Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 531–536
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Contrôle optimal

Compensation spectrale et taux de décroissance optimal de l'énergie de systèmes partiellement amortis

Paola Loreti [a], Bopeng Rao [b]

[a] *Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Via A. Scarpa n. 16, 00161 Roma, Italie*

[b] *Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France*

Reçu le 6 août 2003 ; accepté le 26 août 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous étudions la stabilisation d'un système de deux équations linéaires, dont une seule équation est amortie par un contrôle feedback. Nous montrons qu'un contrôle convenablement choisi peut compenser les parties réelles des valeures propres du système, et donc fournir le meilleur taux de décroissance polynomiale de l'énergie du système pour des données initiales régulières. ***Pour citer cet article : P. Loreti, B. Rao, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Spectral compensation and optimal energy decay rate for partially damped systems. We study the stabilization of systems of two equations, for which only one equation is damped by a feedback control. We show that a well chosen control can compensate the real parts of the eigenvalues of the system, therefore, giving the optimal polynomial energy decay rate of the system for smooth initial data. ***To cite this article: P. Loreti, B. Rao, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Let A be a a self-adjoint coercive operator and B a linear bounded operator in a separated Hilbert space H. We consider the following weakly coupled and partially damped system:

$$\begin{cases} y_{tt} + Ay + By_t + au = 0, \\ u_{tt} + Au + ay = 0. \end{cases} \tag{1}$$

First we define the energy space: $\mathcal{H} = D(A^{1/2}) \times H \times D(A^{1/2}) \times H$. We next define the operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ by

Adresse e-mail : rao@math.u-strasbg.fr (B. Rao).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.08.009

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \times D\big(A^{1/2}\big) \times D(A) \times D\big(A^{1/2}\big),$$
$$\mathcal{A}(y,z,u,v) = (z, -Ay - au - A^{\gamma}z, v, -Au - \alpha y).$$

Then setting $w = (y, y_t, u, u_t)$, we convert the system (1) into an evolutionary equation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w = \mathcal{A}w, \qquad w(0) = w_0 \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

Using the spectral decomposition theory [2], we can easily prove that the C_0 semigroup of contractions $S(t) = \mathrm{e}^{\mathcal{A}t}$ is strongly stable on the energy space $\mathcal{H}$. Moreover, constucting a sequency of real numbers $\mu_n \to +\infty$ and sequency of vectors $w_n \in D(\mathcal{A})$ such that

$$\|w_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \qquad \big\|(\mathrm{i}\mu_n I - \mathcal{A})w_n\big\|_{\mathcal{H}}^2 \to 0$$

we prove that the resolvent of $\mathcal{A}$ is not uniformly bounded on the imaginary axis. Following Huang [3], $S(t)$ is not uniformly stable on the energy space $\mathcal{H}$. Therefore, we look for a polynomial energy decay rate for smooth initial data of the system (2).

Theorem 0.1. *Let $\gamma \leqslant 0$ and $a \in \mathbb{R}$ be small enough. Then for any $w_0 \in D(\mathcal{A})$, there exists a positive constant $C > 0$ independent of w_0 such that the following estimate of energy decay rate holds*:

$$\mathcal{E}(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \frac{1}{t^{\delta(\gamma)}}, \quad \forall t > 0,$$

where we have put:

$$\delta(\gamma) = \begin{cases} -1/\gamma, & \gamma \leqslant -1/2, \\ 2, & \gamma = -1/2, \\ 1/(\gamma+1), & \gamma \geqslant -1/2. \end{cases} \tag{3}$$

Now let us define:

$$\mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2}\big(\big\|A^{1/2}y(t)\big\|_H^2 + \big\|y_t(t)\big\|_H^2\big), \qquad \mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2}\big(\big\|A^{1/2}u(t)\big\|_H^2 + \big\|u_t(t)\big\|_H^2\big)$$

the energies of the first equation and the second equation, respectively. The following result gives the distribution of the total energy $\mathcal{E}(t)$ in the two equations.

