Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 537–541
Comptes Rendus Mathematique

Géométrie analytique

# Problèmes de stabilité et surfaces non kähleriennes

Laurent Bruasse

*Institut de mathématiques de Luminy, CNRS UPR 9016, 163, av. de Luminy, Case 907, 13288 Marseille cedex 09, France*

Reçu le 11 mars 2003 ; accepté après révision le 15 septembre 2003
Présenté par Jean-Pierre Demailly

**Résumé**

On donne ici des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité pour les surfaces à CSG. Ces résultats illustrent le comportement atypique de la stabilité dans le cadre non kählerien. On obtient des exemples non triviaux de stabilité/instabilité pour toute métrique de Gauduchon. ***Pour citer cet article : L. Bruasse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***


**Abstract**

**Stability problems and non-Kähler surfaces.** The present Note produces a necessary and sufficient stability condition for GSS surfaces. These results also illustrate the uncommon behaviour of stability in the non-Kähler case. We give examples of stability/instability for all Gauduchon's metrics. ***To cite this article: L. Bruasse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***


## Abridged English version

In this article, we are concerned with the stability of the tangent bundle of non-Kähler compact complex surfaces and with the behaviour in deformation of this property. We focus on the compact complex surfaces of class VII. They are defined by the topological property that their first Betti number $b_1$ is equal to 1. When $b_2 > 0$, the only known examples of such surfaces contain a global spherical shell (GSS). They have been studied by Dloussky, Kohler and Oeljeklaus [5–8]: their maximal divisor and their foliations have been studied in details, but their behaviour in deformation is not yet well understood.

We first give an equivalent condition for the simplicity of the tangent bundle of a class VII surface. In the GSS case, a simple computation gives a complete list of surfaces fulfilling this property.

In Theorem 2.4, we give numerical criteria for the stability of the tangent bundle of all surfaces with a GSS.

Then, we study some particular Inoue–Hirzebruch surfaces deformations:

**Proposition.** *Let $S$ be a Inoue–Hirzebruch surface with $b_2(S) \geqslant 3$. There exists a deformation $(\mathcal{S}, \Pi, \mathbb{P}^1)$ of $S$ by surfaces with a GSS such that*:

*Adresse e-mail :* bruasse@iml.univ-mrs.fr (L. Bruasse).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2003.09.010

(1) $S \simeq S_0$;
(2) *$S_\infty$ is a Inoue–Hirzebruch surface and for all $u \neq 0, \infty$, $S_u$ satisfies* $a(S_u) = (\overline{3, 2, \ldots, 2})$;
(3) *There exists a non constant holomorphic function $\lambda : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ which is a ramified covering and such that for all $u \neq 0, \infty$,* $h^0(S_u, \Theta_u(-D_\theta) \otimes L^{\lambda(u)}) = 1$.

*Then, ever $S$ or $S_\infty$ has its tangent bundle instable for any Gauduchon metric.*

This gives a partial answer to the question of stability of the tangent bundle of Inoue–Hirzebruch surfaces:

**Corollary.** *For every $n \in \mathbb{N}^\star$, there exist some Inoue–Hirzebruch surfaces with $b_2(S) = n$ whose tangent bundle is instable for any Gauduchon metric.*

Depuis les travaux de Gauduchon [9,10], on sait généraliser la notion de stabilité d'un fibré holomorphe au cas des variétés non kähleriennes. On peut également définir en toute généralité la filtration de Harder–Narasimhan d'un tel fibré ([1,3] et [2]). Mais dans le cas non kählerien, le comportement en famille de ces deux notions est très complexe et encore mal connu.

Nous nous intéressons ici aux surfaces complexes compactes non kähleriennes de la classe VII (caractérisées par la propriété topologique que leur premier nombre de Betti $b_1 = 1$) et plus précisément à leur représentant minimal (classe $\mathrm{VII}_0$). Dans le cas où $b_2 > 0$, les seuls exemples connus de telles surfaces sont construits à partir d'une suite d'éclatements de la boule unité et contiennent une coquille sphérique globale (CSG). Leur étude a été menée radicalement par Dloussky, Kohler, Oeljeklaus [5–8] : on connaît les configurations des courbes et de leurs feuilletages. Par contre, leur comportement en déformation reste encore mal connu. L'étude de la stabilité du fibré tangent (cf. Section 2) est liée à ce comportement en famille des diviseurs.

