Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 791–796
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

Flots robustement transitifs sur les variétés compactes

Thérèse Vivier

Université de Bourgogne, institut mathématiques de Bourgogne, CNRS-UMR 5584, UFR sciences et techniques, bâtiment Mirande, 9, avenue Alain Savary, BP 47 870, 21078 Dijon cedex, France

Reçu le 19 juin 2003 ; accepté après révision le 4 octobre 2003

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

L'objet de cette Note est de présenter une preuve du résultat suivant : un champ de vecteurs C^1 robustement transitif sur une variété compacte n'admet aucune singularité. On montre tout d'abord l'incompatibilité d'une décomposition dominée avec la présence de singularités hyperboliques selles. On prouve ensuite que la robuste transitivité implique l'existence d'une décomposition dominée. ***Pour citer cet article : T. Vivier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Robustly transitive flows on compact manifolds. In this Note, we present a proof of the following result: robustly transitive C^1-vector fields on compact manifold admit no singularity. We first prove the incompatibility of dominated structure with hyperbolic saddles. Secondly, we show that robust transitivity implies the existence of dominated structure. ***To cite this article: T. Vivier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Let M be a compact riemannian boundaryless n-manifold, with $n \geqslant 3$, and X a C^1-vector field defined on M. The vector field X is *robustly transitive* if it admits a C^1-neighborhood U of *transitive* vector fields Y, i.e. Y admits a dense orbit in M. The main result in this note can be stated as follows:

Theorem 0.1. *If X is robustly transitive, then X has no singularity.*

This result is a generalization of Doering's result in dimension 3 (cf. [4]). The main tool in this proof is the notion of *dominated structure* (cf. Definition 2.2), which is a weak form of hyperbolicity.

Adresse e-mail : therese.vivier@u-bourgogne.fr (T. Vivier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.10.001

Let φ be the flow generated by X, $\mathrm{Sing}(X)$ the set of singularities of X, and Λ a set of regular points invariant under φ. Let N be the normal bundle for X: for any regular point p,

$$T_pM = \mathbb{R}.X(p) \overset{\perp}{\oplus} N_p.$$

We define the linear Poincaré flow $(P_t(x))_t$ (cf. Definition 2.1), for any $x \in \Lambda$ and any $t \geqslant 0$, as the linear part of the dynamic generated by φ between N_x and $N_{\varphi(t,x)}$.

A splitting $N = N^s \oplus N^u$ of the normal bundle over Λ (into two invariant subbundles of constant dimensions) is said *dominated* for the linear Poincaré flow $(P_t)_t$ if the difference between the exponential growth of any vector of N^u and the exponential growth of any vector of N^s during any time longer than a fixed constant is bigger than a fixed constant $A > 0$.

The proof of Theorem 1.1 now splits into two steps. In Proposition 3.1, we show, as in [4], that, under the assumption of hyperbolicity of all singular points, including at least a saddle-type singularity, there is no dominated structure over $M - \mathrm{Sing}(X)$ for the linear Poincaré flow $(P_t)_t$. In Proposition 3.2, we show that, if X is supposed to be robustly transitive, then there exists a dominated structure over $M - \mathrm{Sing}(X)$ for the linear Poincaré flow $(P_t)_t$. This proposition is a statement for flows of a result of Bonatti, Diaz and Pujals [2].

Let us present the sketch of the proof of Proposition 3.1. The first step is to prove (cf. Proposition 4.1) the following: under the assumption of existence of a dominated splitting $N = N^s \oplus N^u$ over Λ for the linear Poincaré flow, NO vector of the normal bundle over Λ is allowed to undergo at first an exponential growth too close to the exponential growth of a vector in N^u during an arbitrarily long time, and then an exponential contraction too close to the exponential contraction of a vector in N^s during an arbitrarily long time. On the other hand, one can prove that (cf. Corollary 4.3), in the neighborhood V of a saddle-type singularity on which X is supposed to be *linear*, there always exist vectors of the normal bundle, whose exponential growth is first arbitrarily close to the maximal exponential growth of the linear Poincaré flow on $N_{V-\mathrm{Sing}(X)}$ during an arbitrarily long time, and then arbitrarily close to the maximal exponential contraction of the linear Poincaré flow on $N_{V-\mathrm{Sing}(X)}$ during an arbitrarily long time. So, under these hypothesis, a saddle-type singularity p can not belong to $\mathrm{Int}(\Lambda \cup \{p\})$, if Λ admits a dominated structure for the linear Poincaré flow. Moreover, Lemma 4.4 states that any C^1 vector field admitting a dominated structure for the linear Poincaré flow and with all singularities hyperbolic can be approximated by C^1 vector fields, admitting a dominated structure for their linear Poincaré flow, and that are linear around their singularities. This concludes the proof of Proposition 3.1.

