Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 639–644
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Propriété de Liouville et équation de Poisson pour le laplacien généralisé de Dunkl

Léonard Gallardo, Laurent Godefroy

Laboratoire de mathématiques et physique théorique, Université de Tours, parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Reçu le 18 septembre 2003 ; accepté le 30 septembre 2003

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Soit Δ_k le laplacien généralisé de Dunkl associé à un système de racines R dans $\mathbb{R}^N$ et à une fonction k définie sur R, positive et invariante par le groupe de Weyl. Dans cette Note, on montre que cet opérateur différentiel et aux différences sur $\mathbb{R}^N$ satisfait la propriété de Liouville, puis on résout l'équation de Poisson $\Delta_k u = -f$ par une méthode d'analyse de Fourier généralisée. ***Pour citer cet article : L. Gallardo, L. Godefroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Liouville's property and Poisson's equation for the generalized Dunkl Laplacian. Let Δ_k be the Dunkl generalized Laplacian associated to a root system R of $\mathbb{R}^N$ and a non-negative function k defined on R and invariant by the Weyl group. In this Note, we show that this differential-difference operator on $\mathbb{R}^N$ satisfies the Liouville property, then we solve the Poisson equation $\Delta_k u = -f$ by using a generalized Fourier analysis method. ***To cite this article: L. Gallardo, L. Godefroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Let R be a root system in $\mathbb{R}^N$, W the corresponding reflection group, R_+ a positive subsystem of R and k a non-negative and W-invariant function defined on R. The associated Dunkl Laplacian is the operator $\Delta_k = \sum_{i=1}^N T_i^2$, where for $1 \leqslant i \leqslant N$, T_i is the differential-difference operator defined for $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ and $x \in \mathbb{R}^N$ by

$$T_i u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_i \frac{u(x) - u(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle}$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ and σ_α denote respectively the usual scalar product and the reflection with respect to the hyperplane orthogonal to α in $\mathbb{R}^N$).

Adresses e-mail : gallardo@univ-tours.fr (L. Gallardo), godefroy@univ-tours.fr (L. Godefroy).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.09.032

In [7] it has been proven that the generalized heat equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k u$, $u(\cdot,0) = f$, $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$ and $|u(x,t)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{\lambda |x|^2}$ for $|x| > r$, for some constants $C, \lambda, r > 0$, has a unique solution $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} p_t(x,y) f(y) \omega_k(y)\,\mathrm{d}y$, where

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2t)^{\gamma+N/2} c_k}\, \mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/4t} E_k\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right)$$

is the generalized heat kernel, $|\cdot|$ denotes the euclidean norm, $E_k(\cdot,\cdot)$ is the Dunkl kernel, $\gamma = \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)$, $\omega_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |\langle \alpha, x\rangle|^{2k(\alpha)}$ and $c_k = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|x|^2/2} \omega_k(x)\,\mathrm{d}x$. For $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)$, we denote by

$$\mathcal{F}_k(f)(\xi) = \frac{1}{c_k} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) E_k(-\mathrm{i}\xi, x) \omega_k(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

the Dunkl transform of the function f (see [1] and [7] where another normalization is used).

In this Note, we prove the following results:

Theorem 0.1 (Liouville property). *Let u be a bounded C^2 function on $\mathbb{R}^N$ such that $\Delta_k u = 0$. Then u is constant.*

Theorem 0.2 (Poisson's equation). *Suppose $2\gamma + N > 2$. Then*

(i) *the function $G(x,y) = \int_0^{+\infty} p_t(x,y)\,\mathrm{d}t$ is finite for all $x \neq y$ in $\mathbb{R}^N$;*

(ii) *if f is either a continuous compactly supported function on $\mathbb{R}^N$ such that $\mathcal{F}_k(f) \in L^1(\mathbb{R}^N, \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)$ or a function in the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, then the function $Gf(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x,y) f(y) \omega_k(y)\,\mathrm{d}y$ is bounded, belongs to $C^2(\mathbb{R}^N)$ and satisfies the Poisson equation $\Delta_k u = -f$. Moreover, every bounded solution of this equation is of the form $u = Gf + C$ where C is a constant.*

1. Introduction

Associée à un groupe de réflexions de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, Dunkl a défini dans [2] une famille d'opérateurs différentiels et aux différences finies. Leur origine provient de l'étude des modèles de Calogero–Moser–Sutherland en mécanique quantique, et ils ont un intérêt en théorie des champs conformes [8]. Ils généralisent, en un certain sens, les opérateurs de dérivées partielles usuels et permettent de définir un laplacien. La caractérisation des fonctions harmoniques relatives à ce laplacien généralisé par une propriété adéquate de valeur moyenne a été étudiée dans [6]. On s'intéresse ici à deux autres questions classiques de théorie du potentiel : le théorème de Liouville et l'équation de Poisson.

