

ERRATUM :

“EXISTENCE GLOBALE ET COMPORTEMENT
ASYMPTOTIQUE POUR L’ÉQUATION DE
KLEIN–GORDON QUASI LINÉAIRE
À DONNÉES PETITES EN DIMENSION 1”
[ANN. SCI. ÉCOLE NORM. SUP. (4) 34 (1) (2001) 1–61]

PAR JEAN-MARC DELORT

RÉSUMÉ. – Nous corrigeons dans cette note une erreur de [Delort, J.-M., Existence globale et comportement asymptotique pour l’équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 34 (1) (2001) 1–61], qui nous a été indiquée par H. Lindblad. Les résultats de [Delort, J.-M., Existence globale et comportement asymptotique pour l’équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 34 (1) (2001) 1–61] restent valables, à condition de renforcer l’hypothèse de régularité faite sur les données de Cauchy.

© 2006 Elsevier SAS

ABSTRACT. – We correct in this note a mistake in [Delort, J.-M., Existence globale et comportement asymptotique pour l’équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 34 (1) (2001) 1–61], which has been indicated to us by H. Lindblad. The results of [Delort, J.-M., Existence globale et comportement asymptotique pour l’équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 34 (1) (2001) 1–61] still hold true if one increases the smoothness assumption made on the Cauchy data.

© 2006 Elsevier SAS

Table des matières

0	Introduction	335
1	Rappel du théorème. Écriture de l’équation	336
2	Estimations L^2 et L^∞	339
	Références	345

0. Introduction

Le but de cette note est de corriger une erreur dans l’article [1]. Il est en effet affirmé page 54, formule (3.26) de [1], que l’on peut déduire par le lemme de Gronwall de l’inégalité

$$(*) \quad N(t) \leq C \left[N(T_0) + N(t)^2 + \int_{T_0}^t N(\tau) \left[\left(\frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} + \frac{1}{\tau^{\nu'}} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right]$$

où $\alpha < 0$, $\nu' > 0$ une estimation de la forme

$$(**) \quad N(t) \leq C' [N(T_0) + N(t)^2].$$

Comme nous l'a fait remarquer Hans Lindblad, à qui nous exprimons notre gratitude, cette assertion est incorrecte. Nous allons montrer ici que les raisonnements de [1] entraînent en fait une estimation plus forte que (*), de la forme

$$(***) \quad N(t) \leq C \left[N(T_0) + N(t)^2 + \int_{T_0}^t N(\tau)^2 \left(\frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{T_0}^t N(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu'}} \right]$$

qui elle, en revanche, implique bien (**). De fait, le terme gênant dans (*), à savoir $\int_{T_0}^t N(\tau) \left(\frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} \frac{d\tau}{\tau}$, provient de termes de reste, dans lesquels nous avons regroupé à la fois des contributions linéaires et des contributions quadratiques. Dans la première partie de cette note, nous faisons remarquer que les preuves des résultats de la section 2.2 de [1] fournissent des renseignements plus précis que ceux qui y sont énoncés. En fait, on peut décomposer les restes S_0^\pm qui y apparaissent en des contributions quadratiques, qui s'estiment par le terme intégral en $N(\tau)^2$ dans (***), et des contributions linéaires assez explicites.

La seconde section de cette note reprend l'estimation L^2 des pages 48 à 50 de [1], en y incorporant la nouvelle contribution linéaire. Reprenant un idée déjà utilisée dans [2], on montre que l'on obtient une inégalité de type (***), qui permet de retrouver l'estimation (**), d'où découle le résultat d'existence globale de [1]. La seule modification, par rapport à [1], est que nous sommes obligés de choisir des valeurs différentes pour les indices (s, s') des espaces utilisés, ce qui revient à faire des hypothèses de régularité plus fortes sur la donnée initiale.

Afin de permettre une lecture en parallèle avec [1] de cet erratum, nous adoptons une numérotation des énoncés et des formules semblable à celle de [1] : lorsque nous écrivons une version modifiée de la formule (1.23) de [1], nous la numérotions ici (1.23'). Par contre les énoncés que nous complétons dans cette note, ou les formules de [1] que nous reproduisons à l'identique, ont la même numérotation que dans [1]. C'est ainsi qu'une référence à la formule (1.23) renvoie à [1]. Enfin, dans la seconde section, lorsque nous écrivons des formules qui n'ont pas leur pendant dans [1], nous utilisons une numérotation spécifique de la forme (E.2.3).

