Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 749–752

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Estimation améliorée explicite d'un degré de confiance conditionnel

Dominique Fourdrinier, Patrice Lepelletier

UMR CNRS 6085, Université de Rouen, 76821 Mont-Saint-Aignan cedex, France

Reçu le 15 avril 2003 ; accepté après révision le 14 octobre 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Nous considérons le problème de l'estimation du degré de confiance conditionnel de la région de confiance usuelle, de niveau de confiance $1-\alpha$, de la moyenne d'une loi normale dans $\mathbb{R}^p$ de matrice de covariance l'identité. Pour $p \geqslant 5$, nous donnons une condition suffisante explicite de domination de l'estimateur standard $1-\alpha$ par un estimateur le corrigeant, soit par $1-\alpha+s$ où s est une fonction appropriée. Cette condition repose essentiellement sur une inégalité aux dérivées partielles du type $k\Delta s + s^2 \leqslant 0$ où k est une certaine constante positive. Elle permet d'établir de manière formelle (sans recours à des simulations) ce résultat de domination. ***Pour citer cet article : D. Fourdrinier, P. Lepelletier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Explicit improved confidence statement. We consider the problem of estimating the confidence statement of the usual confidence set, with confidence coefficient $1-\alpha$, of the mean of a p-variate normal distribution with identity covariance matrix. For $p \geqslant 5$, we give an explicit sufficient condition for domination over the standard estimator $1-\alpha$ by an estimator correcting it, that is, by $1-\alpha+s$ where s is a suitable function. That condition mainly relies on a partial differential inequality of the form $k\Delta s + s^2 \leqslant 0$ (for a certain constant $k > 0$). It allows us to formally establish (with no recourse to simulations) this domination result. ***To cite this article: D. Fourdrinier, P. Lepelletier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Dans l'examen des régions de confiance pour un paramètre θ multidimensionnel, la problématique de l'estimation du degré de confiance conditionnel pour une observation donnée est abordée par Robert et Casella [7] dans le cadre de l'inférence conditionnelle. Ces auteurs considèrent la région de confiance usuelle C_α de niveau $1-\alpha$ déterminée, pour tout x observé régi par la loi normale $\mathcal{N}(\theta, I_p)$, par $C_\alpha(x) = \{\theta \in \mathbb{R}^p \mid \|\theta - x\|^2 \leqslant c_\alpha\}$, le niveau étant garanti par la constante c_α. Ils rappellent l'intérêt de donner une évaluation du

Adresses e-mail : Dominique.Fourdrinier@univ-rouen.fr (D. Fourdrinier), Patrice.Lepelletier@univ-rouen.fr (P. Lepelletier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.10.017

réel degré de confiance lié à l'observation x dont on dispose (le degré de confiance conditionnel), en opposition au niveau $1-\alpha$ qui résulte d'un critère fondé sur toutes les observations possibles. Suivant l'approche devenue classique après sa suggestion par Kiefer [6], ils évaluent le degré de confiance conditionnel au travers de l'estimation de la fonction indicatrice de $C_\alpha(x)$. Ils suggèrent donc des estimateurs γ compétitifs avec $\gamma_0 = 1-\alpha$, leur comparaison étant faite sous le risque quadratique usuel. Il est commode d'écrire de tels estimateurs γ sous la forme $\gamma = \gamma_s = 1-\alpha+s$, les conditions de comparaison se faisant par l'intermédiaire de la fonction s (égale à $\gamma-(1-\alpha)$). Ils montrent une domination de γ_s sur γ_0 pour le choix de $s(x) = a/\|x\|^2$ (où a est positif et majoré par une certaine constante). Cependant, ils n'apportent de démonstration formelle de ce résultat que dans les deux seuls cas où θ est nul et où $\|\theta\|$ est au voisinage de l'infini. La domination de γ_s sur γ_0 pour les autres valeurs de θ est ensuite illustrée par des simulations. Le but de cette note est de démontrer formellement cette domination pour toute valeur de θ.

Notre démarche consiste à élaborer une borne supérieure de la différence des risques entre γ_s et γ_0 en termes d'espérance d'une expression différentielle de la forme $k\Delta s + s^2$ où k est une constante positive et où Δs désigne le laplacien de s, soit $\Delta s = \sum_{i=1}^p D_{ii} s$. Cette approche est reliée à la méthodologie mise en œuvre dans le problème d'estimation d'un coût quadratique tel qu'il est abordé par I. Johnstone dans [5] et par D. Fourdrinier et M.T. Wells dans [4]. Dans le cas où $p \geqslant 6$, nous présentons l'exemple d'estimateur alternatif proposé par J. Berger et K. Lu dans [1] où la fonction s est donnée par $s(x) = a/(b+\|x\|^2)$, pour des valeurs de a et b complètement spécifiées.