Les surfaces à CSG sont classées en trois types à l'aide d'un invariant, la trace $t(S)$ (cf. [5]) et de la forme de leur diviseur maximal (réunion de toutes les courbes compactes de la surface) :

- Les surfaces de trace non nulle (qui contiennent un diviseur plat) ;
- Les surfaces de trace nulle qui sont de deux types :
  - « de type intermédiaire » si leur diviseur maximal est un cycle de courbes rationnelles avec des arbres ;
  - « de type Inoue–Hirzebruch » (en abrégé I–H) si leur diviseur maximal est constitué d'un ou de deux cycles de courbes rationnelles.

## 1. Simplicité, surfaces de la classe $\mathrm{VII}_0$ et surfaces à CSG

Soit $S$ une surface complexe compacte de la classe $\mathrm{VII}_0$ avec $b_2 > 0$. On notera $\Theta$ son fibré tangent et $\mathcal{K}$ le fibré canonique. Rappelons qu'un fibré est *simple* si ses seuls endomorphismes sont les homothéties, c'est une condition nécessaire à sa stabilité (cf. [10]).

**Proposition 1.1.** *Le fibré $\Theta$ est simple si et seulement s'il n'existe pas d'extension* :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_\mathcal{Z} \longrightarrow 0$$

*avec $\mathcal{L}$ un fibré en droites et $\mathcal{Z}$ un nombre fini de points telle que* $H^0(S, \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^2) \neq 0$.

**Remarque.** On utilise ici de manière essentielle qu'une telle surface n'admet pas de feuilletage régulier (cf. [4], Proposition 9) pour décrire les extensions possibles.

Si $S$ est à CSG, elle possède un ou deux feuilletages singuliers définis par un champ de vecteurs tordu par un fibré en droite plat ou à l'aide d'une forme logarithmique tordue. Dans le cas intermédiaire, le diviseur d'annulation $D_\theta$

de ce champ et le coefficient de torsion permettent de définir des invariants holomorphes $\lambda$, $k$ et $\kappa$ de la surface (voir [8] ou [1]).

**Théorème 1.2.** *Soit $S$ une surface de la classe $\mathrm{VII}_0$ à CSG et $D$ son diviseur maximal. Alors le fibré tangent de $S$ est simple sauf si $S$ est de trace nulle, de type intermédiaire et possède un diviseur d'annulation tangent $D_\theta$ avec $D_\theta \geqslant D$ et $\lambda k = 1$.*

## 2. Stabilité des surfaces à CSG et déformations

On considère ici une surface à coquille sphérique globale $S$, munie d'une métrique de Gauduchon.

**Définition 2.1.** On dira qu'une surface $S$ est stable (resp. semi-stable ou instable) si son fibré tangent est stable (resp. semi-stable ou instable).

**Lemme 2.2.** *On a un isomorphisme $\gamma : \mathbb{C}^\star \to Pic^{\mathrm{plat}}(S)$. Il existe alors une constante $C \in \mathbb{R}^\star$ telle que pour tout fibré plat $L^\alpha = \gamma(\alpha)$ on ait*

$$\deg\bigl(L^\alpha\bigr) = C \ln|\alpha|.$$

**Démonstration.** L'isomorphisme $Pic^{\mathrm{plat}}(S) \simeq \mathbb{C}^\star$ est bien connu et l'application $\deg : Pic^{\mathrm{plat}}(S) \to \mathbb{R}$ est un morphisme continu de groupes de Lie de $(\mathbb{C}^\star, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ (cf. [10]). Le signe de $C$ dépend donc du choix d'un générateur du groupe fondamental. □

**Lemme 2.3.** *Soit $\mathcal{S} \to B$ une famille de surfaces à coquille sphérique globale au-dessus de la boule unité $B$ de $\mathbb{C}^n$. Alors, il existe un fibré plat tautologique $\Xi \to \mathcal{S} \times \mathbb{C}^\star$ au-dessus de $\mathcal{S} \times \mathbb{C}^\star$ tel que pour tout $u \in B$, $\gamma_u(\alpha) = \Xi|_{S_u \times \{\alpha\}}$.*

**Démonstration.** On déforme localement le recouvrement d'Enoki $\mathcal{U}_0 = \{U_0, \ldots, U_{n-1}\}$ de $S_0$ (voir [7], p. 66). Si $g$ est le recollement de $U_0$ avec $U_{n-1}$ le long de leur partie commune, le fibré en droite trivial sur $\coprod U_i$ définit un fibré en droites sur $\mathcal{S}$ après l'identification.

$$\begin{aligned} &U_0 \times \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C} \to U_{n-1} \times \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}, \\ &\quad (w, \alpha, \lambda) \mapsto \bigl(g(w), \alpha, \alpha\lambda\bigr). \end{aligned}$$

D'autre part on vérifie assez aisément que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^\star) \simeq Pic^{\mathrm{plat}}(S)$. □

