Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 615–618
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités/Théorie du potentiel

Marches aléatoires et théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens

Nicholas Th. Varopoulos

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et I.U.F., département de mathématiques (UFR 920), boîte courrier 172, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 11 février 2003 ; accepté après révision le 30 août 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

On donne des estimations techniques sur les gradients de fonctions de Green dans des domaines lipschitziens. L'application principale de ces estimations est un théorème central limite optimal de marches aléatoires dans ces domaines. ***Pour citer cet article : N.Th. Varopoulos, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Random walks and potential theory in Lipschitz domains. We give a technical estimate on the gradients of the Green's functions in Lipschitz domains. The main application is a sharp Central Limit Theorem for random walks in these domains. ***To cite this article: N.Th. Varopoulos, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Les estimations principales

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d \geqslant 2)$ un domaine lipschitzien :

$$\Omega = \left\{x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}; x_1 > \varphi(x')\right\},$$

où $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ est une fonction lipschitzienne réelle qui satisfait :

$$\left|\varphi(x') - \varphi(y')\right| \leqslant A|x' - y'| ; \quad x', y' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Notons par $G(x, y)$ $(x, y \in \Omega)$ la fonction de Green du domaine Ω (pour le laplacien euclidien). On a alors :

$$\left| \int_{|y-z| \geqslant 1/2\delta(y)} \frac{\partial}{\partial z_i} G(x, z) \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k} G(z, y)\, \mathrm{d}z \right| \leqslant CG(x, y)\left[\delta^{-1}(x) + \delta^{-1}(y) + |x - y|^{-1}\right] ; \quad x, y \in \Omega,\ i, j, k = 1, 2, \ldots, d, \tag{1}$$

Adresse e-mail : vnth2003@yahoo.ca (N.Th. Varopoulos).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.08.008

où on note :

$$\delta(a) = \mathrm{dist}(a, \partial\Omega)\ ; \quad a \in \Omega,$$

et où C dépend uniquement de d et de A. La preuve de cette estimation repose sur la théorie des intégrales singulières et notamment sur les résultats de [3].

Dans le cas $d = 2$ on peut aussi donner une démonstration directe de l'estimation (1) en utilisant l'application conforme entre Ω et $\mathbb{R}^2_+$. Dans ce cas d'ailleurs, l'estimation (1) est liée à une autre estimation technique intéressante : soit $f \in H^p(\Omega)$, $g \in H^q(\Omega)$, avec $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < +\infty$ (i.e. des fonctions harmoniques dont la fonction maximale non tangentielle appartient à L^p (resp. L^q) par rapport à la mesure linéaire de $\partial\Omega$). On a alors :

$$\left|\int f(z)\nabla g(z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\right| \leqslant C\|f\|_p\|g\|_q,$$

où C dépend uniquement de A. Une généralisation de cette inégalité pour $d \geqslant 2$ existe aussi, à condition d'imposer l'hypothèse supplémentaire que $|p - 2|$ est suffisamment petit. L'inégalité précédente pour $p = q = 2$, $d \geqslant 2$ est due à [3].

En ce qui concerne la fonction de Green $G(x, y)$ ci-dessus, deux autres estimations qui portent sur des intégrales positives sont significatives pour les applications probabilistes :

$$\int_\Omega G(x,z)G(z,y)\delta^{-2-\varepsilon}(z)\,\mathrm{d}z \leqslant CG(x,y)\big[\delta^{-\varepsilon}(x) + \delta^{-\varepsilon}(y)\big]\ ; \quad 0 < \varepsilon < 1,\ x, y \in \Omega, \tag{1_ε}$$

où C dépend uniquement de d, A et ε. La preuve de cette inégalité repose sur le fait que la mesure harmonique sur $\partial\Omega$ admet une densité L^2 par rapport à la mesure de surface.