2. Des estimateurs compétitifs

Suivant Robert et Casella [7], les divers estimateurs γ_s du degré de confiance conditionnel de la région C_α fournissent, pour x observé, des estimations $\gamma_s(x)$ de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{C_\alpha(x)}(\theta) = \mathbb{1}_{[0;c_\alpha]}(\|x-\theta\|^2)$. Ces estimateurs sont comparés au travers du risque quadratique

$$R(\gamma_s,\theta) = E_\theta\big[\big(\gamma_s(X) - \mathbb{1}_{[0;c_\alpha]}\big(\|X-\theta\|^2\big)\big)^2\big],$$

où E_θ désigne l'espérance par rapport à la loi $\mathcal{N}(\theta, I_p)$. Un simple calcul montre que le risque de γ_0 (c'est-à-dire de $1-\alpha$) est constant (en θ) et est égal à $\alpha(1-\alpha)$. Il est alors facile de voir, au travers de l'inégalité de Schwarz, que le risque de γ_s est fini si et seulement si $E_\theta[s^2] < +\infty$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, la différence des risques entre γ_s et γ_0 s'écrivant

$$R(\gamma_s,\theta) - R(\gamma_0,\theta) = E_\theta\big[2\big(1-\alpha-\mathbb{1}_{[0;c_\alpha]}\big(\|X-\theta\|^2\big)\big)s(X) + s^2(X)\big]. \tag{1}$$

Le but est de déterminer des conditions sur s telles que γ_s domine γ_0, autrement dit telles que l'expression (1) soit négative. Remarquons que cela impose que la dimension p soit supérieure ou égale à 5 puisque Brown et Hwang dans [2] ont montré que γ_0 est admissible pour $p \leqslant 4$; nous supposons donc, tout au long de cette note, que $p \geqslant 5$.

Notre résultat principal est énoncé dans le Théorème 2.2 ci-dessous. Il repose sur le Lemme 2.1 suivant d'intégration (voir [3] pour une démonstration) qui donne des conditions simples sur des fonctions f et g telles que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(x)\Delta g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} \Delta f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemme 2.1. *Soient F et G deux fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont les dérivées secondes F'' et G'' existent, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Supposons que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$,*

$$\lim_{t\to+\infty} th\big(\beta+t^2\big) = 0 \quad et \quad \lim_{t\to+\infty} th'\big(\beta+t^2\big) = 0, \tag{2}$$

où h vaut pour les fonctions F et G. Si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$F\big(\|\cdot\|^2\big) D_{ii} G\big(\|\cdot - \theta\|^2\big) \in L^1\big(R^p\big) \quad et \quad D_{ii} F\big(\|\cdot\|^2\big) G\big(\|\cdot - \theta\|^2\big) \in L^1\big(R^p\big), \tag{3}$$

alors les intégrales de ces deux fonctions sont égales et l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^p} F\big(\|x\|^2\big)\Delta G\big(\|x-\theta\|^2\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p} \Delta F\big(\|x\|^2\big)G\big(\|x-\theta\|^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

Nous donnons maintenant notre résultat de domination de γ_s sur γ_0. Il est lié à la fonction auxiliaire K définie, pour tout $t>0$, par

$$K(t) = \frac{\int_0^t (y/t)^{p/2-1}(\alpha - \mathbb{1}_{[c_\alpha;+\infty]}(y))\,\mathrm{e}^{-y/2}\,\mathrm{d}y - 2(\mathrm{e}^{-t\vee c_\alpha/2} - \alpha\,\mathrm{e}^{-t/2})}{(p-2)(2\pi)^{p/2}},$$

où $t \vee c_\alpha$ désigne le plus grand des deux nombres t et c_α.

Théorème 2.2. *Soit s une fonction radiale ($s(x) = S(\|x\|^2)$) de classe $\mathcal{C}^1$ de $(\mathbb{R}^p)^*$ dans $\mathbb{R}$ dont le laplacien Δs est sous-harmonique et telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, $E_\theta[s^2]$ soit fini. Supposons, de plus, que S vérifie* (2) *et que la condition* (3) *soit satisfaite pour $F = S$ et $G = K$. Alors une condition suffisante pour que l'estimateur γ_s domine γ_0 est que s satisfasse l'inéquation différentielle*

$$k\Delta s + s^2 \leqslant 0, \tag{4}$$

où k est la constante strictement positive définie par

$$k = \frac{2(1-\alpha)^2(\alpha(2/c_\alpha)^{p/2-1}\Gamma(p/2) - \mathrm{e}^{-c_\alpha/2})}{p-2}.$$