Theorem 0.2. *Let $\gamma \leqslant 0$ and $a \in \mathbb{R}$ be small enough. Then for all initial data $w_0 \in D(\mathcal{A})$, there exists a positive constant $C > 0$ independent of w_0 such that the following estimates of energy decay rate hold*: *we have the following estimations*

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \dfrac{1}{t^2}, \quad \mathcal{E}_2(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \dfrac{1}{t^{1/(\gamma+1)}}, \quad \gamma \geqslant -\dfrac{1}{2}; \\ \mathcal{E}_1(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \dfrac{1}{t^{-1/\gamma}}, \quad \mathcal{E}_2(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \dfrac{1}{t^{-1/\gamma}}, \quad \gamma \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

The proofs of Theorems 0.1 and 0.2 are based on the asymptotical expansion of the spectre of $\mathcal{A}$.

From Theorem 0.1, we see that the decay rate $\delta(\gamma)$ is an increasing function for $-\infty < \gamma \leqslant -1/2$, decreasing for $-1/2 \leqslant \gamma \leqslant 0$. The best decay rate $\delta = 2$ occurs for $\gamma = -1/2$. More precisely, from Theorem 0.2, the system (1) is *overdamped* for $\gamma > -1/2$. In that case, the eigenvectors of the two equations are coupled by means of a term of order $1/\mu_n^{2\gamma+1}$. Although the feedback control can bring quickly the energy $\mathcal{E}_1(t)$ of first equation back to rest at the rate $1/t^2$, its influence on the second equation is very weak, in which the energy $\mathcal{E}_2(t)$ decays only at the rate $1/t^{1/(\gamma+1)}$. Therefore, the total energy $\mathcal{E}(t)$ of the system decays slowly. In the case $\gamma \leqslant -1/2$, the eigenvectors of the two equations are coupled by means of a term of order $\mathrm{O}(1)$. The dissipation of the first equation is well transmitted into the second equation. The energies of the two equations as well as the total energy decay at the same order $t^{1/\gamma}$. This balanced distribution of energy within the two equations is due to the compensation of real parts of the two branches of eigenvalues.

We conclude that a stronger damping $A^\gamma y_t$ could not always give a better total decay rate of energy. A good damping should provide a compensation of real parts of the two branches of eigenvalues.

1. Introduction

Soit H un espace de Hilbert séparable et soient A un opérateur auto-adjoint coercif dans H, et $\gamma \leqslant 0$ un paramètre négatif. Nous considérons le système des équations faiblement couplées et partiellement amorties :

$$\begin{cases} y_{tt} + Ay + A^\gamma y_t + au = 0, \\ u_{tt} + Au + ay = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Remarquons que le contrôle feedback $A^\gamma y_t$ est appliqué directement à la première équation, et la deuxième équation est amortie par l'intermédiare du couplage et donc par un contrôle indirect selon une certaine terminologie [11]. D'autre part, le contrôle A^γ est compact dans H pour tout $\gamma < 0$. Il devient plus fort quand la valeur de γ est plus gande.

Définissons d'abord l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$ par :

$$\mathcal{H} = D\big(A^{1/2}\big) \times H \times D\big(A^{1/2}\big) \times H.$$

Puis nous introduisons un opérateur non-borné $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ comme

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \times D\big(A^{1/2}\big) \times D(A) \times D\big(A^{1/2}\big),$$
$$\mathcal{A}(y, z, u, v) = (z, -Ay - au - A^\gamma z, v, -Au - \alpha y).$$

Ensuite, posant $w = (y, y_t, u, u_t)$, nous écrivons le système (1) sous la forme d'une équation d'évolution :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w = \mathcal{A} w, \qquad w(0) = w_0 \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

Il est clair que l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un C_0 semi-groupe de contractions $S(t)$ sur l'espace d'énergie $\mathcal{H}$. En appliquant la théorie de décomposition spectrale [2], on montre facilement que $\|S(t)w_0\| \to 0$ pour toute donnée initiale $w_0 \in \mathcal{H}$. Supposons de plus que A admet une suite de valeurs propres $\mu_n^2 \to +\infty$ et les vecteurs propres associés e_n forment une base hilbertienne dans H. Alors en définissant une suite : $w_n = \frac{1}{\sqrt{2}\mu_n}(0, 0, e_n, \mathrm{i}\mu_n e_n)$, un calcul direct montre

$$\|w_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \qquad \big\|(\mathrm{i}\mu_n I - \mathcal{A}) w_n\big\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{a^2}{2\mu_n^2} \to 0.$$

