Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 777–780
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie analytique/Systèmes dynamiques

Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive

Bertrand Deroin

Unité de mathématiques pures et appliquées, École normale supérieure de Lyon, UMR 5669 CNRS, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Reçu et accepté le 8 septembre 2003

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous démontrons qu'il n'y a pas d'immersion Levi-plate de classe C^1 d'un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété compacte de dimension 3 dans le plan projectif complexe, si le feuilletage possède un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité bornée supérieurement et inférieurement. Ceci découle d'un résultat de rigidité pour les immersions Levi-plates d'un feuilletage ayant la même régularité, à valeurs dans une surface complexe de courbure de Ricci positive ou nulle. ***Pour citer cet article : B. Deroin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Levi-flat hypersurfaces immerged in complex surfaces of positive curvature. We prove that there is no Levi-flat immersion of class C^1 of a Riemann surface foliation of class C^1 of a 3-dimensional compact manifold in the complex projective plane, if the foliation carries a harmonic current which is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, with a density bounded from above and below. This comes as a corollary of a rigidity result for Levi-flat immersions of class C^1 of Riemann surface foliations having this regularity into complex surfaces of non negative Ricci curvature. ***To cite this article: B. Deroin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Une hypersurface réelle d'une surface complexe est dite *Levi-plate* si elle est feuilletée par des courbes holomorphes. Récemment, Siu [10] et Cao, Shaw, Wang [4] ont démontré qu'il n'y a pas d'hypersurface Levi-plate compacte de classe C^8 et $C^{2+\alpha}$ respectivement dans le plan projectif complexe. Dans cette Note, nous montrons que, sous une hypothèse additionnelle de régularité, il n'y a pas non plus d'immersion Levi-plate. Par ailleurs, nous donnons un résultat de rigidité pour les immersions Levi-plates à valeurs dans une surface complexe de courbure de Ricci positive ou nulle. La régularité dont nous avons besoin est de nature globale et provient de la dynamique du feuilletage par surfaces de Riemann.

Adresse e-mail : bderoin@umpa.ens-lyon.fr (B. Deroin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.09.016

Il est bien connu, depuis les travaux [2] et [9], qu'une lamination compacte minimale par courbes holomorphes du plan projectif n'a pas de cycle feuilleté, sauf si c'est une courbe compacte. Cependant, beaucoup de laminations abstraites n'ont pas de cycle feuilleté non plus. En général Garnett [7] a démontré l'existence d'un *courant harmonique* sur tout feuilletage par surfaces de Riemann. Un courant harmonique est un opérateur linéaire sur l'espace des 2-formes lisses le long des feuilles, strictement positif et $\bar\partial\partial$-fermé. Une démonstration simple de l'existence d'un courant harmonique se trouve dans [3] et [8]. Notre hypothèse de régularité est l'existence d'un courant harmonique *absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives*. Un tel courant sera dit AC pour alléger l'exposé.

Théorème 1.1. *Soit S une surface complexe ayant une métrique hermitienne de courbure de Ricci positive ou nulle Ω, et $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété compacte de dimension* 3*. Si $\mathcal{F}$ possède un courant harmonique AC alors pour toute immersion $\pi : M \to S$ de classe C^1 et holomorphe le long des feuilles nous avons $\pi^*\Omega = 0$, ou bien $\mathcal{F}$ possède un cycle feuilleté C et $\pi^*\Omega = 0$ sur le support de C, ou bien c'est que $\mathcal{F}$ est un quotient du feuilletage horizontal de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{S}^1$.*

La métrique de Fubini-study sur le plan projectif complexe est à courbure de Ricci strictement positive, ce qui nous donne le corollaire suivant.

Corollaire 1.2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème* 1.1*, il n'y a pas d'immersion dans le plan projectif complexe de classe C^1, holomorphe le long des feuilles.*