The proof of Proposition 3.2 is based on the following idea. Suppose X robustly transitive. Then the absence of dominated structure over $M - \mathrm{Sing}(X)$ for the linear Poincaré flow implies that, up to an arbitrarily small perturbation, there exists at least a sink or a source, which contradicts the robust transitivity assumption.

We shall make use of an adaptation for vector fields of Franks' Lemma [6]: the Proposition 5.1 enables us to perturb X in the C^1 topology by perturbing slightly the linear Poincaré flow $P_T(p)$, at $T > 0$ and p both fixed. This result enables us to work with *linear cocycles*. A *linear cocycle* is a pair $(\Sigma, (Q_t)_t)$, where Σ is a set of regular points invariant by φ, and $(Q_t(x))_t$ a family of linear applications C^1-depending on t, and continuous in $x \in \Sigma$, such that $Q_t(\varphi(s,x)) \circ Q_s(x) = Q_{t+s}(x)$. More precisely, we shall work with $(\Sigma_0, (Q_t)_t)$, where Σ_0 is the set of hyperbolic periodic points homoclinically related to a point p. Thanks to [3], we know that, up to an arbitrarily small perturbation of X, there is a point p such that Σ_0 is dense in M. As in [2], one can prove that, for such a linear cocycle $(\Sigma_0, (Q_t)_t)$, there is a dichotomy: either $M - \mathrm{Sing}(X)$ admits a dominated structure for $(Q_t)_t$, or for any $\varepsilon > 0$, there is a τ-periodic point $q \in \Sigma_0$ and an ε-perturbation $(\widetilde{Q}_t)_t$ of $(Q_t)_t$ such that $(\Sigma_0, (\widetilde{Q}_t)_t)$ is a linear cocycle, and $\widetilde{Q}_\tau(q)$ is an homothety. Up to an arbitrarily small perturbation, we can thus construct a sink or a source, which breaks the robust transitivity.

1. Introduction

Soit M une variété riemannienne compacte sans bord, de dimension $n \geqslant 3$, et X un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur M. Le champ de vecteurs X est dit *robustement transitif* s'il est *transitif* (i.e. admet une orbite dense dans M) et s'il admet un C^1-voisinage de champs de vecteurs transitifs. Les exemples les plus connus de tels champs sont les champs d'Anosov transitifs. Dans [4], Doering prouve qu'en dimension 3, les seuls champs robustement transitifs sont des champs d'Anosov (donc n'admettent pas de singularité). Le résultat principal de cette note est le suivant :

Théorème 1.1. *Si X est robustement transitif, il n'admet aucune singularité.*

Ce résultat est à comparer avec l'existence d'attracteurs robustement transitifs, tels que l'attracteur de Lorenz (cf. [1] et [5]). En effet, il est prouvé dans [7] qu'en dimension 3, tout attracteur robustement transitif possède une structure partiellement hyperbolique, avec une direction stable forte. Nous montrons ici que tout champ robustement transitif vérifie une forme affaiblie d'hyperbolicité (*décomposition dominée* du fibré normal). D'autre part, nous prouvons que cette structure ne peut exister sur tout un voisinage d'une singularité de type selle. L'existence d'une singularité est donc possible dans un attracteur de Lorenz (la singularité n'appartient pas à l'intérieur de l'attracteur), mais pas pour un champ robustement transitif.

2. Définitions et notations

Soit φ le flot associé au champ de vecteurs X, $\mathrm{Sing}(X)$ l'ensemble des singularités du champ de vecteurs X, et Λ un ensemble de points réguliers invariant par le flot φ. On note $\| \ \|$ la norme induite par la métrique riemannienne de M. Pour toute application linéaire A, on note $m(A) = 1/\|A^{-1}\|$. En tout point $p \notin \mathrm{Sing}(X)$, on note N_p le $(n-1)$-plan normal au champ de vecteurs $X(p)$:

$$T_pM = \mathbb{R}.X(p) \overset{\perp}{\oplus} N_p.$$

Définition 2.1. On définit le flot linéaire de Poincaré $(P_t(x))_t$ pour tout $x \in \Lambda$ et tout $t \geqslant 0$:

$$P_t(x) : N_x \to N_{\varphi(t,x)}, \qquad P_t = \pi_{\varphi(t,x)} \circ T_x\varphi(t,_{|N_x}),$$

où $\pi_y : T_yM \to N_y$ est la projection parallèle à $X(y)$.

