Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 761–766
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Espaces de Sobolev avec poids et équation scalaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^n$

Chérif Amrouche, Ulrich Razafison

Laboratoire de mathématiques appliquées, Université de Pau et des Pays de l'Adour, avenue de l'Université, 64000 Pau, France

Reçu le 10 septembre 2003 ; accepté le 29 septembre 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On présente ici des résultats d'existence et d'unicité pour l'équation scalaire d'Oseen dans des espaces de Sobolev avec poids. Ces poids contrôlent la croissance et la décroissance des fonctions à l'infini. La structure de la solution fondamentale nous amène à considérer des poids de types anisotropiques. Ce choix est également approprié pour obtenir des inégalités de type Poincaré. ***Pour citer cet article : C. Amrouche, U. Razafison, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Weighted Sobolev spaces for the steady scalar Oseen equation in $\mathbb{R}^n$. We present existence and uniqueness results for the steady scalar Oseen equation in weighted Sobolev spaces. The weights prescribe the behaviour of functions at infinity. Because of the structure of the fundamental solution, we use anisotropic weights. They are suitable to prove weighted Poincaré inequalities. ***To cite this article: C. Amrouche, U. Razafison, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

This Note is devoted to the study of the steady scalar Oseen equation

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 3, \tag{1}$$

where f is a given scalar function or a distribution and u is the unknown. To prescribe the growth or the decay properties of functions at infinity, the problem is set in weighted Sobolev spaces. Since the fundamental solution $\mathcal{O}$ of Eq. (1), for example when $n = 3$,

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-s/2}, \quad r = |\mathbf{x}|,\ s = r - x_1, \tag{2}$$

Adresses e-mail : Cherif.Amrouche@univ-pau.fr (C. Amrouche), ulrich.razafison@univ-pau.fr (U. Razafison).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.09.038

has various decay properties in different directions in $\mathbb{R}^n$, we deal with the anisotropic weight functions given by the formula $\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha(1+s)^\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Eq. (1) has been studied by Farwig [2] in weighted L^2 spaces. This Note is concerned with weighted L^p spaces, $1 < p < \infty$. Our main tool is the anisotropically weighted space

$$L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \eta_\beta^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

It is a Banach space equipped with the norm $\|u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \|\eta_\beta^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Our first aim is to prove Poincaré-type inequalities in anisotropically weighted Sobolev spaces. To that end, let us introduce the following spaces

$$X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \left\{v \in L^p_{\alpha-1/2,\beta-1/2}(\mathbb{R}^n), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n),\ i = 1, \ldots, n\right\},$$

$$Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \left\{v \in L^p_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n),\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

For any $j \in \mathbb{Z}$, we also define $\mathbb{P}_j$ the space of polynomials of degree lower than j, with the convention $\mathbb{P}_j = \{0\}$ when $j < 0$. Then the first main results are

Theorem 0.1. (i) *Let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisfy $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$, $\alpha + \beta + n/p - 1 \neq 0$. Let $j' = \min(j, 0)$, where j is the highest degree of the polynomials contained in $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Then, there exists a constant $C > 0$, such that*

$$\forall u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathcal{P}_{j'}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{(\alpha-1/2)p}(1+s)^{(\beta-1/2)p}|u+\lambda|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(ii) *Let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisfy $\beta \leqslant 0$ and $\alpha + n/p - 1 < 0$ or $\alpha + \beta + n/p - 1 > 0$. Let, now, j be the highest degree of the polynomials contained in $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Then, there exists a constant $C > 0$, such that*

$$\forall u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathcal{P}_{j'}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{(\alpha-1)p}(1+s)^{\beta p}|u+\lambda|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

We are now interested in solutions belonging to the space $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p_{-1,0}(\mathbb{R}^n), \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$ if $p \neq n$ and $W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) = \{u(\ln(1+\eta_0^1))^{-1} \in L^n_{-1,0}(\mathbb{R}^n), \nabla u \in L^n(\mathbb{R}^n)\}$. We notice that the space $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ is dense in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Introducing the dual space $W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ of $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, with $1/p + 1/p' = 1$, we have the following result.

Theorem 0.2. *For any $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$, satisfying the compatibility condition $\forall \varphi \in \mathbb{P}_{[1-n/p']},\ \langle f, \varphi\rangle_{W_0^{-1,p} \times W_0^{1,p'}} = 0$, Eq.* (1) *has a solution $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ unique up to an element of $\mathbb{P}_{[1-n/p]}$ and*

$$\inf_{K \in \mathbb{P}_{[1-n/p]}} \|u + K\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

where C is a positive constant independent of f and u.