Commençons par définir précisément ces opérateurs. Le lecteur est invité à consulter les articles [2,1,7] pour plus de détails. On munit $\mathbb{R}^N$ de sa structure euclidienne canonique, dont on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $|\cdot|$ la norme. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, σ_α désignera la réflexion par rapport à H_α, l'hyperplan orthogonal à α :

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle \alpha, x\rangle}{|\alpha|^2}\alpha.$$

Soit R un système de racines, c'est-à-dire une famille finie de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\forall \alpha \in R, \quad R \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\} \quad \text{et} \quad \sigma_\alpha(R) = R.$$

On note W le groupe de réflexions engendré par $\{\sigma_\alpha,\ \alpha \in R\}$. Pour β fixé appartenant à $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$, on note $R_+ = \{\alpha \in R \mid \langle \alpha, \beta\rangle > 0\}$. On supposera de plus que pour tout $\alpha \in R$, $|\alpha|^2 = 2$. Soit maintenant k une fonction positive, définie sur R et invariante par W. Pour $1 \leqslant i \leqslant N$ et u fonction différentiable sur $\mathbb{R}^N$, on pose :

$$T_i u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_i \frac{u(x) - u(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle}.$$

Enfin, on considère l'opérateur $\Delta_k = \sum_{i=1}^N T_i^2$, appelé laplacien de Dunkl, et qui si $k(\cdot) \equiv 0$ se réduit au laplacien usuel.

Dans cette Note, nous nous intéressons donc à l'équation de Poisson associée, c'est-à-dire nous résolvons l'équation $\Delta_k u = -f$. Nous démontrons également un théorème de type Liouville, à savoir que les seules fonctions u bornées et de classe C^2 vérifiant $\Delta_k u = 0$ sont les fonctions constantes. Pour ce faire, nous utilisons une transformation généralisant la transformation de Fourier classique, ainsi que les résultats de Rösler [7] sur l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k u$. Cette méthode (voir aussi [5]) permet de s'affranchir des difficultés techniques inhérentes à la méthode usuelle [4] qui demande une connaissance explicite du noyau de Green.

2. Rappels sur la transformation de Dunkl et sur l'équation de la chaleur

Nous collectons dans cette partie quelques résultats dont les démonstrations figurent dans [1,2,7].

Notons tout d'abord ω_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par $\omega_k(x) = \prod_{\alpha\in R_+} |\langle\alpha, x\rangle|^{2k(\alpha)}$. On remarquera que ω_k est W-invariante, homogène de degré 2γ avec $\gamma = \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$ et que $|\omega_k(x)| \leqslant 2^\gamma |x|^{2\gamma}$. Posons $c_k = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\omega_k(x)\,\mathrm{d}x$ (on notera que notre constante n'est pas la même que dans [1,7]).

Pour $y \in \mathbb{R}^N$ fixé, le système

$$\begin{cases} T_i u(x, y) = y_i u(x, y), \quad i = 1, \ldots, N, \\ u(0, y) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

admet une unique solution analytique sur $\mathbb{R}^N$, notée $E_k(\cdot, y)$. Ce noyau, qui est strictement positif et qui se réduit à $\mathrm{e}^{\langle\cdot,y\rangle}$ si $k \equiv 0$, est appelé noyau de Dunkl. Il a un unique prolongement holomorphe à $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ et vérifie pour $z, w \in \mathbb{C}^N$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\nu \in \mathbb{N}^N$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$E_k(z, w) = E_k(w, z), \qquad E_k(\lambda z, w) = E_k(z, \lambda w), \tag{2}$$

$$\left|E_k(\mathrm{i}x, y)\right| \leqslant 1, \qquad \left|\partial_x^\nu E_k(x, z)\right| \leqslant |z|^{|\nu|}\mathrm{e}^{|x|\,|\mathrm{Re}(z)|}. \tag{3}$$

