, y) \to \infty$ as $(x, y) \to \partial\Omega$.

The hyperbolic radius v is defined by $v = \exp(-u)$; for its properties and applications see [2]. We prove:

Theorem 0.1. *v is of class $C^{2+\alpha}$ up to the boundary.*

Remark 1. Theorem 0.1 was conjectured in [2, p. 204]. It is proved in [5, Theorem 2.4] that v is of class $C^{2+\beta}$ for some $\beta > 0$, provided that Ω is (convex and) of class $C^{4+\alpha}$. This enables one to justify the formal asymptotics

Adresse e-mail : satyanad.kichenassamy@univ-reims.fr (S. Kichenassamy).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2003.10.037

$v = 2d - d^2(\kappa + \mathrm{o}(1))$, where κ is the curvature of $\partial\Omega$, from which it follows, if Ω is strictly convex, that u is convex near the boundary. Theorem 0.1 is optimal since κ is of class C^α.

Remark 2. An asymptotic expansion of u to second order, for smooth domains, is given in [3, p. 32].

Remark 3. There is an extensive literature on the issue of boundary blow-up; see [1–3,7,9–14] and their references for further details.

The proof rests on the study of the properties of the renormalized unknown w defined by

$$w(x, y) = \frac{v - 2d}{d^2}.$$

This new unknown solves the Fuchsian equation

$$Lw + 2\Delta d = M_w(w), \tag{2}$$

where

$$L = d^2\Delta + 2d\nabla d \cdot \nabla - 2 = \operatorname{div}\bigl(d^2\nabla\bigr) - 2,$$

and M_w is a linear operator with w-dependent coefficients: for any f, we let

$$M_w(f) = \frac{d^2}{2 + dw}[2f\nabla w \cdot \nabla d + d\nabla w \cdot \nabla f] - 2df\Delta d.$$

A synopsis of the proof follows. It uses auxiliary results proved in later subsections.

Synopsis of proof

Let $\Omega' \subset \Omega$ be a thin $C^{2+\alpha}$ domain, on which d is less than a parameter $\delta \leqslant 1/2$, and d is of class $C^{2+\alpha}$. We work throughout on Ω'.

The first step is to establish, using a comparison argument and interior regularity, that

Theorem 0.2. *w and $d^2\nabla w$ are bounded near $\partial\Omega$.*

Theorem 0.7 applied to $L - M_w$ then leads to

Theorem 0.3. *If δ is small, then dw and $d^2\nabla w$ are of class $C^\alpha(\overline{\Omega'})$, and $d\nabla w$ is bounded near $\partial\Omega$.*

Next, one finds w_0 which is smooth enough, and is such that $\widetilde{w} = w - w_0$ has controlled boundary behavior:

Theorem 0.4. *If δ is small, there is a function w_0 such that w_0, $d\nabla w_0$, and $d^2\nabla^2 w_0$ belong to $C^\alpha(\overline{\Omega'})$, and*

$$Lw_0 + 2\Delta d = 0 \quad \text{on } \Omega'.$$

A second comparison argument (see the subsection on the construction of sub- and super-solutions), then yields

Theorem 0.5. *There is a constant γ such that*

$$|\widetilde{w}| \leqslant \gamma d \ln(1/d) \quad \text{on } \Omega'.$$

Applying first Theorem 0.8, then Theorem 0.9, to L, we find

Theorem 0.6. *If δ is small, $d^2\widetilde{w}$ is of class $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega'})$.*

Theorem 0.1 follows.

Scaled Schauder estimates

An operator A is said to be *of type* (I) (on a given domain) if it can be written

$$A = \partial_i\bigl(d^2 a^{ij}\partial_j\bigr) + db^i\partial_i + c,$$

with (a^{ij}) uniformly elliptic and of class C^α, and $b^i,\ c$ bounded.

An operator is said to be *of type* (II) if it can be written

$$A = d^2 a^{ij}\partial_{ij} + db^i\partial_i + c,$$

with (a^{ij}) uniformly elliptic and $a^{ij},\ b^i,\ c$ of class C^α.

