Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 527–530
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse fonctionnelle

Sur les opérateurs précompacts positifs

Belmesnaoui Aqzzouz, Redouane Nouira

Université Ibn Tofail, faculté des sciences, département de mathématiques et informatique, équipe d'analyse fonctionnelle, BP 133, Kénitra, Maroc

Reçu le 8 septembre 2003 ; accepté le 15 septembre 2003

Présenté par Michel Talagrand

Résumé

Nous caractérisons les treillis vectoriels localement convexes solides séparés et complets (E,τ) vérifiant la condition suivante : si $S,T:E\to E$ sont des opérateurs tels que $0\leqslant S\leqslant T$ et T précompact, alors l'opérateur S^2 est précompact. ***Pour citer cet article : B. Aqzzouz, R. Nouira, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

On positive precompact operators. We characterize complete Hausdorff locally convex solid lattices (E,τ) satisfying the following property: for all operators $S,T:E\to E$ such that $0\leqslant S\leqslant T$ and T precompact, the operator S^2 is precompact. ***To cite this article: B. Aqzzouz, R. Nouira, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction et résultat principal

Soient E, F des treillis de Banach et S, T des opérateurs définis de E dans F satisfaisant $0\leqslant S\leqslant T$, l'opérateur T étant compact. Dans [5], Dodds et Fremlin ont établi que si les normes de E' et F sont continues pour l'ordre, alors l'opérateur S est compact, où E' est le dual topologique de E. Aussi, Aliprantis et Burkinshaw [2] ont montré que si $E=F$ et si la norme de E' ou celle de E est continue pour l'ordre, l'opérateur S n'est pas compact en général alors que S^2 l'est toujours. La réciproque de ce résultat a été étudié par Wickstead dans [7]. Plus précisément, il montre que si E est un treillis de Banach σ-complet pour l'ordre, S et T deux opérateurs définis de E dans lui même satisfaisant la condition suivante :

$$0\leqslant S\leqslant T \text{ et } T \text{ compact} \quad\Rightarrow\quad S^2 \text{ est compact,}$$

alors la norme de E ou celle de E' est continue pour l'ordre.

Aussi, Wickstead a établi que le résultat ci-dessus n'est plus valable si le treillis de Banach E n'est pas σ-complet pour l'ordre (cf. Exemple 2.3 de [7]).

Adresse e-mail : baqzzouz@hotmail.com (B. Aqzzouz).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.09.011

Dans cette Note, nous étendons le résultat de Wickstead aux treillis vectoriels localement convexes solides séparés et complets (E, τ) et ce sans supposer que l'espace E soit σ-complet pour l'ordre.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette Note, nous rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite.

Un élément non nul d'un treillis vectoriel E est dit discret si l'idéal d'ordre engendré par u coïncide avec le sous-treillis vectoriel engendré par u. Le treillis vectoriel E est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets $(e_i)_{i\in I}$.

Un treillis vectoriel E muni d'une topologie vectorielle τ est dit localement convexe et solide si 0 admet un système fondamental de voisinages convexes et solides.

Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide. La topologie τ est dite de Lebesgue (resp. pré-Lebesgue) si pour toute suite généralisée (x_α) telle que $x_\alpha \downarrow 0$ (resp. pour toute suite (x_n) telle que $0 \leqslant x_n \uparrow \leqslant x$) dans E, la suite (x_α) converge vers 0 (resp. la suite (x_n) est de Cauchy) pour la topologie τ.

Si E' est le dual topologique de E, on note par $|\sigma|(E, E')$ (resp. $\beta(E, E')$) la topologie faible absolue (resp. la topologie forte) définie sur E par la famille des semi-normes de treillis $\{P_f\colon\ f \in E'\}$ (resp. $\{P_A\colon\ A$ borné dans $(E', |\sigma|(E', E))\}$), où $P_f(x) = |f|(|x|)$ (resp. $P_A(x) = \sup\{|f|(|x|)\colon\ f \in A\}$). De la même manière, on définit les topologies $|\sigma|(E', E)$ et $\beta(E', E)$ sur E'. Pour plus de détails sur les treillis vectoriels localement convexes solides, nous renvoyons le lecteur au livre d'Aliprantis et Burkinshaw [1].

Rappelons aussi qu'un opérateur linéaire $T: E \to F$ entre des espaces vectoriels localement convexes est dit précompact si l'image de tout borné de E est précompacte dans F.