Ainsi la résolvente de $\mathcal{A}$ n'est pas uniformément bornée sur l'axe imaginaire. D'après un résultat de Huang [3], nous concluons que le semi-groupe $S(t)$ n'est pas uniformément stable sur $\mathcal{H}$. Nous nous intérêssons donc à la décroissance polynomilale de l'énergie du système (2) pour des données initiales régulières : $w_0 \in D(\mathcal{A})$.

Dans cette Note, nous établissons le taux de décroissance de l'énergie. Nous montrons qu'un contrôle plus fort n'entraîne pas forcément une décroissance plus rapide de l'énergie totale du systeme (2). Ceci paraît tout à fait naturel, puisqu'un contrôle fort ramène rapidement la première équation au repos, mais son influence sur la deuxième équation, via le couplage, dépend du paramètre γ et pourrait être très faible pour certaines valeurs de γ, par exemple $\gamma = 0$ comme dans [1]. Dans ce cas, le système est « essentiellement découplé » et l'énergie subsiste longtemps dans la deuxième équation. Cette répartition déséquilibrée de l'énergie dans les deux équations est dûe au fait qu'une branche de valeurs propres s'approche de l'axe imaginaire beaucoup plus rapidement que l'autre branche. Ainsi nous cherchons des contrôles qui récompensent les parties réelles des valeurs propres et assurent un meilleur taux de décroissance de l'énergie totale du système considéré.

Nous mentionnons Russell [11] pour une formulation générale des systèmes partiellement amortis et J.-L. Lions [7] pour la controlabilité exacte et l'observabilité de systèmes couplés. Par ailleurs, il y a un grand nombre de publications récentes concernant la décroissance polynomilale de l'énergie de systèmes distribués. Citons par exemple les approches spectrales dans [4,5] et [9], les approches par domaine frequence dans [8] et les méthodes de mutiplicateurs dans [1] et [10].

2. Résultats principaux

Nous donnons d'abord un résultat général sur la décroissance polynomiale de l'énergie d'un C_0 semi-groupe.

Théorème 2.1. *Soit $S(t)$ un C_0 semi-groupe de contractions engendré par un opérateur $\mathcal{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. Supposons qu'il existe des suites $\mu_{k,n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et des constantes positives $\alpha_k > 0$, $\gamma_k > 0$ telles que la k-ème branche des valeurs propres $\lambda_{k,n}$ de $\mathcal{A}$ satisfait*

$$\operatorname{Im}\lambda_{k,n} \sim \mu_{k,n}\,; \quad \operatorname{Re}\lambda_{k,n} \sim -\frac{\gamma_k}{\mu_{k,n}^{\alpha_k}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant K.$$

Supposons de plus que les vecteurs propres de $\mathcal{A}$ forment une base de Riesz dans $\mathcal{H}$. Alors pour toute donnée initiale $w_0 \in D(\mathcal{A}^\theta)$ avec $\theta > 0$, il existe une constante positive $C > 0$ indépendant de w_0 telle que

$$\left\| S(t)w_0 \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|w_0\|_{D(\mathcal{A}^\theta)}^2 \frac{C}{t^{\theta\delta}}, \quad \delta = \min_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{2}{\alpha_k}. \tag{3}$$

Remarque 1. Le Théorème 2.1 s'applique à toute donnée initiale $w_0 \in D(\mathcal{A}^\theta)$. Ceci améliore un résultat antérieur de Littman–Markus [6] dans lequel w_0 doit satisfaire des conditions supplémentaires. De plus le taux de décroissance δ dans (3) est optimal.

