Available online at www.sciencedirect.com

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 51–54

Comptes Rendus Mathematique

Géométrie algébrique

Une surface d'Enriques sans point sur $\mathbb{C}((t))$

Guillaume Lafon

École normale supérieure, 45, rue d'Ulm 75005 Paris, France

Reçu le 15 mai 2003 ; accepté le 21 octobre 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous donnons un exemple explicite de surface d'Enriques sans point sur $\mathbb{C}((t))$. ***Pour citer cet article : G. Lafon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

An Enriques surface without a rational point over $\mathbb{C}((t))$**.** We give an explicit example of an Enriques surface without a rational point over $\mathbb{C}((t))$. ***To cite this article: G. Lafon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Serre, dans une lettre à Grothendieck ([4], p. 152), suggère qu'une variété projective, lisse, géométriquement connexe X définie sur le corps $K = \mathbb{C}(C)$ des fonctions d'une courbe algébrique complexe C et vérifiant $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$ a toujours un point rationnel. Il ajoute immédiatement que cette hypothèse lui semble « bien optimiste ». On sait aujourd'hui que cette hypothèse est fausse : dans leur récent article [5], Graber, Harris, Mazur et Starr ont établi l'existence d'une surface d'Enriques X sur un tel corps $K = \mathbb{C}(C)$ sans K-point rationnel. Leur exemple est indirect, ni la courbe C ni la surface X ne sont explicites.

Nous allons ici donner un exemple explicite de surface d'Enriques définie sur le corps des fonctions $\mathbb{C}(t)$ de la droite projective complexe $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (et même en fait sur $\mathbb{Q}(t)$) n'ayant pas de point sur le complété $\mathbb{C}((t))$, et a fortiori pas de point sur $\mathbb{C}(t)$. Ceci répond à une question de B. Mazur. Les équations utilisées ici ont été introduites dans un article de Colliot-Thélène, Skorobogatov et Swinnerton–Dyer ([3], Remarque 4.1.2).

1. Préliminaires

Le fait suivant est énoncé dans [3]. Nous commençons par en donner une preuve.

Proposition 1.1. *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soit $r \in F^*$ et soient c, d et f des trinômes de $F[u]$ de degré* 2 *tels que* $\mathrm{cdf}(d - c) \in F[u]$ *soit séparable. Soit Y un F-modèle projectif et lisse, relativement minimal de*

Adresse e-mail : Guillaume.Lafon@ens.fr (G. Lafon).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.10.031

la variété affine Y_0 définie dans $\mathbb{A}^4_F$ avec coordonnées x, y, z, u par le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - c(u) = f(u)y^2, \\ x^2 - d(u) = rf(u)z^2. \end{cases}$$

Alors Y est une surface d'Enriques.

Démonstration. Le diviseur de $f(u)$ sur Y est un double (c'est, à l'introduction du facteur r près, la Proposition 4.1 de [3], dont la démonstration vaut sans changement dans le cas présent). Par conséquent, la surface affine Z_0 définie dans $\mathbb{A}^5_F$ avec coordonnées (u, t, x, y, z) par le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - c(u) = f(u)y^2 \neq 0, \\ x^2 - d(u) = rf(u)z^2 \neq 0, \\ f(u) = t^2 \neq 0 \end{cases}$$

est F-birationnelle à un revêtement double non ramifié Z de Y (cela découle de la Proposition 1.1 de [3]). On notera que la variété affine définie ci-dessus est F-isomorphe à la variété affine définie par le système

$$\begin{cases} x^2 - c(u) = y^2 \neq 0, \\ x^2 - d(u) = rz^2 \neq 0, \\ f(u) = t^2 \neq 0. \qquad \square \end{cases}$$

Lemme 1.2. *Il existe un modèle projectif et lisse de Z qui est une surface $K3$.*