2. Idée de démonstration

Un *feuilletage par surfaces de Riemann* de classe C^1 est un couple $(M, \mathcal{F})$, où M est une variété compacte de classe C^1 et où $\mathcal{F}$ est un atlas complet de difféomorphismes $\varphi : U \to \mathbb{D} \times I$ de classe C^1 définis sur des ouverts U recouvrant M et à valeurs dans le produit du disque unité par une boule, en sorte que les changements de cartes préservent la fibration locale par disques, et soient holomorphes le long des fibres. Les notions classiques dont on dispose pour les surfaces de Riemann s'étendent naturellement au cas d'un feuilletage par surfaces de Riemann en considérant le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions qui sont continues et holomorphes le long des feuilles. Par exemple un fibré en droites holomorphe est un élément du groupe $H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété de dimension 3. Le fibré normal à $\mathcal{F}$ dans M est un fibré réel de rang 1, et la différentielle de l'holonomie le munit d'une connexion plate le long des feuilles, appelée *connexion de Bott*. Cette connexion s'étend naturellement à son complexifié N et lui confère une structure de fibré en droites holomorphe, une section locale étant considérée comme holomorphe si elle diffère d'une section plate par multiplication par une fonction de $\mathcal{O}$. Le lemme suivant montre que le fibré normal $\mathcal{N}_{\mathcal{F},S}$ aux feuilles d'une immersion $\pi : M \to S$ de classe C^1 et holomorphe le long des feuilles est complètement déterminé par la dynamique de $\mathcal{F}$, et ne dépend ni de π ni de S.

Lemme 2.1. *Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété de dimension* 3 *et $\pi : M \to S$ une immersion de classe C^1 et holomorphe le long des feuilles. Alors* $\mathrm{d}\pi$ *induit un isomorphisme de fibré en droites holomorphe $N \simeq \mathcal{N}_{\mathcal{F},S}$.*

Idée de démonstration. La différentielle $\mathrm{d}\pi$ induit déjà un isomorphisme C^∞ de fibré en droites complexes. Il suffit donc de prouver qu'une section holomorphe locale de N est envoyée sur une section holomorphe de $\mathcal{N}_{\mathcal{F},S}$. Mais c'est simplement le fait qu'une limite de fonctions holomorphes est holomorphe.

Candel a étendu au cas feuilleté la notion de *classe de Chern* d'un fibré en droites holomorphe $E \to \mathcal{F}$ contre un courant harmonique C. A partir d'une métrique hermitienne $|\cdot|$ lisse sur E, il définit

$$c_1(E, C) := \frac{1}{2\pi} C\big(\text{courbure}(|\cdot|)\big), \tag{1}$$

où la courbure de $|\cdot|$ est la $(1,1)$-forme définie localement par $\frac{\sqrt{-1}}{2}\bar{\partial}\partial \log |s|^2$, s étant une section holomorphe locale ne s'annulant pas (voir [8], p. 69). Nous nous concentrons sur la *classe normale* d'un courant harmonique C, définie par

$$n(C) := c_1(N, C). \tag{2}$$

Remarque 1. La classe normale d'un courant harmonique C a une interprétation en termes de la théorie du mouvement brownien le long des feuilles engendré par C. Soit Γ l'espace des chemins continus $\gamma : [0, +\infty[\to M$ contenus dans une feuille de $\mathcal{F}$ et S le semi-groupe défini pour $t \geqslant 0$ par $S_t(\gamma)(s) = \gamma(t+s)$. A partir d'une métrique conforme g et d'un courant harmonique C, Garnett [7] construit une mesure ν sur Γ invariante par S. Considérons une métrique lisse $|\cdot|$ sur le fibré normal à $\mathcal{F}$, et pour tout t définissons la fonctionnelle H_t sur Γ par

$$H_t(\gamma) = -\log\big|h'\big(\gamma(0)\big)\big|, \tag{3}$$

où h est l'holonomie d'une transversale passant par $\gamma(0)$ vers une transversale passant par $\gamma(t)$, définie en suivant $\gamma_{|[0,t]}$.

Proposition 2.2. *Pour tout $t \geqslant 0$, $\int_\Gamma H_t \, d\nu = \pi n(C) t$.*

La classe normale mesure donc comment les feuilles de $\mathcal{F}$ convergent les unes vers les autres en moyenne. Nous ne démontrons pas cette proposition ici, car elle n'est pas essentielle pour la démonstration du théorème.

Notre lemme principal est 2.3, et relie la classe normale à l'*action*, introduite par Frankel dans [6]. Un courant harmonique C se décompose dans une boîte $\mathbb{D} \times I$ de la façon suivante [8] : il existe une mesure μ sur I et une fonction positive $\varphi \in L^1(leb \otimes \mu)$ telle que $\varphi(\cdot, t)$ est harmonique pour μ-presque tout t de I et

$$C(\omega) = \int_I \Bigg(\int_{\mathbb{D}\times t} \varphi(\cdot, t)\omega \Bigg) d\mu(t), \tag{4}$$

pour toute 2-forme lisse ω dont le support est contenu dans $\mathbb{D} \times I$. L'action de C est définie par

$$A(C) := \int_M |d \log \varphi|_g^2 \, d\nu_g, \tag{5}$$

où g est une métrique conforme lisse le long des feuilles et où la mesure ν_g est définie localement par $\nu_g = \varphi \, dv_g \otimes \mu$. Dans [6], Frankel démontre l'inégalité

$$A(C) \leqslant -\pi \chi(C), \tag{6}$$

pour tout courant harmonique sur une suspension au dessus d'une surface de Riemann compacte de genre supérieur à deux, où $\chi(C) = c_1(T\mathcal{F}, C)$ est la caractéristique d'Euler de C.