En particulier, on peut définir $C$ de manière continue sur toute déformation de surfaces à CSG munie d'une famille de métriques de Gauduchon. Par convention, on choisit $C$ strictement négative sur toute la déformation. On a alors le critère suivant :

**Théorème 2.4** ([2], Proposition 6.16). *Soit $S$ à coquille sphérique globale et $C < 0$ la constante du Lemme 2.2 :*

(1) *Si $S$ est de trace non nulle, et $\Gamma$ est l'unique cycle de courbes rationnelles de $S$, alors $\Theta_S$ est stable (resp. semi-stable) si et seulement si*

$$2\deg\bigl([\Gamma]\bigr) > (\geqslant) \deg(-\mathcal{K}).$$

(2) *Soit $S$ de type intermédiaire et $D$ le diviseur maximal de $S$, $\Theta_S$ est stable* (*resp. semi-stable*) *si et seulement si*

$$2\deg\big([D]\big) + 2C\ln|k| > (\geqslant) \deg(-\mathcal{K}),$$

*où $k = k(S)$.*
*S'il existe, de plus, un diviseur d'annulation $D_\theta$, le fibré tangent est stable* (*resp. semi-stable*) *si et seulement si*

$$\deg[D_\theta] - \deg[D] < (\leqslant) C\ln\big(|\lambda k|\big).$$

*En particulier,*
- *Si $D_\theta \geqslant D$ et $|\lambda| > 1/k$, $\Theta$ est non semi-stable pour* toute *métrique de Gauduchon*;
- *Si $D_\theta \leqslant D$ et $|\lambda| < 1/k$, $\Theta$ est stable pour* toute *métrique de Gauduchon.*

**Démonstration.** On utilise essentiellement la description des feuilletages donnée dans [8] à l'aide de 1-formes logarithmiques tordues ou de champs de vecteurs tordus pour décrire les sous-faisceaux de $\Theta$. □

**Remarque 1.**

– Les conditions sur $\lambda$ sont toujours réalisables dans une déformation logarithmique de la surface puisque d'après [8], $\lambda k$ varie alors dans $\mathbb{C}^\star$. La condition $D - D_\theta$ positif se réalise par exemple pour les surfaces avec $a(S) = (\overline{32})$ ou $a(S) = (\overline{422232})$. D'autre part, une surface de type $a(S) = (\overline{322})$ réalise $D - D_\theta \leqslant 0$.
– On peut donner une condition similaire pour les surfaces de Inoue–Hirzebruch, mais elle se révèle inutilisable dans la pratique en l'absence d'une métrique de Gauduchon explicite.

On obtient grâce à ces critères des contre-exemples à l'ouverture de la non-semistabilité :

**Proposition 2.5.** *Soit $S$ une surface minimale à CSG avec $b_2(S) > 0$. Si $\mathrm{tr}(S) = 0$, alors il existe une déformation $(\mathcal{S}, \Pi, \Delta)$ de $S \simeq S_0$ telle que pour tout $u \neq 0$, le fibré tangent $\Theta_u$ soit stable.*

**Démonstration.** On considère la description de $S$ par tours d'éclatements (voir [5]). En déplaçant à l'aide d'un même paramètre les points éclatés qui sont à l'intersection de deux courbes, on peut obtenir pour $u \neq 0$, une surface minimale $S_u$ de trace non nulle. Il existe alors une fonction holomorphe globale $t : \Delta \to \Delta$ telle que $\mathrm{tr}(S_u) = t(u)$. L'existence d'une famille de métriques de Gauduchon découle de [1]. Le fibré canonique s'organise alors en famille au-dessus de $\Delta$ et $t \to \deg(-\mathcal{K}_t)$ est $C^\infty$ et donc bornée. D'autre part, si $\Gamma_u$ désigne le cycle de courbes rationnelles de $S_u$, $\lim_{u\to 0}\deg([\Gamma_u]) = \lim_{u\to 0} C(u)\ln|t(u)| = +\infty$. On conclut avec le Théorème 2.4. D'après ce même théorème, $S$ peut être choisie non semistable pour toute métrique de Gauduchon. □

Par une technique de déformation, on peut répondre partiellement au problème de la stabilité des surfaces de Inoue–Hirzebruch :

**Proposition 2.6.** *Soit $S$ une surface d'Inoue–Hirzebruch pour laquelle $b_2(S) \geqslant 3$. Il existe alors une déformation $(\mathcal{S}, \Pi, \mathbb{P}^1)$ de $S$ par des surfaces contenant une CSG et vérifiant*