Définition 2.2. On dit que le fibré normal de Λ admet une décomposition dominée $N = N^s \oplus N^u$ pour $(P_t)_t$ (ou que $(P_t)_t$ admet une décomposition dominée sur Λ) si :

- N^s et N^u sont deux fibrés invariants pour le flot linéaire de Poincaré $(P_t)_t$, de dimension constante sur Λ ;
- il existe $T_0 > 0$ et $A > 1$ tels que pour tout $t > T_0$, tout $x \in \Lambda$, et tout couple de vecteurs non nuls $(v^s, v^u) \in N^s_x \times N^u_x$:

$$\frac{\|P_t(v^s)\|}{\|P_t(v^u)\|} \leqslant \left(\frac{1}{A}\right)^t . \frac{\|v^s\|}{\|v^u\|}.$$

3. Schéma de la preuve

La preuve de ce théorème se décompose en deux étapes. Comme dans [4], la première étape montre l'incompatibilité d'une décomposition dominée avec la présence de singularités. La seconde étape montre que la robuste transitivité implique la présence d'une décomposition dominée.

Proposition 3.1. *Supposons toutes les singularités de X hyperboliques, et supposons qu'il existe une singularité de type selle.*

Alors le flot linéaire de Poincaré n'admet pas de décomposition dominée sur $M - \mathrm{Sing}(X)$.

Proposition 3.2. *Si X est robustement transitif, le flot linéaire de Poincaré admet une décomposition dominée sur $M - \mathrm{Sing}(X)$.*

Cette proposition est une version pour les flots du résultat de Bonatti, Diaz et Pujals concernant les difféomorphismes [2].

4. Preuve de la Proposition 3.1

La proposition suivante caractérise la croissance exponentielle d'un vecteur quelconque du fibré normal $N_{|\Lambda}$, en fonction de la croissance exponentielle des vecteurs de N^s et de N^u, où l'on suppose que $N_{|\Lambda}$ admet une décomposition dominée pour le flot linéaire de Poincaré $N_{|\Lambda} = N^s \oplus N^u$.

Proposition 4.1. *Soit X un champ de vecteurs de classe C^1, défini sur une variété riemannienne compacte sans bords M, et Λ un ensemble invariant pour X, dont le fibré normal admet une décomposition dominée $N_{|\Lambda} = N^s \oplus N^u$ pour le flot linéaire de Poincaré $(P_t)_t$.*

Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $T > 0$, tels que pour tout $r > T$, tout $s > T$, tout $t > r$, tout $x \in \Lambda$, et tout $v \in N_x$, l'une au moins de ces inégalités est vérifiée :

$$\frac{1}{r}.\ln\frac{\|P_r(v)\|}{\|v\|} \leqslant \frac{1}{r}.\ln\bigl(m(P_{r|N_x^u})\bigr) - \varepsilon, \tag{1}$$

$$\frac{1}{s}.\ln\frac{\|P_s(P_t(v))\|}{\|P_t(v)\|} \geqslant \frac{1}{s}.\ln\|P_{s|N^s_{\varphi(t,x)}}\| + \varepsilon. \tag{2}$$

Remarque 4.2. L'inégalité (1) signifie que v ne subit pas une dilatation exponentielle trop proche de celles que connaissent les vecteurs de N^u le long de la ligne de flot qui relie x à $\varphi(r, x)$.

L'inégalité (2) signifie que $P_t(v)$ ne subit pas une contraction exponentielle trop proche de celles que connaissent les vecteurs de N^s le long de la ligne de flot qui relie $\varphi(t, x)$ à $\varphi(t + s, x)$.

La proposition précédente peut donc s'interpréter de la façon suivante : « En l'existence d'une décomposition dominée $N = N^s \oplus N^u$, un vecteur de l'espace normal ne peut pas connaître successivement le long d'une ligne de flot d'abord une dilatation exponentielle proche de celle d'un vecteur de N^u pendant un temps arbitrairement long puis une contraction exponentielle proche de celle d'un vecteur de N^s pendant un temps arbitrairement long ».