Soit A un opérateur auto-adjoint et coercif dans un espace de Hilbert séparable H. Supposons que sa résolvante est compacte. Alors A admet une suite de valeurs propres $\mu_n^2 \to +\infty$ et les vecteurs propres associés e_n forment une base hilbertienne dans H. Soient maintenant $(y_n, u_n) = (Ce_n, De_n)$ un vecteur propre du système (1). Alors on aura :

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \lambda\mu_n^{2\gamma} + \mu_n^2)C + aD = 0, \\ aC + (\lambda^2 + \mu_n^2)D = 0. \end{cases}$$

Le système admet des solutions non triviales si et seulement si

$$\left(\lambda^2 + \lambda\mu_n^{2\gamma} + \mu_n^2\right)\left(\lambda^2 + \mu_n^2\right) = a^2. \tag{4}$$

Une étude soigneuse sur les racines de l'Éq. (4) conduit aux résultats suivants.

Proposition 2.2. *Soient $\lambda_{1,n}^\pm$, $\lambda_{2,n}^\pm$ les solutions de l'Éq.* (4). *Alors on a les développements asymptotiques suivants* :

(a) $-\frac{1}{2} \leqslant \gamma$: $$\begin{cases} \lambda_{1,n}^\pm = \pm \mathrm{i}\mu_n - \mu_n^{2\gamma}/2 + \mathrm{O}(1/\mu_n), \\ \lambda_{2,n}^\pm = \pm \mathrm{i}\mu_n - a^2/(2\mu_n^{2\gamma+2}) + \mathrm{O}(1/\mu_n^{6\gamma+3}). \end{cases}$$

(b) $\gamma = -\frac{1}{2}$: $$\begin{cases} \lambda_{1,n}^\pm = \pm \mathrm{i}\mu_n - (1 \pm \sqrt{1-4a^2})/(4\mu_n) + \mathrm{O}(1/\mu_n^2), \\ \lambda_{2,n}^\pm = \pm \mathrm{i}\mu_n - (1 \mp \sqrt{1-4a^2})/(4\mu_n) + \mathrm{O}(1/\mu_n^2). \end{cases}$$

(c) $\gamma \leqslant -\frac{1}{2}$: $$\begin{cases} \lambda_{1,n}^\pm = \pm \mathrm{i}\sqrt{\mu_n^2 + a} - \mu_n^{2\gamma}/2 + \mathrm{O}(\mu_n^{4\gamma+1}), \\ \lambda_{2,n}^\pm = \pm \mathrm{i}\sqrt{\mu_n^2 - a} - \mu_n^{2\gamma}/2 + \mathrm{O}(\mu_n^{4\gamma+1}). \end{cases}$$

Ces développements asymptotiques ont permis d'établir le taux de décroissance polynomiale de l'énergie totale du système (2).

Théorème 2.3. *Soiet $\gamma \leqslant 0$ et a un réel suffisamment petit. Alors pour toute donnée initiale $w_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe une constante $C > 0$ indépendant de w_0 telle que l'énergie du système* (2) *satisfait l'estimation suivante* :

$$\mathcal{E}(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \frac{1}{t^{\delta(\gamma)}}, \quad \forall t > 0,$$

où

$$\delta(\gamma) = \begin{cases} -1/\gamma, & \gamma \leqslant -1/2, \\ 2, & \gamma = -1/2, \\ 1/(\gamma+1), & \gamma \geqslant -1/2. \end{cases} \tag{5}$$

Démonstration. La Proposition 2.2 implique que les vecteurs propres du système (2) forment une base de Riesz dans $\mathcal{H}$. En appliquant Théorème 2.1 avec $\alpha_1 = -2\gamma,\ \alpha_2 = 2(\gamma+1)$ dans le cas $\gamma > -1/2$, et $\alpha_1 = \alpha_2 = -2\gamma$ dans le cas $\gamma \leqslant -1/2$, on obtient la décroissance polynomiale de l'énergie avce le taux $\delta > 0$ donné par (5). □