Démonstration. Pour éviter d'alourdir les notations, on omettra désormais de préciser qu'on se place toujours sur le corps F. Considérons le modèle Y_0 défini dans $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^3$ avec coordonnées $(u; x, y, z, w)$ par le système

$$\begin{cases} x^2 - c(u)w^2 = y^2, \\ x^2 - d(u)w^2 = rz^2. \end{cases}$$

La projection sur le facteur $\mathbb{A}^1$ induit un morphisme de Y_0 vers $\mathbb{A}^1_u = \mathrm{Spec}(F[u])$. De plus, si l'on fait le changement de variable $v = \frac{1}{u}$, après multiplication des équations définissant le système par v^2 et changement de variable en posant $x' = vx$, $y' = vy$ et $z' = vz$, on obtient une surface Y_1 définie dans $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^3$ avec coordonnées $(v; x', y', z', w)$ par le système d'équations

$$\begin{cases} x'^2 - \tilde{c}(v)w^2 = y'^2, \\ x'^2 - \tilde{d}(v)w^2 = rz'^2, \end{cases}$$

où, pour un trinôme g, on a défini $\tilde{g}(v) = v^2 g(v^{-1})$, avec $\tilde{g}$ un trinôme en la variable v. La surface Y_1 est également munie d'une projection $Y_1 \to \mathbb{A}^1_v = \mathrm{Spec}(F[v])$.

Les deux surfaces Y_0 et Y_1 se recollent, ainsi que leurs projections vers les droites affines, pour donner une surface Y munie d'un morphisme $q : Y \to \mathbb{P}^1$, dont la fibre générique est intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^3$, donc est une courbe de genre un. Les fibres géométriques singulières de q sont au nombre de 6, une au-dessus de chacun des points de $\mathbb{A}^1_u$ vérifiant $c(u) \cdot d(u) \cdot (c - d)(u) = 0$. Chacune de ces fibres est union de deux courbes lisses de genre zéro se coupant transversalement en deux points.

Soit $C_0 \subset \mathbb{A}^2_k$, avec coordonnées affines (u, t), la conique lisse d'équation $f(u) = t^2$, et soit $C \subset \mathbb{P}^2$ la conique projective lisse qu'elle définit. La projection $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ donnée par $(u, t) \mapsto u$ induit un morphisme $C_0 \to \mathbb{A}^1_u$ qui s'étend en un morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ ramifié exactement en les deux points de $\mathbb{A}^1_u$ donnés par $f(u) = 0$.

Soit X le produit fibré $Y \times_{\mathbb{P}^1} C$. Comme les polynômes f et $c.d.(c - d)$ sont sans racine commune, la surface projective X est lisse. La projection $X \to C$ a pour fibre générique une courbe lisse de genre un. Elle a exactement douze fibres géométriques singulières, chacune du type décrit ci-dessus. Il est par ailleurs clair que X contient un ouvert isomorphe à la surface affine Z_0 définie plus haut, donc X est F-birationnelle à Z.

Pour établir le lemme, ainsi que la Proposition 1.1, on peut supposer le corps F de type fini sur $\mathbb{Q}$, puis le plonger dans $\mathbb{C}$ et se contenter de vérifier le résultat sur $\mathbb{C}$. En effet, les propriétés d'être une surface K3 ou d'être une surface d'Enriques sont stables par extension de corps puisque d'après la classification de [1], p.188, pour une surface projective lisse X, être une surface K3 est équivalent à avoir un fibré canonique trivial et vérifier $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et être une surface d'Enriques est équivalent à avoir un fibré canonique d'ordre exactement deux dans le groupe de Picard et vérifier $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