(1) *$S \simeq S_0$ ;*
(2) *$S_\infty$ est une surface d'Inoue–Hirzebruch et pour tout $u \neq 0, \infty$, $S_u$ est de type intermédiaire avec $a(S_u) = (\overline{3, 2, \ldots, 2})$ ;*
(3) *Il existe une fonction holomorphe non constante $\lambda : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est un revêtement ramifié, telle que, pour tout $u \neq 0, \infty$, $h^0(S_u, \Theta_u(-D_\theta) \otimes L^{\lambda(u)}) = 1$.*

*Alors $S$ ou $S_\infty$ est instable pour toute métrique de Gauduchon.*

**Démonstration.** Dans la suite d'éclatements engendrant $S$, tous les points éclatés sont à l'intersection de deux courbes. On paramètre sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le déplacement de $n-1$ de ces points le long de la dernière courbe éclatée. En 0 et $\infty$, la surface correspondante est de type I–H et pour $u \neq 0$ on obtient une surface minimale de trace nulle du cas intermédiaire avec $a(S) = (\overline{3, 2, \ldots, 2})$. $\square$

**Lemme 2.7.** *Soit $S$ à CSG avec $a(S) = (\overline{3, 2, \ldots, 2})$ alors $S$ admet un diviseur numériquement tangent $D_\theta$ qui vérifie $D_\theta \geqslant D$.*

On peut donc définir $\lambda$ en dehors de 0 et $\infty$. Si $\lambda$ admettait une singularité essentielle en 0 ou $\infty$, elle prendrait la valeur 1 dans tout voisinage du point ce qui contredirait la semicontinuité de $u \to h^1(S_u, \Theta_u)$. On obtient donc une fonction holomorphe à valeur dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En 0 et $\infty$, $\lambda$ prend la valeur 0 ou $\infty$, sinon, on peut définir le fibré $\Theta \otimes \mathcal{L}^\lambda$ globalement sur $\mathbb{C}$ (cf. Lemme 2.3) : il vérifie $h^0(S_u, \Theta_u \otimes \mathcal{L}^{\lambda(u)}) = 1$ et on conclut alors avec le theorème de convergence de Bishop en l'existence d'un diviseur (non trivial) d'annulation pour la section $\theta_0$. C'est impossible sur une surface de I–H car les champs tordus ne s'annulent qu'en des points [8]. $\lambda$ réalise donc un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et prend donc la valeur $\infty$ en $p = 0$ ou $\infty$. On utilise alors le critère du Théorème 2.4 et le Lemme 2.7 pour conclure en l'existence d'un voisinage $U$ de $p$ tel que pour $u \in U \setminus \{p\}$, $S_u$ est instable. On conclut par ouverture de la stabilité (cf. [1] ou [10]).

**Remarque 2.** Deux telles surfaces d'Inoue–Hirzebruch $S$ et $S^\infty$ sont dites *conjuguées*. Dans un couple de surfaces conjuguées, l'une des deux est donc instable pour toute métrique de Gauduchon.

**Corollaire 2.8.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe des surfaces de I–H avec $b_2(S) = n$ instables pour toute métrique de Gauduchon.*

**Exemples.** Les surfaces de Inoue–Hirzebruch $a(S) = (\overline{423})$ ou $a(S) = (\overline{4233})$ sont conjuguées à elle même et sont donc instables pour toute métrique de Gauduchon.

L'existence de surfaces de I–H stables reste un problème ouvert.

## Références


[1] L. Bruasse, Harder–Narasimhan filtration on non-Kähler manifolds, Int. J. Math. 12 (5) (2001) 579–594.
[2] L. Bruasse, Stabilité et filtration de Harder–Narasimhan, Ph.D. thesis, LATP–CMI, December 2001.
[3] L. Bruasse, Filtration de Harder–Narasimhan pour des fibrés complexes ou des faisceaux sans torsion, Ann. Inst. Fourier 53 (2) (2003) 539–562.
[4] M. Brunella, Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, Ann. Sci. École Norm. Sup. 30 (1997) 569–594.
[5] G. Dloussky, Structure des surfaces de Kato, in: Mém. Soc. Math. France, Vol. 112, 1984.
[6] G. Dloussky, Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue–Hirzebruch, Math. Ann. 280 (1988) 663–682.
[7] G. Dloussky, F. Kohler, Classification of singular germs of mappings and deformation of compact surfaces of class $VII_0$, Ann. Polinici Math. LXX (1998) 49–83.
[8] G. Dloussky, K. Oeljeklaus, Vector fields and foliations on compact surfaces of class $VII_0$, Ann. Inst. Fourier 43 (5) (1999) 1503–1545.
[9] P. Gauduchon, Sur la 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte, Math. Ann. 267 (1984) 495–518.
[10] M. Lübke, A. Teleman, The Kobayashi–Hitchin Correspondence, World Scientific, 1995.