Proposition 2.4. *Soient $e^{\pm}_{1,n}$ et $e^{\pm}_{2,n}$ les vecteurs propres associés aux valeurs $\lambda^{\pm}_{1,n}$ et $\lambda^{\pm}_{2,n}$ respectivement. Alors selon les cas différents* : (a) $\gamma > 1/2$, (b) $\gamma = -1/2$ *et* (c) $\gamma < -1/2$, *on a les développements asymptotiques suivants* :

$$\text{(a)}\quad e^{\pm}_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mu_n^{2\gamma+1}}\Big), \quad e^{\pm}_{2,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \end{pmatrix} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mu_n^{2\gamma+1}}\Big),$$

$$\text{(b)}\quad e^{\pm}_{1,n} = \frac{\sqrt{a}_{\pm}}{2}\begin{pmatrix} \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \\ -\frac{2ae_n}{a_{\pm}\mu_n} \\ \frac{2ae_n}{\pm \mathrm{i}a_{\pm}} \end{pmatrix} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mu_n^2}\Big), \quad e^{\pm}_{2,n} = \sqrt{\frac{a}{a_{\mp}}}\begin{pmatrix} \frac{a_{\mp}e_n}{2a\mu_n} \\ \frac{\pm \mathrm{i}a_{\mp}e_n}{2a} \\ \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \end{pmatrix} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mu_n^2}\Big),$$

$$\text{(c)}\quad e^{\pm}_{1,n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \\ \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \end{pmatrix} + \mathrm{O}\big(\mu_n^{2\gamma+1}\big), \quad e^{\pm}_{2,n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{e_n}{\mp \mathrm{i}\mu_n} \\ -e_n \\ \frac{e_n}{\pm \mathrm{i}\mu_n} \\ e_n \end{pmatrix} + \mathrm{O}\big(\mu_n^{2\gamma+1}\big),$$

où on a posé $a_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-4a^2}$.

Maintenant définissons par

$$\mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2}\big(\big\|A^{1/2}y(t)\big\|_H^2 + \big\|y_t(t)\big\|_H^2\big), \qquad \mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2}\big(\big\|A^{1/2}u(t)\big\|_H^2 + \big\|u_t(t)\big\|_H^2\big)$$

les énergies dans la première équation et la deuxième équation respectivement. La répartition de l'énergie dans les deux équations du système (2) dépend du paramètre γ. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.5. *Pour toute donnée initiale $w_0 \in D(\mathcal{A})$, on a les estimations suivantes* :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \frac{1}{t^2}, \quad \mathcal{E}_2(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \frac{1}{t^{1/(\gamma+1)}}, \quad \gamma \geqslant -1/2, \\ \mathcal{E}_1(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \frac{1}{t^{-1/\gamma}}, \quad \mathcal{E}_2(t) \leqslant C\|\mathcal{A}w_0\|^2 \frac{1}{t^{-1/\gamma}}, \quad \gamma \leqslant -1/2. \end{cases}$$

Démonstration. Grâce aux développements asymptotiques des vecteurs propres dans la Proposition 2.4, nous pouvons exprimer la solution $w(t)$ du système (2) sur les vecteurs propres du système découplé. Ainsi nous pouvons séparer les variables (y, y_t) et (u, u_t) dans le quadruplet $w = (y, y_t, u, u_t)$. Puis, en utilisant le Théorème 2.1, nous obtenons le résultat désiré. □