Our last result is for existence of a solution in anisotropically weighted Sobolev spaces.

Theorem 0.3. *Assume $p \geqslant 2$ and $f \in L^p_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)$. Then problem* (1) *has a unique solution $u = \mathcal{O} * f \in L^p_{-1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)$ such that $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p_{0,1/2}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 1, 2, 3$, and $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)$. Moreover, we have the estimate*

$$\|u\|_{L^p_{-1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p_{0,1/2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f\|_{L^p_{1/2,1/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

1. Introduction

Dans cette Note, on étudie le problème (1) qui représente le modèle scalaire du système stationnaire d'Oseen. Le problème étant posé dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, afin de mieux décrire le comportement à l'infini des fonctions, on se place dans le cadre des espaces de Sobolev avec poids. Si on considère la solution fondamentale de l'équation (1), définie par (2) dans le cas de la dimension 3, on constate qu'elle a un comportement à l'infini qui varie selon différentes directions de $\mathbb{R}^n$. Cela nous amène à utiliser des poids anisotropiques de la forme $\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta$, avec $r = |\mathbf{x}|$ et $s = r - x_1$. Le cas hilbertien ($p = 2$) a été étudié par Farwig [2]. Notre travail est une extension aux espaces de Banach en général. Après une première partie où nous présentons les espaces de Sobolev avec poids anisotropiques et leurs premières propriétés, la deuxième partie est consacrée aux inégalités de Poincaré pour tout $1 < p < \infty$ (sauf pour certaines valeurs critiques de p où il faudrait modifier les poids en introduisant des facteurs logarithmiques). Enfin dans la dernière partie, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité pour l'Éq. (1).

2. Cadre fonctionnel et notations

Notons $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un point générique de $\mathbb{R}^n$, $r = |\mathbf{x}| = (x_1 + \cdots + x_n)^{1/2}$ sa norme euclidienne. Si B désigne un espace de distributions scalaire, $\mathbf{B}$ désignera l'espace B^n. De même, $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ désignera un champs de vecteurs. On définit à présent le poids anisotropique $\eta_\beta^\alpha = (1 + r)^\alpha (1 + s)^\beta$, avec $s = r - x_1$, ainsi que l'espace avec poids suivant : $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \eta_\beta^\alpha v \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$, qui est un espace de Banach pour sa norme $\|v\|_{L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \|\eta_\beta^\alpha v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. On introduit les espaces de Sobolev avec poids anisotropiques suivants : $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^p_{\alpha-1/2,\beta-1/2}(\mathbb{R}^n), \nabla v \in \mathbf{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\}$, $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^p_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n), \nabla v \in \mathbf{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\}$, qui sont des espaces de Banach pour leurs normes naturelles. Leurs propriétés locales sont identiques à celles des espaces classiques de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et on a les inclusions continues et denses $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \subset Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. On montre que

Proposition 2.1. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ (resp. dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$).*

Notons $X^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $Y^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^n)$), avec $1/p + 1/p' = 1$, le dual de $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$) qui sont donc des sous-espaces de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On note $\rho = 1 + r$ le poids isotrope. On rappelle les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W^{0,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \rho^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = L^p_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n),$$

$$W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \rho^{\alpha-1} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \rho^\alpha \nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad \text{si } n/p + \alpha \neq 1,$$

$$W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \rho^{\alpha-1}(\ln(1+\rho))^{-1} u \in L^p(\mathbb{R}^n), \rho^\alpha \nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad \text{si } n/p + \alpha = 1,$$

qui sont des espaces de Banach pour leurs normes naturelles. Notons que l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans ces espaces (cf. [1]). On désigne par $W^{-1,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ le dual de $W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. On remarque que si $n/p + \alpha \neq 1$, on a l'identité $W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = Y^{1,p}_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n)$. Enfin, on introduit l'espace :

$$\widetilde{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n) = \{v \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n), \partial v/\partial x_1 \in W^{-1,p}_0(\mathbb{R}^n)\}, \tag{3}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{\widetilde{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{W^{0,p}_{-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{W^{-1,p}_0(\mathbb{R}^n)}, \tag{4}$$

qui est équivalente à la norme naturelle de $\widetilde{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.2. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

3. Inégalités de Poincaré avec poids anisotropiques

On rappelle l'inégalité de Poincaré obtenue par Farwig [2] : si $\beta > 0$, $\alpha+\beta+\frac{1}{2} > 0$, alors il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\forall u \in X^{1,2}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} (1+r)^{2(\alpha-1/2)}(1+s)^{2(\beta-1/2)}|u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^3}(1+r)^{2\alpha}(1+s)^{2\beta}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{5}$$

Un résultat similaire est obtenu pour un domaine extérieur. On va généraliser l'inégalité (5) au cas $p \neq 2$ et réduire les contraintes sur α et β. Pour cela, on va distinguer deux cas : le cas $\beta > 0$ et le cas $\beta \leqslant 0$.