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette Note :

Théorème 1.1. *Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide et complet. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Pour tous opérateurs S et T de E dans E tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T précompact, l'opérateur S^2 est précompact.*
(2) *L'une des conditions suivantes est vérifiée* :
   (a) *La topologie τ est de Lebesgue.*
   (b) *La topologie $\beta(E', E)$ est pré-Lebesgue.*
   (c) *L'espace E' est discret.*

2. Méthodes de la démonstration du résultat principal

Les implications (a) ⇒ (1) et (b) ⇒ (1) du Théorème 1.1 ont été établies dans [4] (Corollaires 2.15 et 2.16).

La preuve de (1) ⇒ (2) du Théorème 1.1 est basée essentiellement sur le Théorème 10.1 de [1], Théorème 23 de [3], ainsi que le Corollaire 21.13 de [1].

La preuve de l'implication (c) ⇒ (1) du Théorème 1.1 est une conséquence du résultat plus général suivant :

Théorème 2.1. *Soient (E, τ), $(F, \Im)$ et (G, υ) des treillis vectoriels localement convexes et solides. Si le dual topologique F' est discret, alors quelque soient les opérateurs $S_1, T_1 : E \to F$ et $S_2, T_2 : F \to G$ tels que $0 \leqslant S_i \leqslant T_i$ et T_i précompact, $i = 1, 2$ l'opérateur $S_2 \circ S_1$ est précompact.*

La preuve de ce théorème est basée sur le Corollaire 21.13 de [1] et le lemme ci-dessous qui est une conséquence d'un théorème de Grothendieck ([6], Théorème 3).

Lemme 2.2. *Soient (E, τ), $(F, \Im)$ deux espaces vectoriels localement convexes et $T: E \to F$ un opérateur linéaire.*

(1) *L'opérateur T est précompact si, et seulement si, T est continu et pour toute partie équicontinue H de F', $T'(H)$ est précompacte pour la topologie $\beta(E', E)$ de E'.*
(2) *Pour tout $x \in E^+$, $T\,([-x, x])$ est précompacte pour la topologie τ de F si, et seulement si, pour toute partie équicontinue H de F', $T'(H)$ est précompacte pour la topologie $|\sigma|(E', E)$ de E', où $E^+ = \{x \in E\colon\ 0 \leqslant x\}$.*

Comme conséquence du Théorème 2.1, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.3. *Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe solide. Si le dual topologique E' est discret, alors quelque soient les opérateurs $S, T : E \to E$ tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T précompact, l'opérateur S^2 est précompact.*

3. Exemples et conséquences

Nous commençons par établir un autre résultat donnant la précompacité de l'opérateur S^2, résultat que nous utiliserons aussi pour montrer que la condition de complétion topologique du treillis vectoriel localement convexe et solide (E, τ) dans le Théorème 1.1 est nécessaire.

Théorème 3.1. *Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe et solide dont le complété $\widehat{E}$ pour la topologie faible absolue $|\sigma|(E, E')$ est discret, alors, quelque soient les opérateurs $S, T : E \to E$ tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et T précompact, l'opérateur S^2 est précompact.*

La preuve de ce théorème est basée sur le Théorème 3.1 de [4].

Exemple 3.2 (*Sur la nécessité de la complétion topologique dans le Théorème 1.1*). Soit E_1 (resp. E_2) le treillis vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la topologie engendrée par la famille des semi-normes (P_x) (resp. (J_x)), $x \in [0, 1]$, définies par $P_x(f) = |f(x)| + \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, pour tout $f \in E_1$ (resp. $J_x(f) = |f(x)| + \sup\{|f(a_n)|\colon\ n \geqslant 2\}$ pour tout $f \in E_2$, où $a_n = \frac{n-1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$). Notons par $\widehat{E_1}$ (resp. $\widehat{E_2}$) le complété de E_1 (resp. E_2) pour la topologie $|\sigma|(E_1, E_1')$ (resp. $|\sigma|(E_2, E_2')$). Il est clair que les treillis vectoriels E_1, E_2 et E_1' ne sont pas discrets, alors que les treillis vectoriels $\widehat{E_1}$ et $\widehat{E_2}$ le sont et la topologie de $\widehat{E_2}$ n'est pas pré-Lebesgue.