La transformation de Dunkl est l'application de $L^1(\mathbb{R}^N, \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)$ dans $C_b(\mathbb{R}^N)$ définie par :

$$\mathcal{F}_k(f)(\xi) = \frac{1}{c_k}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)E_k(-\mathrm{i}\xi, x)\omega_k(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

(voir [1], avec une autre normalisation). Cette transformation est un automorphisme de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, et vérifie une formule d'inversion : pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)$ telle que $\mathcal{F}_k(f) \in L^1(\mathbb{R}^N, \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)$, on a $f = \mathcal{F}_k^\vee(\mathcal{F}_k(f))$ p.p. où $\mathcal{F}_k^\vee(f)(\xi) = \mathcal{F}_k(f)(-\xi)$.

Enfin, terminons ces rappels par quelques résultats sur le noyau de la chaleur associé au laplacien de Dunkl (cf. [7]). Pour $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$, on pose :

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2t)^{\gamma+N/2}c_k}\mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/4t}E_k\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right). \tag{4}$$

Pour $y \in \mathbb{R}^N$ fixé, la fonction $u(x, t) = p_t(x, y)$ est solution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k u$ sur $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$. On a $\int_{\mathbb{R}^N} p_t(x, y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y = 1$ et l'inégalité

$$p_t(x, y) \leqslant \frac{1}{(2t)^{\gamma+N/2}c_k}\mathrm{e}^{-(|x|-|y|)^2/4t}. \tag{5}$$

De plus, $\mathcal{F}_k(p_t(\cdot, y))(\xi) = c_k^{-1}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}E_k(-\mathrm{i}y, \xi)$, et on a donc d'après la formule d'inversion :

$$p_t(x, y) = \frac{1}{c_k^2}\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}E_k(\mathrm{i}x, \xi)E_k(-\mathrm{i}y, \xi)\omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

Pour $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$, posons $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} p_t(x,y) f(y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y$. Alors $u(x,t) = P_t f(x)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k u \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases} \tag{7}$$

dans la classe $\{u \in C^2(\mathbb{R}^N \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0,\infty)) \mid \exists C, \lambda, r > 0,\ |u(x,t)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{\lambda |x|^2} \text{ pour } |x| > r\}$.

3. Théorème de Liouville

Théorème 3.1. *Soit u de classe C^2 et bornée sur $\mathbb{R}^N$ vérifiant $\Delta_k u = 0$. Alors u est une fonction constante.*

Démonstration. D'après le résultat d'unicité pour l'équation de la chaleur associée au laplacien de Dunkl, on a nécessairement :

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad P_t u(x) = u(x).$$

L'estimation (3) permet de différentier sous le signe intégral, on obtient donc, pour i entier entre 1 et N :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2t)^{\gamma+N/2} c_k} \left(-\frac{x_i}{2t}\right) \mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/4t} E_k\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right) u(y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2t)^{\gamma+N/2} c_k} \mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/4t} \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{\partial E_k}{\partial x_i}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}, \frac{y}{\sqrt{2t}}\right) u(y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Posons $M = \sup_{\mathbb{R}^N} |u|$. D'après (3), on a alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant\ & M \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|}{(2t)^{\gamma+N/2+1} c_k} \mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/4t}\, \mathrm{e}^{(|x||y|)/2t} \omega_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ M \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|}{(2t)^{\gamma+N/2+1} c_k} \mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/4t}\, \mathrm{e}^{(|x||y|)/2t} \omega_k(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-|x|^2/4t} \leqslant 1$, on a même :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant\ & M \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|}{(2t)^{\gamma+N/2+1} c_k} \mathrm{e}^{-(|y|^2-2|x||y|)/4t} \omega_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ M \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|}{(2t)^{\gamma+N/2+1} c_k} \mathrm{e}^{-(|y|^2-2|x||y|)/4t} \omega_k(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{8}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^N$. On voit aisément qu'il existe $A > 0, C > 0$ tels que pour $y \in \mathbb{R}^N$ on ait :

- si $|y| \geqslant A$ alors $\frac{1}{2}|y|^2 \leqslant |y|^2 - 2|x||y|$;
- si $|y| \leqslant A$ alors $-C|x||y| \leqslant |y|^2 - 2|x||y|$.