En appliquant le Lemme VI.4 de [2], on obtient alors : $\chi_{\text{top}}(X) = \sum_{i=1}^{12} \chi_{\text{top}}(S_i)$, où les S_i sont les fibres singulières, qui ont toutes une caractéristique d'Euler–Poincaré égale à 2, donc $\chi_{\text{top}}(X) = 24$. De plus, grâce au Corollaire 12.3 de [1], on sait qu'un diviseur canonique sur X peut s'écrire sous la forme $K = f^*(D)$, où D est un diviseur sur $\mathbb{P}^1$, et on a donc $K \cdot K = 0$. Le même Corollaire affirme également que D est de degré $d = \chi(X, \mathcal{O}_X) - 2\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - 2$. En utilisant la formule de Noether et le calcul de $\chi_{\text{top}}(X)$, on obtient alors $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 2$. Le diviseur D est donc de degré 0 et le diviseur canonique est linéairement équivalent à 0, c'est-à-dire que le fibré canonique est trivial. De plus, X est minimale car une courbe exceptionnelle de première espèce E sur X vérifierait $E \cdot K = -1$, ce qui n'est pas possible avec un diviseur canonique trivial. Par la classification de [1], p. 188, la seule possibilité pour une surface X minimale d'avoir un fibré canonique trivial et de vérifier $\chi_{\text{top}}(X) = 24$ est d'être une surface K3. □

Comme X est une surface K3, on a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Si l'on avait $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$, la variété d'Albanese de Y serait non triviale, il existerait donc une application rationnelle non constante de X vers une variété abélienne. Une telle application se prolonge automatiquement en un morphisme défini sur X tout entier ([7], Lemme 9.11), la variété d'Albanese de X serait non triviale, on aurait $H^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, ce qui est absurde. Ainsi $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. De plus, comme X domine Y, on a pour les dimensions de Kodaira de Y et X l'inégalité $\kappa(Y) \leqslant \kappa(X)$ ([7], Théorème 6.10), ce qui implique $\kappa(Y) \leqslant 0$. En utilisant à nouveau la classification de [1], p. 188, les seules possibilités pour Y sont alors d'être une surface rationnelle, une surface K3 ou une surface d'Enriques. Or Y a un revêtement double non ramifié non trivial, donc n'est pas simplement connexe et ne peut pas être une surface rationnelle ou une surface K3. C'est donc une surface d'Enriques, ce qui démontre la proposition.

Nous utiliserons le lemme bien connu suivant (qui découle du théorème d'inversion locale pour les variétés analytiques, énoncé dans [6], 3.9, Théorème 2) :

Lemme 1.3. *Soit X une variété lisse géométriquement connexe définie sur $k = \mathbb{C}((t))$ et U un ouvert de Zariski non vide de X. Alors $X(k) = \emptyset \Leftrightarrow U(k) = \emptyset$.*

2. L'exemple

L'exemple annoncé est défini par un système d'équations du type de ceux introduits ci-dessus :

Proposition 2.1. *La variété affine définie dans $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}((t))}$, muni des coordonnées affines (u, x, y, z), par le système d'équations :*

$$\begin{cases} x^2 - tu^2 + t = (t^2u^2 - t)y^2 \neq 0, \\ x^2 - 2tu^2 + \frac{1}{t} = t(t^2u^2 - t)z^2 \neq 0 \end{cases}$$

n'a pas de point sur $\mathbb{C}((t))$.

Démonstration. Vérifions pour commencer que $\mathrm{cdf}(d - c)$ est bien séparable, donc que l'on est dans les hypothèses de la Proposition 1.1. Dans $\mathbb{C}((\sqrt{t}))$, les racines de f sont $1/\sqrt{t}$ et $-1/\sqrt{t}$, celles de c sont 1 et -1, celles de d sont $1/(\sqrt{2}t)$ et $-1/(\sqrt{2}t)$ et celles de $d - c$ sont $1/t - 1$ et $1/t + 1$.

On remarque ensuite que $f(u) = t^2u^2 - t$ est de valuation paire (égale à $2v(u)$) quand $v(u) < 0$ et de valuation impaire (égale à 1) quand $v(u) \geqslant 0$.

