Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 757–759
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbres de Lie

Une propriété topologique de l'ensemble des algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes

Jose María Ancochea Bermúdez [a], Rutwig Campoamor-Stursberg [b,1], Michel Goze [b]

[a] *Departamento de Geometría y Topología, Facultad CC. Matemáticas U.C.M, 28040 Madrid, Espagne*
[b] *Laboratoire de mathématiques et applications, F.S.T., Université de Haute Alsace, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse cedex, France*

Reçu le 13 février 2003 ; accepté après révision le 21 octobre 2003

Présenté par Jean-Louis Koszul

Résumé

Dans la variété des algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie sur le corps des nombres complexes, l'ensemble des algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes n'est pas fermé. Nous montrons dans cette Note qu'il n'est pas ouvert non plus. ***Pour citer cet article : J.M. Ancochea Bermúdez et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

A topological property of the set of characteristically nilpotent Lie algebras. In the variety of finite dimensional nilpotent Lie algebras over the field of complex numbers, the set of characteristically nilpotent Lie algebras is not closed. In this Note we show that it is also not open. ***To cite this article: J.M. Ancochea Bermúdez et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Préliminaires et rappels

Soit $\mathcal{N}_n$ la variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension n sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$, $\mu \in \mathcal{N}^n$, est dite caractéristiquement nilpotente si toute dérivation f de $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Les algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes méritent une attention particulière car

1. Si une algèbre de Lie nilpotente est rigide alors elle est caractéristiquement nilpotente [2].
2. Si une algèbre de Lie nilpotente d'indice de nilpotence maximum n'admet pas de structure affine, elle est caractéristiquement nilpotente [6].

Adresses e-mail : Jose_Ancochea@mat.ucm.es (J.M. Ancochea Bermúdez), R.Campoamor@uha.fr (R. Campoamor-Stursberg), M.Goze@uha.fr (M. Goze).
[1] Soutenu par une bourse de recherche de la Fondation Ramon Areces.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.10.032

Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des lois caractéristiquement nilpotentes n'est pas fermé dans $\mathcal{N}_n$ dès $n \geqslant 7$. Pour $n < 7$, $\mathcal{C}_n$ est vide. Pour $n \geqslant 7$, il existe une déformation de l'algèbre nilpotente définie par

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

les autres crochets non définis étant nuls, sur une algèbre caractéristiquement nilpotente. Ceci montre que le complémentaire $\mathcal{N}_n - \mathcal{C}_n$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{N}_n$. Les déformations que nous considérons ici rentrent dans le cadre des déformations valuées introduit dans [5]. Une déformation $\tilde{\mu}$ d'une loi $\mu_0 \in \mathcal{N}_n$ est dite valuée si elle est une loi d'algèbre de Lie à coefficients dans une $\mathbb{C}$-algèbre valuée A dont le corps résiduel est isomorphe à $\mathbb{C}$ et vérifiant $\tilde{\mu}(X,Y) - \mu(X,Y) \in \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. Rappelons que les déformations de Gerstenhaber sont de ce type ainsi que les perturbations introduites dans [1] et [3]. Les déformations valuées associées aux perturbations sont définies à partir d'une extension $\mathbb{C}^*$ non archimedienne non standard, l'anneau de valuation correspondant aux éléments limités et l'idéal maximal aux éléments infiniment petits. Dans ce contexte una partie standard E de $\mathcal{N}_n$ est ouverte pour la topologie métrique si et seulement si toute perturbation d'une loi standard de E est dans E [3]. En particulier $\mathcal{C}_n$ est ouvert pour la topologie métrique si et seulement si toute perturbation d'une loi standard caractéristiquement nilpotente est caractéristiquement nilpotente. Or si $\mathcal{C}_n$ est ouvert au sens de Zariski, il est ouvert pour la topologie métrique. Nous allons généraliser le résultat de [2] en montrant que pour $n > 7$, $\mathcal{C}_n$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{N}_n$ en exhibant une perturbation d'une loi standard de $\mathcal{C}_n$ non caractéristiquement nilpotente.

2. Théorème

Théorème 2.1. *Pour tout n, $n \geqslant 7$, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{N}_n$.*

Démonstration. Pour $n = 7$ voir [2]. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n$, $n \geqslant 8$, dont la loi μ est donnée par

$$\begin{cases} \mu(X_1, X_i) = X_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \mu(X_4, X_2) = X_n, \\ \mu(X_3, X_2) = X_{n-1} + X_n, \end{cases}$$

où $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Par convention, les crochets non définis par anticommutation sont supposés nuls. Cette algèbre de Lie est filiforme, c'est-à-dire a un indice de nilpotence maximal égal à $n-1$. Or l'ensemble des lois filiformes non caractéristiquement nilpotentes est entièrement décrit dans [4]. On en déduit que $\mathfrak{g}_n$ n'admet pas de dérivation diagonale non triviale et sa loi est dans $\mathcal{C}_n$.

Notons par $C^i(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n)$, $Z^i(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n)$, $H^i(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n)$ les i-cochaines, cocycles ou les groupes relatifs à la cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g}_n$ à valeurs dans le module adjoint $\mathfrak{g}$. Soit $\Psi \in C^2(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n)$ défini par :

$$\begin{cases} \Psi(X_5, X_3) = X_n, \quad \Psi(X_5, X_2) = \Psi(X_4, X_3) = X_{n-1}, \\ \Psi(X_k, X_2) = 2X_{n-4+[k/2]}, \quad k = 3, 4. \end{cases}$$

On montre directement que $\Psi \in Z^2(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n)$.