Dans le cas où Ω est convexe on a aussi :

$$\int_{|z-y|\geqslant 1/2\delta(y)} G(x,z)\big|\nabla_z^2 G(z,y)\big|\delta^{-1}(z)\,\mathrm{d}z \leqslant C(d,A)G(x,y)\big(\delta^{-1}(x) + \delta^{-1}(y)\big)\ ; \quad x, y \in \Omega. \tag{2}$$

La démonstration de cette inégalité repose sur l'estimation principale de [5].

Les deux inégalités (1) et (2) peuvent être considérées, dans un certain sens, comme des cas limites de $(1)_\varepsilon$ quand $\varepsilon \to 1$. En effet, on peut utiliser l'inégalité de Harnack et estimer les gradients $\nabla_x^k G(x, y)$ en fonction de $G(x, y)$ et de la distance de x aux singularités. D'autre part l'estimation (2) et Harnack entraînent que, dans le cas convexe, on peut mettre la valeur absolue dans l'intégrale (1).

2. Applications probabilistes et solution du problème de Dirichlet

2.1. Notations

Notons par $b(t) \in \mathbb{R}^d$ $(t > 0)$ le mouvement brownien standard :

$$\mathbb{E}\langle b(1), \xi\rangle^2 = \sum \xi_i^2\ ; \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Notons par $z_n \in \mathbb{Z}^d$ $(n \geqslant 0)$ la marche aléatoire engendrée par une mesure de probabilité centrée,

$$\mathbb{P}[z_{n+1} = y | z_n = x] = \mu(y - x)\ ; \quad n = 0, 1, \ldots,\ x, y \in \mathbb{Z}^d,$$

$$\mu \in \mathbb{P}\big(\mathbb{Z}^d\big), \quad \int x\,\mathrm{d}\mu = 0, \quad \operatorname{supp}\mu \subset \big[|x| \leqslant R\big].$$

On suppose que

$$\int x_i x_j \,\mathrm{d}\mu = \delta_{ij} \ ; \quad i, j = 1, \ldots, d,$$

et on impose aussi les conditions :

$$\mu(\pm e_k) \geqslant \lambda \ ; \quad k = 1, \ldots, d,$$

où $\lambda > 0$ et où $e_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ sont les vecteurs coordonnées.

On note par τ le temps de sortie des processus $b(t)$, z_n de Ω (e.g. $\tau = \inf[t; b(t) \notin \Omega]$) et par $p_t(x, y)$, $p_n^\mu(x, y)$, les noyaux de transition de ces deux processus dans Ω,

$$p_t(x, y)\,\mathrm{d}y = \mathbb{P}_x\big[b(t) \in \mathrm{d}y;\ \tau > t\big] \ ; \quad t > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^d,$$
$$p_n^\mu(x, y) = \mathbb{P}_x\big[z_n = y;\ \tau > n\big] \ ; \quad n = 0, 1, \ldots,\ x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

On note par G, G_μ les noyaux de Green correspondants :

$$G(x, y) = \int_o^\infty p_t(x, y)\,\mathrm{d}t \ ; \quad x, y \in \Omega, \qquad G_\mu(x, y) = \sum_{n=o}^\infty p_n^\mu(x, y) \ ; \quad x, y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^d.$$

2.2. *Théorème d'approximation pour le noyau de Green*

Théorème 2.1. *Avec les notations ci-dessus on a* :

$$\big|G(x, y) - G_\mu(x, y)\big| \leqslant CG(x, y)\big(\delta^{-1}(x) + \delta^{-1}(y) + |x - y|^{-1}\big) \ ; \quad x, y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^d,\ \delta(x), \delta(y) \geqslant C, \tag{3}$$

où $C > 0$ *dépend uniquement de* d, λ, R, A.

La démonstration de ce théorème en toute généralité nécessite l'estimation (1). Dans le cas où Ω est convexe on peut utiliser l'estimation (2) et dans le cas où μ est symétrique, l'estimation $(1)_\varepsilon$ suffit.