Theorem 0.7. *If $Ag = f$, where f and g are bounded and A is of type* (I) *on Ω', then $d\nabla g$ is bounded, and dg and $d^2\nabla g$ belong to $C^\alpha(\Omega'\cup\partial\Omega)$.*

Theorem 0.8. *If $Ag = df$, where f and g are bounded, $g = \mathrm{O}(d^\alpha)$, and A is of type* (I) *on Ω', then $g \in C^\alpha(\Omega'\cup\partial\Omega)$, and $dg \in C^{1+\alpha}(\Omega'\cup\partial\Omega)$.*

Theorem 0.9. *If $Ag = df$, where $f \in C^\alpha(\overline{\Omega'})$, $g = \mathrm{O}(d^\alpha)$, and A is of type* (II) *on Ω', then $d^2 g \in C^{2+\alpha}(\Omega'\cup\partial\Omega)$.*

These results are variants of those in [6, Chapter 6].

Regularity up to the boundary for a model Fuchsian equation

One can localize the problem, using a partition of unity, to the neighborhood of a point P on the boundary. Performing a rigid motion if necessary, we may assume that $\nabla d = (1, 0)$ at P. One then performs the change of coordinates $(x, y) \mapsto (T, Y)$, where $T = d(x, y)$ and $Y = y$. In this coordinate system, L takes the form $L = L_0 + L_1$, where $L_0 = (D + 2)(D - 1) + T^2\partial_Y^2$, where $D = T\partial_T$. We work on $\{0 \leqslant T \leqslant \theta,\ |Y| \leqslant \theta\}$, θ small.

Let k be 2θ-periodic in Y, and let $\tilde k = \int_1^\infty k(T\sigma, Y)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2}$, which solves $(D - 1)\tilde k = -k$. Next, find $h(x, y)$ by solving $\Delta h + \tilde k = 0$, with $h = 0$ for $T = 0$, $h_T = 0$ for $T = \theta$, and periodic conditions in Y. Finally, let $w_1 = T^{-2}[(D - 1)h]$. This function satisfies $L_0 w_1 = k$ and has the required smoothness properties. One then treats equation $(L_0 + L_1)w_0 = k$ by a perturbation argument.

Construction of sub- and super-solutions

Direct computation shows that $-\ln[2d + d^2(w_0 + Ad\ln d)]$ is a super-solution of (1) if A is large and positive, resp. a sub-solution if A is large and negative. One then uses an argument from [4] (see also [12]) which enables one to conclude u lies between these two functions. Theorem 0.5 follows.

Perspectives

The methods of this work may be generalized to produce systematic constructions of comparison functions and expansions, of high order, along the lines of our earlier work on the hyperbolic case (see, e.g., [8]). The systematic introduction of Fuchsian operators enables one to construct comparison functions, justify expansions and determine the optimal regularity of solutions.

1. Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné de classe $C^{2+\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$. On désigne par $d(x, y)$ la distance de (x, y) au bord. Soit u la solution maximale de

$$-\Delta u + 4\,\mathrm{e}^{2u} = 0. \tag{1}$$

Elle satisfait $u(x, y) \to \infty$ quand $(x, y) \to \partial\Omega$.

Le rayon hyperbolique v est défini par $v = \exp(-u)$; pour ses propriétés et applications voir [2]. On montre ici :

Théorème 1.1. *v est de classe $C^{2+\alpha}$ jusqu'au bord.*

Remarque 1. Le Théorème 1.1 a été conjecturé dans [2, p. 204]. Dans [5, Théorème 2.4], on démontre que v est de classe $C^{2+\beta}$ pour un certain $\beta > 0$, si Ω est (convexe et) de classe $C^{4+\alpha}$. Ceci permet de justifier le développement formel $v = 2d - d^2(\kappa + \mathrm{o}(1))$, où κ désigne la courbure du bord, d'où l'on tire, si Ω est strictement convexe, que u est convexe près du bord. Le Théorème 1.1 est optimal car κ est de classe C^α.

Remarque 2. Un développement asymptotique de u à l'ordre deux pour des domaines très réguliers est donné dans [3, p. 32].

Remarque 3. Le problème de l'explosion au bord a été étudié dans de nombreux travaux ; on pourra consulter en particulier [1–3,7,9–14] et leurs références pour une vue plus complète.