Fixons u_0 tel que $v(u_0) < 0$. On a alors une solution au système si et seulement si on peut trouver un x_0 tel que $v(x_0^2 - tu_0^2 + t)$ soit paire et $v(x_0^2 - 2tu_0^2 + \frac{1}{t})$ soit impaire. En effet, on pourra alors trouver y_0 et z_0 tels que (x_0, y_0, z_0, u_0) soit solution du système en extrayant deux racines carrées alors que dans le cas contraire, les valuations des deux membres de l'une des équations définissant le système sont toujours différentes. Or, comme $v(u_0) < 0$, on a $v(tu_0^2 - t) = v(tu_0^2) = 2v(u_0) + 1$ qui est impaire, donc on doit avoir $v(x_0^2) < v(tu_0^2 - t)$. Or on a aussi $v(2tu_0^2 - \frac{1}{t}) \geqslant v(2tu_0^2) = 2v(u_0) + 1 = v(tu_0^2 - t) > v(x_0^2)$ (on peut ne pas avoir égalité dans la première inégalité pour $v(u_0) = -1$). On en déduit que $v(x_0^2 - 2tu_0^2 + \frac{1}{t}) = v(x_0^2)$ ne peut être impaire, donc qu'il n'y a pas de solution vérifiant $v(u_0) < 0$.

Choisissons maintenant u_1 tel que $v(u_1) \geqslant 0$. On aura désormais une solution si et seulement s'il existe un x_1 tel que $v(x_1^2 - tu_1^2 + t)$ soit impaire et $v(x_1^2 - 2tu_1^2 + \frac{1}{t})$ soit paire. Or, comme $v(u_1) \geqslant 0$, on a $v(2tu_1^2 - \frac{1}{t}) = -1$ donc on doit avoir $v(x_1) < 0$, et comme $v(tu_1^2 - t) \geqslant 1$, on a nécessairement $v(x_1^2 - tu_1^2 + t)$ impaire, ce qui empêche à nouveau l'existence d'une solution. On en déduit l'absence de point rationnel sur la variété considérée. $\square$

Théorème 2.2. *Un modèle projectif lisse minimal de la variété introduite à la Proposition* 2.1 *est une surface d'Enriques sans point sur* $\mathbb{C}((t))$.

Démonstration. Puisqu'on vient de voir que le modèle en question n'a pas de point sur un ouvert, il suffit d'utiliser le Lemme 1.3 pour conclure.

Remarque 1. Ces équations définissent également une surface d'Enriques sans point sur $\mathbb{C}(t)$.

Remarque 2. Dans le système de la Proposition 2.1, on peut remplacer, dans le second membre de la seconde équation, le premier t par n'importe quel élément r de $\mathbb{C}((t))$ n'étant pas un carré, la surface ainsi définie est toujours une surface d'Enriques sans point rationnel sur $\mathbb{C}((t))$. Par contre, si r est un carré dans $\mathbb{C}((t))$, la surface définie par le système analogue a toujours un point rationnel sur $\mathbb{C}((t))$ (cela découle du fait qu'un trinôme séparable sur $\mathbb{C}((t))$ prend toujours les deux parités de valuation).

Remerciements

Je remercie vivement Jean-Louis Colliot-Thélène pour son aide et les nombreux conseils dispensés pendant la rédaction de cet article.

Références

[1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, Compact complex algebraic surfaces, in: Ergeb. Math. Grenzgeb., Folge 3, vol. 4, Springer-Verlag, 1984.
[2] A. Beauville, Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54 (1978).
[3] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Double fibers and double covers: paucity of rational points, Acta Arith. LXXIX (2) (1997).
[4] P. Colmez, J.-P. Serre (Eds.), Correspondance Grothendieck–Serre, Soc. Math. France, 2001.
[5] T. Graber, J. Harris, B. Mazur, J. Starr, Rational connectivity and sections of families over curves, arXiv: math.AG/0210225.
[6] J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups, in: Lecture Notes in Math., vol. 1500, Springer-Verlag, 1992.
[7] K. Ueno, Classification Theory of Algebraic Surfaces and Compact Complex Spaces, in: Lecture Notes in Math., vol. 439, Springer-Verlag, 1975.