3.1. Le cas $\beta > 0$

Théorème 3.1. *Soit α, β deux réels satisfaisant $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ et $\alpha+\beta+n/p-1 \neq 0$. Soit $j' = \min(j, 0)$, où j est le plus haut degré des polynômes contenus dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\forall u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda\in\mathbb{P}_{j'}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{(\alpha-1/2)p}(1+s)^{(\beta-1/2)p}|u+\lambda|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}(1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{6}$$

Notons que si $\alpha+\beta+n/p-1 > 0$, alors $j < 0$. Cela signifie que $\mathbb{P}_{j'} = \{0\}$ et nous obtenons $\forall u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n}(1+r)^{(\alpha-1/2)p}(1+s)^{(\beta-1/2)p}|u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}(1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, qui est une généralisation de l'inégalité (5).

Preuve du théorème. La preuve est composée de trois étapes.

(i) Première étape : on montre que si $\gamma \in \mathbb{R}$ est tel que $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$ et si $\theta^* \in\,]0, \pi/2[$, alors pour toute fonction f positive mesurable définie sur $]0, \theta^*[$, telle que $\int_0^{\theta^*}(1-\cos\theta)^{\gamma+p/2}(\sin\theta)^{n-2}[f(\theta)]^p\,\mathrm{d}\theta < +\infty$, on a

$$\int_0^{\theta^*}(1-\cos\theta)^{\gamma}(\sin\theta)^{n-2}\big[F(\theta)\big]^p\,\mathrm{d}\theta \leqslant \left(\frac{p}{\gamma+1}\right)^p \int_0^{\theta^*}(1-\cos\theta)^{\gamma+p/2}(\sin\theta)^{n-2}\big[f(\theta)\big]^p\,\mathrm{d}\theta, \tag{7}$$

avec $F(\theta) = \int_\theta^{\theta^*} f(s)\,\mathrm{d}s$.

(ii) Deuxième étape : on introduit le secteur $S = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, r > R,\ 0 < s < \lambda r\}$, avec $R > 0$ et $0 < \lambda < 1$. Grâce à l'inégalité (7), on montre que si α, β sont deux réels satisfaisant $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$, alors il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{D}(S), \quad \int_S (1+r)^{(\alpha-1/2)p}(1+s)^{(\beta-1/2)p}|u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C\int_S (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{8}$$

(iii) Troisième étape : on désigne par B'_R le complémentaire de la boule fermée de centre 0 et de rayon R. On rappelle l'inégalité de Hardy suivante (cf. [5,7]) : on a

$$\forall f \in \mathcal{D}\big(]R,\infty[\big), \quad \int_R^{+\infty}\big|f(r)\big|^p r^{\gamma}\,\mathrm{d}r \leqslant C\int_R^{+\infty}\big|f'(r)\big|^p r^{\gamma+p}\,\mathrm{d}r, \quad \text{avec } \gamma+1 \neq 0. \tag{9}$$

Dans $\mathbb{R}^n \setminus S$, on a $c_1 r \leqslant s \leqslant c_2 r$, avec $c_1, c_2 > 0$. Ainsi, en utilisant l'inégalité (9), on montre que si α, β sont deux réels satisfaisant $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ et $\alpha + \beta + n/p - 1 \neq 0$, alors toute fonction $u \in \mathcal{D}(B_R')$ vérifie l'inégalité (8) où les intégrales sont prises sur B_R'. Ce résultat nous permet ensuite d'obtenir (6). □

On peut montrer par un contre-exemple que l'inégalité (6) n'est pas valable pour $\beta \leqslant 0$. Pour ce cas, nous avons un autre résultat.

3.2. Le cas $\beta \leqslant 0$

En procédant de la même manière que pour le cas $\beta > 0$, on obtient

Théorème 3.2. *Soit α, β deux réels satisfaisant $\beta \leqslant 0$ et $\alpha + n/p - 1 < 0$ ou $\alpha + \beta + n/p - 1 > 0$. On note maintenant j le plus haut degré des polynômes contenus dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\forall u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}\big(\mathbb{R}^n\big), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{(\alpha-1)p}(1+s)^{\beta p}|u+\lambda|^p \,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{10}$$

Nous pouvons remarquer que l'inégalité (6) implique l'inégalité (10).