On écrit ensuite chacune des intégrales de l'inégalité (8) comme somme de deux intégrales, l'une sur $\{|y| < A\}$ et l'autre sur $\{|y| \geqslant A\}$. En utilisant ensuite les deux inégalités précédentes, on obtient pour tout $t > 0$:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

avec

$$I_1 = \frac{M|x|}{(2t)^{\gamma+N/2+1}c_k} \int\limits_{\{|y|<A\}} \mathrm{e}^{C|x||y|/4t}\omega_k(y)\,\mathrm{d}y, \qquad I_2 = \frac{M|x|}{(2t)^{\gamma+N/2+1}c_k} \int\limits_{\{|y|\geqslant A\}} \mathrm{e}^{-|y|^2/8t}\omega_k(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \frac{M}{(2t)^{\gamma+N/2+1}c_k} \int\limits_{\{|y|<A\}} |y|\,\mathrm{e}^{C|x||y|/4t}\omega_k(y)\,\mathrm{d}y, \qquad I_4 = \frac{M}{(2t)^{\gamma+N/2+1}c_k} \int\limits_{\{|y|\geqslant A\}} |y|\,\mathrm{e}^{-|y|^2/8t}\omega_k(y)\,\mathrm{d}y.$$

Il est facile de voir que $I_1 \to 0$ et $I_3 \to 0$ quand $t \to +\infty$. On écrit ensuite que :

$$I_2 \leqslant \frac{M|x|}{(2t)^{\gamma+N/2+1}c_k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|y|^2/8t}\omega_k(y)\,\mathrm{d}y = \frac{M|x|}{2^{\gamma+N/2+1}c_k}\frac{1}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|v|^2/8}\omega_k(v)\,\mathrm{d}v.$$

On a pour ce faire effectué le changement de variable $v = y/\sqrt{t}$ et utilisé la propriété d'homogénéité de ω_k. On a donc aussi $I_2 \to 0$ quand $t \to +\infty$. Le cas de I_4 se traite par la même méthode. On a donc montré que $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$. Ainsi u est une fonction constante. □

4. Équation de Poisson

Proposition 4.1. *L'intégrale $G(x, y) = \int_0^{+\infty} p_t(x, y)\,\mathrm{d}t$ est finie pour $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^N$ si et seulement si $2\gamma + N > 2$. La fonction G ainsi définie est alors appelée noyau de Green du laplacien de Dunkl.*

Démonstration. Pour la condition suffisante utiliser (5). La condition nécessaire résulte du fait que l'inégalité (5) est une égalité si $x = 0$.

Remarque 1. Cette condition est vérifiée dès que $N \geqslant 2$ et que Δ_k n'est pas réduit au laplacien usuel.

Théorème 4.2. *Supposons $2\gamma + N > 2$. Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\mathcal{F}_k(f) \in L^1(\mathbb{R}^N, \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)$ ou une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. La fonction $Gf(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x, y)f(y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y$, appelée potentiel de f, est bornée, de classe C^2 et vérifie l'équation de Poisson*

$$\Delta_k u = -f.$$

De plus, toute solution bornée de cette équation est de la forme $u = Gf + C$, où C est une constante.

Démonstration. On va d'abord vérifier simultanément que la fonction Gf est bien définie et est bornée. On peut supposer que $f \geqslant 0$. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives, on a : $Gf(x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} p_t(x, y)f(y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$. Grâce à (6), cette formule se réécrit : $Gf(x) = \frac{1}{c_k^2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2} E_k(\mathrm{i}x, \xi) \times E_k(-\mathrm{i}y, \xi) f(y)\omega_k(\xi)\omega_k(y)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$. En utilisant (3) et l'hypothèse faite sur f on a :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\mathrm{e}^{-t|\xi|^2} E_k(\mathrm{i}x, \xi)E_k(-\mathrm{i}y, \xi)f(y)\omega_k(\xi)\omega_k(y)\right|\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2} f(y)\omega_k(\xi)\omega_k(y)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

L'application du théorème de Fubini et de la formule d'inversion pour la transformation de Dunkl nous conduit à :

$$Gf(x) = \frac{1}{c_k} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2} E_k(\mathrm{i}x, \xi)\mathcal{F}_k(f)(\xi)\omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

On a donc :

$$\left|Gf(x)\right| \leqslant \frac{1}{c_k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2} \left|\mathcal{F}_k(f)(\xi)\right| \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{c_k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\mathcal{F}_k(f)(\xi)|}{|\xi|^2} \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

La continuité de $\mathcal{F}_k(f)$, l'inégalité $|\omega_k(\xi)| \leqslant 2^\gamma |\xi|^{2\gamma}$ et l'hypothèse sur γ impliquent que $\int_{\{|\xi|<1\}} \frac{|\mathcal{F}_k(f)(\xi)|}{|\xi|^2} \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi < +\infty$. De plus, $\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \frac{|\mathcal{F}_k(f)(\xi)|}{|\xi|^2} \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}_k(f)(\xi)| \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi < +\infty$. Ceci prouve que la fonction Gf est bien définie et est bornée.