La démonstration repose sur l'étude de l'inconnue renormalisée w définie par

$$w(x, y) = \frac{v - 2d}{d^2}.$$

Cette nouvelle inconnue satisfait l'équation fuchsienne

$$Lw + 2\Delta d = M_w(w), \tag{2}$$

où

$$L = d^2\Delta + 2d\nabla d \cdot \nabla - 2 = \operatorname{div}\bigl(d^2\nabla\bigr) - 2,$$

et M_w est un opérateur linéaire à coefficients dépendant de w : pour toute f, on pose

$$M_w(f) = \frac{d^2}{2 + dw}[2f\nabla w \cdot \nabla d + d\nabla w \cdot \nabla f] - 2df\Delta d.$$

On donne un résumé de la preuve, qui utilise des résultats auxiliaires démontrés dans les Sections 3, 4, et 5.

2. Résumé de la preuve

On travaille sur un domaine $\Omega' \subset \Omega$, sur lequel d n'excède pas $\delta \leqslant 1/2$, que l'on prendra assez petit dans la suite, et sur lequel d est est de classe $C^{2+\alpha}$.

La première étape consiste à démontrer, par un argument de comparaison, que

Théorème 2.1. *w et $d^2\nabla w$ sont bornées sur Ω'.*

Le Théorème 3.1 appliqué à $L - M_w$, fournit alors :

Théorème 2.2. *Si δ est petit, dw et $d^2\nabla w$ sont dans $C^\alpha(\overline{\Omega'})$, et $d\nabla w$ est bornée sur Ω'.*

Il faut ensuite trouver w_0 assez régulière, telle que $\widetilde{w} = w - w_0$ soit assez plate au bord (Sections 4 et 5) :

Théorème 2.3. *Si δ est assez petit, il existe une fonction w_0 telle que w, $d\nabla w$, et $d^2\nabla^2 w$ sont dans $C^\alpha(\overline{\Omega'})$ et vérifie*

$$Lw_0 + 2\Delta d = 0$$

sur Ω'.

Un second argument de comparaison (voir Section 5) fournit alors :

Théorème 2.4. *Il existe une constante γ telle que*

$$|\widetilde{w}| \leqslant \gamma d \ln(1/d)$$

sur Ω'.

Appliquant le Théorème 3.2, puis le Théorème 3.3 à L, il vient

Théorème 2.5. *Si δ est petit, $d^2\widetilde{w}$ est de classe $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega'})$.*

Le Théorème 1.1 en résulte.

3. Estimations intérieures et changements d'échelle

Le Théorème 2.1 se démontre par un argument de comparaison. Les Théorèmes 2.2 et 2.5 résultent de deux résultats généraux sur les estimations de Schauder pour des opérateurs fuchsiens linéaires, appliqués à L ou à $L - M_w$, sur Ω'. On dira qu'un opérateur A est *du type* (I) (sur un ouvert donné) s'il a la forme

$$A = \partial_i\big(d^2a^{ij}\partial_j\big) + db^i\partial_i + c,$$

avec (a^{ij}) uniformément elliptique et de classe C^α, et $b^i,\ c$ bornées.

Un opérateur sera dit *du type* (II) s'il s'écrit

$$A = d^2a^{ij}\partial_{ij} + db^i\partial_i + c,$$

avec (a^{ij}) uniformément elliptique et $a^{ij},\ b^i,\ c$ de classe C^α.

On montre alors, par des arguments de changements d'échelle à partir des estimations intérieures, que

Théorème 3.1. *Si $Ag = f$, où f et g sont bornées, et A est de type* (I) *sur Ω', alors $d\nabla g$ est bornée sur Ω', et dg et $d^2\nabla g$ sont de classe $C^\alpha(\Omega' \cup \partial\Omega)$.*

Théorème 3.2. *Si $Ag = df$, où f et g sont bornées, $g = \mathrm{O}(d^\alpha)$, et A est de type* (I) *sur Ω', alors $g \in C^\alpha(\Omega' \cup \partial\Omega)$ et $dg \in C^{1+\alpha}(\Omega' \cup \partial\Omega)$.*

Théorème 3.3. *Si $Ag = df$, où $f \in C^\alpha(\overline{\Omega'})$, $g = \mathrm{O}(d^\alpha)$, et A de type* (II) *sur Ω', alors d^2g est de classe $C^{2+\alpha}(\Omega' \cup \partial\Omega)$.*

Ces résultats sont des variantes de ceux de [6, Chapitre 6] ; on pourrait sans doute affaiblir encore les hypothèses sur les coefficients comme dans [6, Théorème 6.2].