Lemme 2.3. *Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété compacte de dimension* 3*, et C un courant harmonique AC. Alors $n(C) = \frac{1}{\pi} A(C)$.*

Admettons d'abord ce lemme et considérons une surface complexe de courbure de Ricci Ω positive ou nulle et une immersion $\pi : M \to S$ de classe C^1, holomorphe le long des feuilles. Supposons dans un premier temps que $\mathcal{F}$ possède une feuille sphérique ou parabolique. Dans ce cas le lemme d'Ahlfors [1] fournit un cycle feuilleté C et par une méthode analogue à celle de [2], pp. 196–197, on montre que la classe normale de C s'annule. Écrivons alors la formule d'adjonction

$$K_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_{\mathcal{F},S} \otimes K_S, \tag{7}$$

et prenons les classes de Chern. D'après le Lemme 2.1, nous obtenons $-\chi(C) = c_1(K_S, C)$, et puisque la courbure de Ricci est la courbure de $-K_S$, $\chi(C) = \frac{1}{2\pi}C(\Omega)$. Si $\pi^*\Omega$ n'est pas nulle sur le support de C, alors c'est que $\chi(C) > 0$. Un théorème de Connes [5], p. 550, montre dans ce cas que $\mathcal{F}$ possède une feuille sphérique et le théorème découle du théorème de stabilité de Reeb.

Si aucune feuille n'est sphérique ou parabolique, nous pouvons étendre l'inégalité de Frankel (formule (6)). En vertu du Lemme 2.3 et de la formule d'adjonction (7) nous obtenons alors $C(\Omega) \leqslant 0$, ce qui démontre que $\pi^*\Omega$ est nulle sur le support de C. Le théorème est démontré.

Idée de démonstration du Lemme 2.3. La mesure transverse $\varphi \otimes \mu$ de la formule (4) peut être considérée comme une métrique singulière $|\cdot|$ sur N avec une densité L^∞, pour la mesure de Lebesgue. Sa courbure est donnée dans une boîte $\mathbb{D} \times I$ par courbure$(|\cdot|) = \sqrt{-1}\bar\partial\partial \log\varphi$, et puisque φ est harmonique, nous avons la formule $\sqrt{-1}\bar\partial\partial\log\varphi = |d\log\varphi|_g^2\, \mathrm{d}v_g$ pour n'importe quelle métrique conforme g le long des feuilles. Il nous suffit donc de prouver la formule 1 pour les métriques singulières avec un poids dans $L^\infty(\nu_g)$. Mais on peut approximer dans $L^1(\nu_g)$ une telle métrique ainsi que ses dérivées à l'ordre 2 par des métriques lisses et le lemme est démontré.

Remerciements

Je remercie Étienne Ghys de m'avoir soumis ce problème et encouragé par de nombreuses conversations. Ce travail a été réalisé en partie à l'UNAM (Cuernavaca), où j'ai bénéficié de conditions de recherche très stimulantes.

Références

[1] L. Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungflächen, Acta Math. 65 (1935) 157–194.
[2] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, Minimal sets of foliations on complex projective spaces, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 68 (1988) 187–203.
[3] A. Candel, The harmonic measures of Lucy Garnett, Adv. Math. 176 (2) (2003) 187–247.
[4] J. Cao, M.C. Shaw, L. Wang, Estimates for the $\bar\partial$-Neumann problem and nonexistence of Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{C}P^n$, math.DG/0305211.
[5] A. Connes, A Survey of Foliations and Operator Algebras, in: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 1982, pp. 521–628.
[6] S. Frankel, Harmonic analysis of surface group representations to Diff(S^1) and Milnor type inequalities, Prépublication de l'École Polytechnique, 1125, 1996.
[7] L. Garnett, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, J. Funct. Anal. 51 (3) (1983) 285–311.
[8] É. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann, in: Dynamiques et géométrie complexe (Lyon, 1997), in: Panor. Synthèses, Vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 1999.
[9] S. Hurder, Y. Mitsumatsu, The intersection product of transverse invariant measures, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991) 1169–1183.
[10] Y.-T. Siu, $\bar\partial$-regularity for weakly pseudoconvex domains in compact Hermitian symmetric spaces with respect to invariant metrics, Ann. of Math. 156 (2) (2002) 595–621.