On peut alors appliquer le théorème de Fubini dans l'égalité (9). On obtient :

$$Gf(x) = \frac{1}{c_k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathcal{F}_k(f)(\xi)}{|\xi|^2} E_k(\mathrm{i}x,\xi) \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Montrons maintenant que Gf vérifie l'équation de Poisson. On peut voir que le passage du laplacien de Dunkl sous le signe intégral se justifie en controlant les dérivées partielles de l'intégrande. Or, d'après (3) on a ici : $|\frac{\partial}{\partial x_i} E_k(\mathrm{i}x,\xi)| \leqslant |\xi|$ et $|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_k(\mathrm{i}x,\xi)| \leqslant |\xi|^2$, pour $x, \xi \in \mathbb{R}^N$, $i, j = 1, \ldots, N$. Ceci est suffisant pour affirmer que

$$\Delta_k Gf(x) = \frac{1}{c_k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathcal{F}_k(f)(\xi)}{|\xi|^2} (\Delta_k)_x \big(E_k(\mathrm{i}x,\xi)\big) \omega_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

On conclut alors en utilisant le fait que $(\Delta_k)_x(E_k(\mathrm{i}x,\xi)) = -|\xi|^2 E_k(\mathrm{i}x,\xi)$ (cf. (1)) et la formule d'inversion pour la transformée de Dunkl.

La représentation des solutions bornées de l'équation de Poisson sous la forme $u = Gf + C$, découle de ce qui précède et du Théorème 3.1.

Exemple 1. Si $N = 1$ on a $R = \{\pm\sqrt{2}\}$ et $k(\sqrt{2}) = k(-\sqrt{2}) = \gamma$. On sait d'après [3] que $E_k(x,y) = \frac{\Gamma(\gamma+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\gamma)} \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{uxy} (1-u)^{\gamma-1}(1+u)^\gamma\,\mathrm{d}u$, où $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} u^{z-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$. Si $\gamma > 1/2$, un calcul facile montre alors que

$$G(x,y) = \frac{\Gamma(\gamma-1/2)}{4\Gamma(1/2)\Gamma(\gamma)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+y^2-2uxy)^{\gamma-1/2}} (1-u)^{\gamma-1}(1+u)^\gamma\,\mathrm{d}u.$$

On voit ainsi que si $C = \frac{\Gamma(\gamma-1/2)}{4\Gamma(\gamma+1/2)}$, $G(x,y) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{C}{|x|^{2\gamma-1}}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé. Il en résulte aisément que pour toute fonction f continue à support compact sur $\mathbb{R}$, $|x|^{2\gamma-1} Gf(x) \underset{x\to\infty}{\sim} C \int_{\mathbb{R}} f(y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y$.

Références

[1] M.F.E. de Jeu, The Dunkl transform, Invent. Math. 113 (1) (1993) 147–162.
[2] C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1) (1989) 167–183.
[3] C.F. Dunkl, Integral kernels with reflection group invariance, Canad. J. Math. 43 (6) (1991) 1213–1227.
[4] L.C. Evans, Partial Differential Equations, in: Graduate Stud. in Math., Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
[5] L. Gallardo, K. Trimèche, L'équation de Poisson et les noyaux de Green associés à un opérateur différentiel singulier sur $\mathbb{R}^+$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 324 (3) (1997) 259–264.
[6] H. Mejjaoli, K. Trimèche, On a mean value property associated with the Dunkl Laplacian operator and applications, Integral Transform. Spec. Funct. 12 (3) (2001) 279–302.
[7] M. Rösler, Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, Comm. Math. Phys. 192 (3) (1998) 519–542.
[8] J.F. van Diejen, L. Vinet, Calogero–Sutherland–Moser Models, in: CRM Series in Math. Phys., Springer-Verlag, 2000.