Pour tout $\gamma \in]-\infty, 0[$ le contrôle feedback $A^\gamma y_t$ est compact dans H. Plus γ est grand, plus le contrôle $A^\gamma y_t$ est « fort ». En particulier, lorsque $\gamma = 0$ le contrôle devient y_t qui est seulement continu dans H. En revanche, le taux de décroissance $\delta(\gamma)$ n'est pas une fonction monotone. Elle est croissante pour $-\infty < \gamma \leqslant -1/2$, et décroissante pour $-1/2 \leqslant \gamma \leqslant 0$. La plus gande vitesse de décroissance de l'énergie $1/t^2$ est atteinte en $\gamma = -1/2$. Plus précisément, dans cas $\gamma > -1/2$ le système (2) est *sur-amorti*. D'après la Proposition 2.2, les parties réelles des valeurs propres $\lambda^{\pm}_{1,n}$ et $\lambda^{\pm}_{2,n}$ sont de l'ordre de $1/\mu_n^{-2\gamma}$ et de $1/\mu_n^{2(\gamma+1)}$. L'energie correspondant à la première branche de vecteurs propres décroît à la vitesse $t^{1/\gamma}$, et celle correspondant à la deuxième branche de vecteurs propres décroît à la vitesse $t^{-1/(\gamma+1)}$. Comme $\frac{1}{\gamma} < -\frac{1}{\gamma+1}$, l'énergie de la premième branche décroît beaucoup plus rapidement que celle de la deuxième branche. Mais l'énergie totale décroît seulement à la vitesse lente $t^{-1/(\gamma+1)}$. En revanche, lorsque γ varie entre $]-\infty, -1/2[$, les parties réelles des valeurs propres $\lambda^{\pm}_{1,n}$ et $\lambda^{\pm}_{2,n}$ sont du même ordre $1/\mu_n^{-2\gamma}$. Les énergies des deux branches ainsi que l'énergie totale décroissent à la même vitesse $t^{1/\gamma}$. D'autre part, d'après la Proposition 2.4, lorsque $\gamma > -\frac{1}{2}$, les termes principaux des vecteurs propres $e^{\pm}_{1,n}$ et $e^{\pm}_{2,n}$ sont précisément les vecteurs propres du système découplé (correspondant au cas $a = 0$). Les deux équations sont « essentiellement découplées ». Ceci explique bien pourquoi la dissipation appliquée à la première équation est difficilement transmise à la deuxième équation dont l'énergie décroît lentement. En revanche, lorsque γ varie entre $]-\infty, -1/2[$, les termes principaux des vecteurs propres $e^{\pm}_{1,n}$ et $e^{\pm}_{2,n}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs propres du système découplé. Les modes des deux équations sont mêlés ensemble et la dissipation est bien transmise à la deuxième équation. Les énergies dans les équations décroissent à la même vitesse. Tout cela est grâce à la compensation des parties réelles de deux branches de valeurs propres de $\mathcal{A}$.

Nous considérons un exemple de deux équations des ondes faiblement couplées et partiellemernt amorties :

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + (-\Delta)^{-1/2} y_t + au = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_{tt} - \Delta u + ay = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ y = u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{6}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné de frontière Γ régulière. C'est le cas du Théorème 3.2 avec $\gamma = -1/2$. Ainsi l'énergie du système (6) décroît à la vitesse $1/t^2$. Si on choississait le contrôle plus fort y_t comme dans [1], alors l'énergie du système (6) décroîtrait seulement à la vitesse $1/t$. Nous voyons qu'un contrôle plus faible donne une vitesse de la décroissance de l'énergie deux fois mieux qu'un contrôle fort.

Références

[1] F. Alabau, P. Cannarsa, V. Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations, J. Evolution Equations 2 (2002) 127–150.
[2] C.D. Benchimol, A note on weak stabilizability of contraction semigroups, SIAM J. Control Optim. 16 (1987) 373–379.
[3] F. Huang, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Chinese Ann. Differential Equations 1 (1985) 43–56.
[4] S. Jaffard, M. Tucsnak, E. Zuazua, Singular inter stabilization of the wave equation, J. Differential Equations 45 (1998) 184–215.
[5] W. Littman, B. Liu, On the spectral properties and stabilization of acoustic flow, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999) 17–34.
[6] W. Littman, L. Markus, Some recent results on control and stabilization of flexible structures, in: Proc. COMCON Workshop, Montpellier, 1987.
[7] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués, Masson, Paris, 1988.
[8] K. Liu, Z. Liu, B. Rao, Exponential stability of an abstract non-dissipative linear system, J. SIAM Control Optim. 40 (2001) 149–165.
[9] B. Rao, Optimal energy decay rate in the Rayleigh beam equation, in: Cox, Lasiecka (Eds.), Optimization Methods in Partial Differential Equations, in: Contemp. Math., Vol. 209, 1997, pp. 211–229.
[10] B. Rao, Stabilization of a plate equation with dynamical boundary control, J. SIAM Control Optim. 36 (1998) 148–163.
[11] D. Russell, A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems, J. Math. Anal. Appl. 173 (1993) 339–358.