2.3. *Application à la solution du problème de Dirichlet*

Soit F une fonction lipschitzienne dans $\mathbb{R}^d$ et soit u la solution du problème de Dirichlet inhomogène dans un domaine borné lipschitzien Ω :

$$\Delta u = F \text{ dans } \Omega \ ; \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Soit u_ε la solution du problème de Dirichlet par la méthode de différences finies sur la maille de longueur $\varepsilon > 0$:

$$\Delta_\varepsilon u_\varepsilon = F \text{ dans } \Omega \ ; \quad u_\varepsilon \equiv 0 \text{ dans le complémentaire de } \Omega,$$

où $\Delta_\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta - \mu_\varepsilon)$ et où μ_ε et la mesure de Bernoulli sur la maille (i.e. $\mu_\varepsilon(\pm\varepsilon e_j) = (2d)^{-1}$ cf. [2].

Le théorème précédent, renormalisé à l'échelle ε, entraîne une estimation optimale jusqu'au bord de $u - u_\varepsilon$. À titre d'exemple considérons le cas où Ω est borné et *convexe*. On a alors :

$$\big|u(x) - u_\varepsilon(x)\big| \leqslant C\varepsilon\|F\| \ ; \quad x \in \Omega,\ \varepsilon > 0,\ \delta(x) \geqslant C\varepsilon, \tag{4}$$

où $\|F\|$ est la norme de Lipschitz de F et où C dépend uniquement de l'excentricité, et du diamètre de Ω et de la dimension. Si on ne suppose pas Ω convexe, dans l'estimation (4), il faut modifier le second membre et on a :

$$\big|u(x) - u_\varepsilon(x)\big| \leqslant C\varepsilon\|F\|\delta^{-\alpha}(x) \leqslant C\varepsilon^{1-\alpha}\|F\| \ ; \quad x \in \Omega,\ \varepsilon > 0,\ \delta(x) \geqslant C\varepsilon,$$

où $\alpha = \alpha(\Omega) < 1$.

Observons finalement que le théorème d'approximation (3) et les estimations jusqu'au bord pour la solution du problème de Dirichelt sont des résultats équivalents.

2.4. Théorème d'approximation pour les probabilités de transition

Théorème 2.2. *Avec les notations ci-dessus on a* :

$$\left|p_n^\mu(x,y)-p_n(x,y)\right|\leqslant Cp_{cn}(x,y)\left(\delta^{-1}(x)+\delta^{-1}(y)+n^{-1/2}\right);\quad x,y\in\Omega\cap\mathbb{Z}^d,\ n\geqslant C,\ \delta(x),\delta(y)\geqslant C,$$

où $C>0,\ c>1$ *dépend uniquement de* $d,\ \lambda,\ R,\ A$.

Le théorème précédent est une généralisation du théorème classique de Berry–Esseen-Edgeworth (où $\Omega=\mathbb{R}^d$, cf. [4]) pour une marche aléatoire dans un domaine lipschitzien.

La démonstration de ce théorème repose sur l'analogue parabolique des estimations (1), $(1)_\varepsilon$, (2). Cette version parabolique des estimations est plus fine et contient les estimations précédentes sur la fonction de Green.

Les démonstrations des résultats précédents vont paraître ultérieurement. Cf. [6] pour quelques résultats partiels dans la même direction.

Observons d'autre part que les applications précédentes, et notamment (4), admettent une contre-partie naturelle en théorie de l'homogénéisation où ce type de problème a déjà été étudié par plusieurs auteurs [1,7].

Références

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, 1978.
[2] L. Bers, F. John, M. Schechter, Partial Differential Equations, Wiley, 1964.
[3] B.E.J. Dahlberg, C.E. Kenig, A.C. Verchota, The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a Lipschitz domain, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 36 (3) (1986) 109–135.
[4] W. Feller, An Introduction to Probability Theory, Vol. 2, Wiley.
[5] J. Kadlec, The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to a convex domain, Czechoslovak Math. J. 14 (1964) 386–393.
[6] N.Th. Varopoulos, Potential theory in Lipschitz domains, Canad. J. Math. 53 (5) (2001) 1057–1120.
[7] V.V. Zhikov, A spectral approach to the asymptotic problem of diffusion, Differentsial'nye Uravneniya 25 (1) (1985) 44–55.