Nous dirons que X est *linéaire au voisinage d'une singularité* p s'il existe une carte, voisinage de p, sur laquelle le champ de vecteurs est linéaire.

Une singularité p du champ de vecteurs X est dite *hyperbolique* si les valeurs propres de $DX(p)$ sont toutes de partie réelle non nulle. On dit alors que p est un *puits* si elles sont toutes de partie réelle négative, une *source* si elles sont toutes de partie réelle positive, une *selle* sinon.

Supposons X linéaire au voisinage d'une singularité hyperbolique p de type selle : la dilatation maximale est obtenue pour des vecteurs de la variété instable, la contraction maximale est obtenue pour des vecteurs de la variété stable. On considère un voisinage de p identifiable à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et on se restreint au sous-espace vectoriel engendré par les sous-espaces propres associés à la plus grande valeur propre (nécessairement positive) et à la plus petite valeur propre (nécessairement négative) de $DX(p)$. On montre alors que, le long des segments de flot partant arbitrairement près de la variété stable et approchant arbitrairement près la variété instable, il existe des vecteurs du fibré normal dont la croissance exponentielle est d'abord presque maximale sur un temps arbitrairement long, puis presque minimale sur un temps arbitrairement long. Cette propriété contredit la Proposition 4.1. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.3. *Supposons X linéaire au voisinage de p, singularité hyperbolique de type selle.*
Alors si le flot linéaire de Poincaré admet une décomposition dominée sur Λ, on a :

$$p \notin \mathrm{Int}\big(\Lambda \cup \{p\}\big).$$

Or la propriété d'existence d'une décomposition dominée du fibré normal est « ouverte » au sens suivant :

Lemme 4.4. *Supposons toutes les singularités de X hyperboliques. Soit $(X^n)_n$ une suite de champs de vecteurs de classe C^1 convergeant vers X en topologie C^1. On suppose que le fibré normal de $M - \mathrm{Sing}(X)$ admet une décomposition dominée pour le flot linéaire de Poincaré associé à X.*
Il existe alors $N > 0$, tel que pour tout $n \geqslant N$, le fibré normal de $M - \mathrm{Sing}(X^n)$ admet une décomposition dominée pour le flot linéaire de Poincaré associé à X^n.

Comme il est possible d'approcher en topologie C^1 tout champ de vecteurs de classe C^1 par des champs de vecteurs linéaires au voisinage de leurs singularités, le Corollaire 4.3 et le lemme précédent impliquent que X ne peut admettre de singularité hyperbolique de type selle, si le flot linéaire de Poincaré admet une décomposition dominée sur $M - \mathrm{Sing}(X)$. On en déduit la Proposition 3.1 annoncée.

5. Preuve de la Proposition 3.2

Le but de cette partie est de prouver que l'absence de décomposition dominée implique qu'une perturbation arbitrairement fine permet de créer un puits ou une source, ce qui brise la robuste transitivité.

La proposition suivante permet de créer un puits ou une source en perturbant le flot linéaire de Poincaré $P_T(x)$, où x est un point T-périodique. Cette proposition est une adaptation pour les champs de vecteurs d'un lemme de Franks [6] :

Proposition 5.1. *Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de X en topologie C^1.*
Pour tout $T > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout segment de flot régulier $\gamma = \varphi([0,T] \times \{p\})$ associé à X, pour tout voisinage U de ce segment de flot et pour toute ε-perturbation $\mathcal{Q}$ du flot linéaire de Poincaré $P_T(p)$, il existe un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{U}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} Y_{|\Gamma} = X_{|\Gamma}, \\ Y = X \textit{ hors de } U, \\ \textit{le flot linéaire de Poincaré } \widetilde{P}_T(p) \textit{ associé à } Y \textit{ est } \mathcal{Q}, \end{cases}$$

avec $\Gamma = \varphi([-t_1, t_2] \times \{p\})$, où $t_1 = \mathrm{Max}_{t>0}\, \varphi([-t, T] \times \{p\}) \in \overline{U}$ et $t_2 = \mathrm{Max}_{t>0}\, \varphi([0, t] \times \{p\}) \in \overline{U}$.