4. Étude d'une équation fuchsienne modèle

On se ramène, via partition de l'unité, à un problème local, près d'un point P du bord. On peut, par un déplacement, supposer qu'en ce point $\nabla d = (1, 0)$. On introduit alors le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (T, Y)$, où $T = d(x, y)$ et $Y = y$. On trouve alors que dans ces coordonnées, $L = L_0 + L_1$, où

$$L_0 = (D + 2)(D - 1) + T^2\partial_Y^2,$$

avec $D = T\partial_T$. On travaille sur $\{0 \leqslant T \leqslant \theta,\ |Y| \leqslant \theta\},\ \theta$ petit.

On suppose k périodique en Y et l'on considère

$$\tilde{k} = \int_1^\infty k(T\sigma, Y)\,\frac{d\sigma}{\sigma^2},$$

qui vérifie $(D-1)\tilde{k} = -k$. On obtient ensuite $h(x, y)$ telle que

$$\Delta h + \tilde{k} = 0,$$

avec $h = 0$ pour $T = 0$, $h_T = 0$ pour $T = \theta$, et h périodique en Y. On vérifie enfin que

$$w_1 = T^{-2}\big[(D-1)h\big]$$

vérifie $L_0 w_1 = k$ et possède les propriétés de régularité exigées au Théorème 2.3. On résout ensuite l'équation $(L_0 + L_1)w_0 = k$ par un argument de perturbation. Ceci démontre le Théorème 2.3.

5. Construction de sur- et sous-solutions

On montre, par un calcul direct, que $-\ln[2d + d^2(w_0 + Ad\ln d)]$ est une sur-solution de (1) près du bord si A est positif et assez grand, et une sous-solution si A est négatif et assez grand. On utilise alors un argument dû à [4] (voir également [12]) qui permet de conclure que u est comprise entre ces deux fonctions. Le Théorème 2.4 en résulte.

6. Perspectives

Les méthodes utilisées dans ce travail se généralisent naturellement dans deux directions. D'une part, les techniques générales que nous avons utilisées dans le cas hyperbolique fournissent des méthodes nouvelles de construction de fonctions de comparaison et de développements asymptotiques d'ordre élevé, et pour des non linéarités assez générales (voir par exemple [8]). D'autre part, l'introduction systématique d'opérateurs fuchsiens permet également de justifier ces développements et de déterminer la régularité optimale des solutions.

Références

[1] C. Bandle, M. Essén, On the solution of quasilinear elliptic problems with boundary blow-up, Sympos. Math. 35 (1994) 93–111.
[2] C. Bandle, M. Flucher, Harmonic radius and concentration of energy; hyperbolic radius and Liouville's equations $\Delta U = e^U$ and $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$, SIAM Rev. 38 (1996) 191–238.
[3] C. Bandle, M. Marcus, On second-order effects in the boundary behavior of large solutions of semilinear elliptic problems, Differential Integral Equations 11 (1998) 23–34.
[4] R. Benguria, H. Brezis, E.H. Lieb, The Thomas–Fermi–von Weiszäcker theory of atoms and molecules, Commun. Math. Phys. 79 (1981) 167–180.
[5] L.A. Caffarelli, A. Friedman, Convexity of solutions of semilinear elliptic equations, Duke Math. J. 52 (1985) 431–457.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Elliptic Type, Springer, 1983.
[7] J.B. Keller, On solutions of $\Delta u = f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 503–510.
[8] S. Kichenassamy, On a conjecture of Fefferman and Graham, Adv. Math., à paraître.
[9] V.A. Kondrat'ev, V.A. Nikishkin, Asymptotics, near the boundary, of a solution of a singular boundary-value problem for a semilinear elliptic equation, Differential Equations 26 (1990) 345–348.
[10] A. Lazer, P.J. McKenna, Asymptotic behavior of boundary blow-up problems, Differential Integral Equations 7 (1994) 1001–1019.
[11] C. Loewner, L. Nirenberg, Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, in: L. Ahlfors, et al. (Eds.), Contributions to Analysis, Academic Press, 1974, pp. 245–272.
[12] M. Marcus, L. Véron, Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 14 (1997) 237–274.
[13] R. Osserman, On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$, Pacific J. Math. 7 (1957) 1641–1647.
[14] M.R. Posteraro, On the solution of the equation $\Delta u = e^u$ blowing up on the boundary, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 322 (1996) 445–450.