Le treillis vectoriel $E_1 \oplus E_2 \oplus l^1$ ne vérifie pas la propriété (2) du Théorème 1.1, mais son complété pour la topologie faible absolue est discret. Il résulte du Théorème 3.1 que l'espace $E_1 \oplus E_2 \oplus l^1$ vérifie la propriété (1) du Théorème 1.1.

Remarque 1. L'hypothèse du Théorème 3.1 et la propriété (2) du Théorème 1.1 sont indépendantes comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 3.3.

(1) Considérons le treillis vectoriel $c \oplus l^1$ utilisé par Wickstead dans l'Exemple 2.3 de [7], où c est le treillis de Banach des suites réelles convergentes. Notons que le dual topologique de cet espace est discret, et que son complété pour la topologie faible absolue ne l'est pas, sinon l'espace $\widehat{E_1} \oplus c \oplus l^1$ vérifierait la propriété (2) du Théorème 1.1, où E_1 est le treillis vectoriel de l'Exemple 3.2.
(2) Le complété de l'espace $E_1 \oplus E_2$ pour la topologie faible absolue est discret, alors que le dual topologique de $E_1 \oplus E_2$ ne l'est pas. De même la topologie de $E_1 \oplus E_2$ et la topologie forte de son dual topologique ne sont pas pré-Lebesgue.

Comme conséquences des théorèmes précédents, nous obtenons les résultats suivants :

Corollaire 3.4. *Soit (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe solide et complet. Si le complété de E pour la topologie faible absolue $|\sigma|(E,E')$ est discret, alors la topologie τ est de Lebesgue.*

Corollaire 3.5. *Le dual topologique du treillis de Banach l^∞ n'est pas discret.*

Si le treillis vectoriel localement convexe solide complet (E,τ) est σ-complet pour l'ordre, i.e. toute partie dénombrable non vide majorée de E admet une borne supérieure, on a

Corollaire 3.6. *Soit (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe solide complet et σ-complet pour l'ordre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Quelque soit le treillis vectoriel localement convexe solide complet $(F,\Im)$, et quelque soient les opérateurs $S_1,T_1:E\to F$ et $S_2,T_2:F\to E$ tels que $0\leqslant S_i\leqslant T_i$ et T_i, $i=1,2$, précompact, l'opérateur $S_2\circ S_1$ est précompact.*
(2) *L'une des conditions suivantes est vérifiée* :
  (a) *La topologie τ est de Lebesgue.*
  (a) *La topologie $\beta(E',E)$ est pré-Lebesgue.*

La preuve du corollaire ci-dessus découle du Théorème 1.1 et de la proposition suivante :

Proposition 3.7. *Soit (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe solide complet et σ-complet pour l'ordre. Si le dual topologique E' est discret, alors la topologie τ est de Lebesgue.*

Enfin, nous retrouvons le résultat de Wickstead [7] dans le cadre des treillis vectoriels localement convexes solides complets et σ-complets pour l'ordre.

Corollaire 3.8. *Soit (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe solide complet et σ-complet pour l'ordre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Quelque soient les opérateurs $S,T:E\to E$ tels que $0\leqslant S\leqslant T$ et T précompact, l'opérateur S^2 est précompact.*
(2) *L'une des conditions suivantes est vérifiée* :
  (a) *La topologie τ est de Lebesgue.*
  (b) *La topologie $\beta(E',E)$ est pré-Lebesgue.*

Références

[1] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Locally Solid Riesz Spaces, Academic Press, 1978.
[2] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Positive compact operators on Banach lattices, Math. Z. 174 (1980) 289–298.
[3] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, M. Duhoux, Compactness properties of abstract kernel operators, Pacific J. Math. 100 (1) (1982) 1–22.
[4] B. Aqzzouz, R. Nouira, Les opérateurs précompacts sur les treillis vectoriels localement convexe-solides, Sci. Math. Jpn. 57 (2) (2003) 279–286.
[5] P.G. Dodds, D.H. Fremlin, Compact operators on Banach lattices, Israel J. Math. 34 (1979) 287–320.
[6] A.P. Robertson, W. Robertson, Topological Vector Spaces, 2nd edn., Cambridge University Press, London, 1973.
[7] A.W. Wickstead, Positive compact operators on Banach lattices: some loose ends, Positivity 4 (2000) 313–325.