On appelle *cocycle linéaire* tout couple $(\Sigma, (Q_t)_t)$ où Σ est un ensemble de points réguliers invariant par le flot φ et $Q_t(x): N_x \to N_{\varphi(t,x)}$ est une famille d'applications linéaires, continue par rapport à x, continûment différentiable par rapport à t et telle que

$$Q_t\big(\varphi(s,x)\big) \circ Q_s(x) = Q_{t+s}(x).$$

Quitte à perturber X, il existe un point p périodique dont la classe homocline est M (l'existence d'un tel point est prouvée dans [3]). Soit Σ_0 l'ensemble des points périodiques hyperboliques homoclinement reliés à p. De même que dans [2], on montre qu'un tel cocycle linéaire $(\Sigma_0, (Q_t)_t)$ vérifie toujours l'une des deux propriétés suivantes :

- soit $(Q_t)_t$ admet une décomposition dominée ;
- soit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $q \in \Sigma_0$ de période τ et une ε-perturbation $(\widetilde{Q}_t)_t$ telle que $\widetilde{Q}_\tau(q)$ est une homothétie.

La preuve de cette dichotomie se base sur la notion de *cocycles linéaires admettant des transitions* et suit le schéma de [2]. La notion de transition est assez technique et ne peut être définie avec précision dans cette Note. Dans ce qui suit, nous essayons de présenter grossièrement ce que formalise cette notion.

Soient $\gamma = \varphi([0,\tau] \times \{q\})$ et $\gamma' = \varphi([0,\tau'] \times \{q'\})$ deux orbites périodiques dans Σ_0, de périodes respectives τ et τ'. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une orbite périodique passant un temps arbitrairement long dans un ε-voisinage de γ, puis un temps arbitrairement long dans un ε-voisinage de γ' ; on peut même imposer au temps de transition entre les deux voisinages d'être uniformément borné.

Notons $T_{q\to q'}$ (respectivement $T_{q'\to q}$) l'application linéaire caractérisant la dynamique linéaire engendrée sur le fibré normal le long d'une transition entre un ε-voisinage de q et un ε-voisinage de q' (respectivement entre un ε-voisinage de q' et un ε-voisinage de q). On dit que le cocycle linéaire $(\Sigma_0, (Q_t)_t)$ admet des ε-transitions si, pour tout tel couple (q, q'), tout couple d'entiers (n, m), il existe une ε-perturbation $(\widetilde{Q}_t)_t$ du cocycle linéaire et un point $y \in \Sigma$ de période T tel que $\widetilde{Q}_T(y)$ est égale à $T_{q'\to q} \circ (Q_{\tau'}(q'))^m \circ T_{q\to q'} \circ (Q_\tau(q))^n$. On dit alors qu'un cocycle linéaire *admet des transitions* s'il admet des ε-transitions pour tout ε assez petit.

Soit X un champ de vecteurs C^1 robustement transitif sur une variété compacte. L'absence de décomposition dominée du flot linéaire de Poincaré sur $M - \mathrm{Sing}(X)$ implique donc l'existence d'un point q τ-périodique et d'une ε-perturbation $(\widetilde{P}_t)_t$ du flot linéaire de Poincaré $(P_t)_t$ tels que $\widetilde{P}_\tau(q)$ soit une homothétie. Grâce à la Proposition 5.1, on peut alors perturber le champ de vecteurs, de façon à obtenir un puits ou une source, ce qui brise la robuste transitivité.

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, Christian Bonatti. Je tiens également à remercier Sylvain Crovisier pour ses conseils et son soutien.

Références

[1] V.S. Afraimovich, V.V. Bykov, L.P. Shil'nikov, On the appearance and structure of the Lorenz attractor, Dokl. Acad. Sci. USSR 234 (1977) 336–339.
[2] C. Bonatti, L.J. Diaz, E.R. Pujals, A C^1 generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, Ann. of Math., in press.
[3] C.M. Carballo, C.A. Morales, M.J. Pacifico, Homoclinic classes for generic C^1 vector fields, Ergodic Theory Dynamical Systems, in press.
[4] C.I. Doering, Persistently transitive vector fields on three-dimensional manifolds, in: Proc. on Dynamical Systems and Bifurcation Theory, in: Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. 160, 1987, pp. 59–89.
[5] J. Guckenheimer, R.F. Williams, Structural stability of Lorenz attractors, Publ. Math. IHES 50 (1979) 307–320.
[6] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (2) (1971) 302–304.
[7] C. Morales, M.J. Pacifico, E. Pujals, On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows, C. R. Acad. Sci. Paris 326 (1998) 81–86.