4. Résultats d'existence et d'unicité

Nous allons, à présent, nous intéresser à la résolution de l'Éq. (1). On introduit l'espace des polynômes $S_k = \{q \in \mathbb{P}_k; -\Delta q + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0\}$. On rappelle que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des distributions tempérées. A l'aide de la transformée de Fourier, on peut montrer le résultat d'unicité suivant :

Lemme 4.1. *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation scalaire d'Oseen* (1) *avec $f = 0$, alors u appartient à S_k, pour un certain k.*

Nous rappelons un résultat d'existence pour une donnée f appartenant à $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cf. [3,4]).

Théorème 4.2. *Soit $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors l'équation scalaire d'Oseen* (1) *admet une solution $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, unique à un polynôme de S_1 près, telle que pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. De plus on a l'estimation* :

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On est maintenant en mesure de donner un premier résultat d'existence :

Théorème 4.3. *Soit $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$, alors l'Éq.* (1) *admet une unique solution $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/p]}$; de plus on a $\|u\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/p]}} \leqslant C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}$, où $C > 0$ est une constante independante de f et de u.*

Dans le cas de la dimension 3, en utilisant les résultats de Kračmar, Novotný et Pokorný [6] sur la convolution par la solution fondamentale, on peut expliciter la solution obtenue par le Théorème 4.3.

Proposition 4.4. *Soit f appartenant à $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[1-3/p']}$. Alors* :

(i) *si* $p \geqslant 3$, $\mathcal{O} * f \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ *est une solution de* (1), *unique à une constante additive près. De plus on a*

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \|\mathcal{O} * f + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}.$$

(ii) *Si* $1 < p < 3$, *il existe une unique constante* K *dépendant de* f *telle que* $\mathcal{O} * f + K \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ *est l'unique solution de* (1). *On a, de plus l'estimation* $\|\mathcal{O} * f + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}$.

Nous remarquons que, contrairement à $\mathcal{O} * f + K$, $\mathcal{O} * f$ n'appartient pas nécessairement à $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$. Nous allons voir que ce résultat peut être amélioré :

Proposition 4.5. *Si* $1 < p \leqslant 2$ *et* $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\mathbb{P}_{[1-3/p']}$, *alors*

$$\mathcal{O} * f \in \bigcap_{\varepsilon>0} W_{-1/2-\varepsilon}^{0,p}\big(\mathbb{R}^3\big).$$

De plus $\mathcal{O} * f \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ *est l'unique solution de* (1), *c'est-à-dire que la constante* K *donnée par la Proposition* 4.4 *est nulle. Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a aussi l'estimation*

$$\|\mathcal{O} * f\|_{W_{-1/2-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous donnons, à présent, un résultat d'existence dans un espace de Sobolev avec poids anisotropiques.

Théorème 4.6. *On suppose* $p \geqslant 2$, $f \in L_{1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)$. *Alors l'Éq.* (1) *admet une unique solution* $u = \mathcal{O} * f \in L_{-1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)$, *telle que* $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{0,1/2}^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_{1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 1, 2, 3$, *et* $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L_{1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)$. *De plus on a l'estimation*

$$\|u\|_{L_{-1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_{0,1/2}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L_{1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_{1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f\|_{L_{1/2,1/2}^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Références

[1] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroire, Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$, J. Math. Pures Appl. 73 (1994) 579–606.

[2] R. Farwig, A variational approach in weighted Sobolev Spaces to the operator $-\Delta + \partial/\partial x_1$ in exteriors domains of $\mathbb{R}^3$, Math. Z. 210 (1992) 449–464.

[3] R. Farwig, The stationary Navier–Stokes equations in 3D-exterior domain, in: Lecture Notes Numer. Appl. Anal., Vol. 16, 1998, pp. 53–115.

[4] G.P. Galdi, An Introduction to the Mathematical Study of Navier–Stokes Equations, Vol. 1, Springer-Verlag, 1994.

[5] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, Inequalities, 3e edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[6] S. Kračmar, A. Novotný, M. Pokorný, Estimates of Oseen kernels in weighted L^p spaces, J. Math. Soc. Japan 53 (1) (2001) 59–111.

[7] A. Kufner, Weighted Sobolev Spaces, Wiley, Chichester, 1985.