Principe de la démonstration. De (1) et des hypothèses du théorème, on déduit

$$R(\gamma_s,\theta) - R(\gamma_0,\theta) = \int_{\mathbb{R}^p} \Delta K\big(\|x-\theta\|^2\big)s(x)\,\mathrm{d}x + E_\theta\big[s^2(X)\big] = \int_{\mathbb{R}^p} K\big(\|x-\theta\|^2\big)\Delta s(x)\,\mathrm{d}x + E_\theta\big[s^2(X)\big]\,;$$

par ailleurs on établit que

$$\int_{\mathbb{R}^p} K\big(\|x-\theta\|^2\big)\Delta s(x)\,\mathrm{d}x \leqslant kE_\theta\big[\Delta s(x)\big].$$

Donc γ domine γ_0 si, pour tout θ,

$$E_\theta[k\Delta s + s^2] \leqslant 0.$$

Exemple 1. Les corrections s de la forme $s(x) = a/(b+\|x\|^2)$ où a et b sont des constantes positives peuvent servir de cadre d'exemple. Pour raison de simplicité, nous fixons $b=0$, mais les résultats subsistent pour $b>0$.

La condition de finitude du risque de γ_s, soit $E_\theta[s^2] < +\infty$, est trivialement satisfaite pour $p \geqslant 5$ puisque cette espérance est le moment d'ordre -2 d'une loi du χ^2 décentrée à p degrés de liberté.

On vérifie aussi facilement que, pour $x \neq 0$, $\Delta s(x) = -2a(p-4)/\|x\|^4$ et que $\Delta(\Delta s(x)) = 8a(p-4)(p-6)/\|x\|^6$. Ainsi, dès que $p \geqslant 6$, la sous-harmonicité de Δs est assurée. Un simple calcul montre alors que l'inéquation différentielle (4) est elle-même satisfaite pour $0 < a \leqslant 2k(p-4)$.

Maintenant, pour $S(t) = 1/t$, la fonction s est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut voir que, pour tout $\beta > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} S(\beta+t^2)t = \lim_{t\to+\infty} S'(\beta+t^2)t = 0,$$

et donc que la condition (2) du Lemme 2.1 est vérifiée.

Enfin la vérification de la condition (3) est plus technique et est mise en annexe dans le Lemme 4 de [3].

3. Conclusion

Le cœur du Théorème 2.2 est l'inéquation différentielle (4). Elle rappelle l'inéquation $2\Delta s + s^2 \leqslant 0$ exhibée par Johnstone [5] dans l'estimation du coût quadratique $\|x-\theta\|^2$ et obtenue au travers d'une application réitérée de l'identité de Stein. Le rôle de cette dernière est ici tenu par le Lemme 2.1 qui permet de faire apparaître le laplacien de la correction s.

C'est, à notre connaissance, la première fois qu'une démonstration formelle (ne nécessitant donc pas de recours à des simulations) est donnée de l'amélioration explicite de l'estimateur standard $1-\alpha$. La technique induite par le Lemme 2.1 nous semble riche de perspectives, en particulier, pour étendre ces résultats, donnés dans un cadre gaussien, à une famille plus grande de lois et à d'autres régions de confiance.

Références

[1] J. Berger, K. Lu, Estimated confidence procedures for multivariate normal means, J. Statist. Plann. Inference 23 (1989) 1–19.
[2] L.D. Brown, J.T. Hwang, Admissibility of confidence estimators, in: M.T. Chao, P.E. Cheng (Eds.), Proceedings of the 1990 Taipei Symposium in Statistics, Institute of Statistical Science, Academia Sinica Taiwan, June 28–30, 1991.
[3] D. Fourdrinier, P. Lepelletier, Sur l'estimation d'un rapport de confiance, Document de travail du LMRS, Université de Rouen, 2003.
[4] D. Fourdrinier, M.T. Wells, Estimation of a loss function for spherically symmetric distributions in the general linear model, Ann. Statist. 23 (2) (1995) 571–592.
[5] I. Johnstone, On admissibility of some unbiased estimates of loss, in: S. Gupta, J. Berger (Eds.), Statistical Decision Theory and Related Topics IV, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1988, pp. 361–379.
[6] J. Kiefer, Conditional confidence statements and confidence estimators, J. Amer. Statist. Assoc. 72 (1977) 789–827.
[7] C. Robert, G. Casella, Improved confidence estimators for the usual multivariate normal confidence set, in: S. Gupta, J. Berger (Eds.), Statistical Decision Theory and Related Topics V, Springer-Verlag, New York, 1994, pp. 351–368.