Soit A la $\mathbb{C}$-algèbre valuée définie par une extension non standard de Robinson et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On suppose que le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{m}$, la loi $\tilde{\mu}_\varepsilon$ sur $(\mathbb{C}^*)^n \otimes_{\mathbb{C}} A$ définie par

$$\tilde{\mu}_\varepsilon(X,Y) = \mu(X,Y) + \varepsilon\Psi(X,Y), \quad X, Y \in \mathbb{C}^n,$$

est une déformation valuée de μ. En effet comme $\delta_\mu \Psi = 0$, il suffit de vérifier que $\Psi \circ \Psi = 0$ ou $\circ$ est la loi de composition de Gerstenhaber définie par

$$\Psi \circ \varphi(X_i, X_j, X_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_3} \Psi\big(\varphi(X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}), X_{\sigma(k)}\big) + \varphi\big(\Psi(X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}), X_{\sigma(k)}\big).$$

Si $n \geqslant 8$, Ψ est à valeurs dans l'espace engendré par $\{X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1}, X_n\}$ et donc $\Psi \circ \Psi = 0$.

Lemme 2.2. *$\tilde{\mu}_\varepsilon$ est une loi de A-algèbre de Lie filiforme non caractéristiquement nilpotente.*

En effet, comme $\tilde{\mu}_\varepsilon(X_1, X_i) = X_{i+1}$, $i = 2, \ldots, n-1$, cette loi est bien filiforme. Pour montrer qu'elle admet une dérivation diagonalisable, on considère le changement de bases

$$\begin{cases} Y_1 = X_1, \\ Y_2 = X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5, \\ Y_i = [Y_1, Y_i], \quad i \geqslant 3 \end{cases}$$

à coefficients dans le corps de fractions $\mathfrak{F}_A$ de A. Supposons que les a_i vérifient

$$\begin{cases} 1 + a_3^2\varepsilon - 2\varepsilon a_4 = 0, \\ 3a_5\varepsilon + a_3a_4 - a_3^2\varepsilon - 2\varepsilon a_4 = 0. \end{cases}$$

(Rappelons que, comme A est un anneau de valuation dans le corps de fractions $\mathfrak{F}_A$, si $\alpha \in \mathfrak{F}_A - A$ alors $\alpha^{-1} \in \mathfrak{m}$. Ceci montre qu'un tel système admet des solutions.)

La loi $\tilde{\mu}_\varepsilon$ est alors isomorphe à la loi définie par

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_\varepsilon(Y_1, Y_i) = Y_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \tilde{\mu}_\varepsilon(Y_5, Y_3) = \varepsilon Y_n, \\ \tilde{\mu}_\varepsilon(Y_5, Y_2) = \tilde{\mu}_\varepsilon(Y_4, Y_3) = \varepsilon Y_{n-1}, \\ \tilde{\mu}_\varepsilon(Y_4, Y_2) = 2\varepsilon Y_{n-2}, \\ \tilde{\mu}_\varepsilon(Y_3, Y_2) = 2\varepsilon Y_{n-3}. \end{cases}$$

C'est donc une loi filiforme de type A_n d'après [4]. Elle est non caractéristiquement nilpotente. □

Ainsi la loi μ admet une déformation non caractéristiquement nilpotente. Comme $\tilde{\mu}_\varepsilon \notin \mathcal{C}_n$, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ n'est pas ouvert au sens de Zariski.

Remarque 1. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}_\varepsilon = (\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} A, \tilde{\mu}_\varepsilon)$ admet un tore externe maximal de dérivations de dimension 1. Il est engendré par la dérivation $f_{\tilde{\mu}_\varepsilon} : \tilde{\mathfrak{g}}_\varepsilon \to \tilde{\mathfrak{g}}_\varepsilon$ définie par $f_{\tilde{\mu}_\varepsilon}(Y_i) = iY_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dans la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ cette dérivation vérifie en particulier

$$f_{\tilde{\mu}_\varepsilon}(X_2) = 2X_2 - a_3X_3 - \frac{1}{\varepsilon}X_4 + \bigl(-3a_5 - a_3^3 + 3 + 3\varepsilon\bigl(3a_5 - 2a_3^2\bigr)\bigr)X_5.$$

Ainsi la matrice de $f_{\tilde{\mu}_\varepsilon}$ dans la $\mathbb{C}$-base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $f_{\tilde{\mu}_\varepsilon}$ est à valeurs dans $\mathfrak{F}_A$et non dans A. Elle s'écrit sous la forme $M_{f_{\tilde{\mu}_\varepsilon}} = M_1 + \frac{1}{\varepsilon}M_2$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_n(A)$ et $M_2 \in \mathcal{M}_n(A - \mathfrak{m})$. Une telle matrice n'a pas d'image par projection sur le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$. Ceci explique, en partie, la non caractéristique nilpotence de l'algèbre μ, image de $\tilde{\mu}_\varepsilon$ par cette même projection.

Références

[1] J.M. Ancochea, On the rigidity of solvable Lie algebras, in: Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (Il Ciocco, 1986), in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 247, Kluwer Academic, 1988, pp. 403–445.

[2] R. Carles, Sur les algèbres caractéristiquement nilpotentes, Publ. Univ. Poitiers 5 (1984).

[3] M. Goze, Perturbations of Lie algebra structures, in: Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (Il Ciocco, 1986), in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 247, Kluwer Academic, Dordrecht, 1988, pp. 265–355.

[4] M. Goze, Y. Hakimjanov, Sur les algèbres de Lie admettant un tore des dérivations, Manuscripta Math. 84 (1994) 115–124.

[5] M. Goze, E. Remm, Valued deformations of algebras, math.RA/0210475.

[6] E. Remm, Opérades Lie-admissibles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1047–1050.