Donnons quelques références à des travaux récents sur le sujet. Sunagawa [5] a donné une preuve beaucoup plus courte que celle de [1] du théorème 1.2 dans le cas de non-linéarités (semi-linéaires) cubiques. Lindblad et Soffer [4] ont également obtenu une telle démonstration courte pour des non-linéarités en v^3 , et ont utilisé les mêmes idées pour étudier dans [3] le « scattering inverse » de telles équations, y compris pour des données asymptotiques grandes.

Signalons enfin que la notation $\| \cdot \|$ désigne la norme L^2 .

1. Rappel du théorème. Écriture de l'équation

Considérons l'équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites de taille ϵ

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \square v + v &= F(v, \partial_t v, \partial_x v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v), \\ v|_{t=0} &= \epsilon f, \\ \partial_t v|_{t=0} &= \epsilon g \end{aligned}$$

où f, g sont régulières à support compact, à valeurs réelles, $\epsilon > 0$ est un petit paramètre, F une non-linéarité C^∞ à valeurs réelles, nulle au moins à l'ordre 2 à l'origine, affine en ses deux derniers arguments. Le théorème principal de [1] s'énonce :

THÉORÈME 1.2. – *Supposons que F vérifie la condition nulle de la définition 1.1 de [1]. Soit $B > 0$. Il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ assez grand, et pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma > \sigma_0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour toutes fonctions $f \in H^\sigma(\mathbb{R})$, $g \in H^{\sigma-1}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, supportées dans $[-B, B]$, vérifiant $\|f\|_{H^\sigma}^2 + \|g\|_{H^{\sigma-1}}^2 \leq 1$, le problème (1.1) admette, lorsque $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, une unique solution globale $v \in C^0(\mathbb{R}, H^\sigma) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{\sigma-1})$.*

La seule différence entre cet énoncé et celui de [1] est que nous supposons $\sigma > \sigma_0$ assez grand, au lieu de $\sigma > 7/2$. Nous verrons que la constante σ_0 ne dépend que du réel κ , introduit dans le changement d'inconnue (1.20), et astreint à vérifier la seule condition $\kappa \geq 3$ (page 13 de [1]).

Nous allons préciser les énoncés de plusieurs propositions et lemmes de la section 2.2 de [1]. Nous rajoutons ici les compléments nécessaires sans reprendre la totalité des énoncés.

LEMME 2.16. – (iii) *De plus, on a*

$$(2.52') \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tau_\pm \left(t, x, \xi, w(t), w'(t), \frac{\partial_x}{t} w(t) \right) \\ = \mp \frac{\xi^2}{t^3} \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2} \right)^{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_\pm^1 \left(t, x, \xi, \partial_t w(t), \partial_t w'(t), \partial_t \frac{\partial_x}{t} w(t) \right) + \frac{1}{t} r(t, x, \xi), \end{aligned}$$

où $r(t, \cdot)$ est un symbole de Σ_1^1 dont les semi-normes sont majorées par

$$(2.52'') \quad C \left(\|(w, w')\|_{F_\alpha^{s, s'}(t)} + \|(\partial_t w, \partial_t w')\|_{F_\alpha^{s, s'-1}(t)} \right)$$

lorsque (w, w') vérifie les conditions énoncées au (ii) du lemme 2.16.

En fait, la formule (2.52') est démontrée dans la preuve du (ii) du lemme 2.16 de [1] : le premier terme dans le membre de droite de (2.52') est la dérivée en t du premier terme du membre de droite de (2.46). La dérivée du terme en θ_\pm dans (2.46) fournit comme indiqué dans [1] le terme en θ_\pm^1 et le terme en r dans (2.52'). Il est prouvé dans [1] que $r \in \Sigma_1^1$, le fait que ses semi-normes se contrôlent par (2.52'') résultant du fait que les expressions $\theta_\pm^j(t, x, \xi, z)$, permettant de définir $\tau_\pm(t, x, \xi, z)$ par (2.46), sont nulles en $z = 0$.

PROPOSITION 2.17. – *Le terme en S_0^\pm du membre de droite de (2.57) se décompose sous la forme*

$$(2.57') \quad S_0^\pm(t, w, \partial_t w, \partial_t^2 w) = \text{Op}^B(\tilde{K})w + S_0'^\pm(t, w, \partial_t w, \partial_t^2 w),$$

où \tilde{K} est un symbole, indépendant de w , dans la classe S_1^1 définie par la formule (2.13) de [1], et où $S_0'^\pm$ vérifie

$$(2.57'') \quad \|S_0'^\pm(t, w, w', w'')\|_{H_{\alpha+1}^{s, s'}} \leq C \|(w, w', w'')\|_{\tilde{F}_\alpha^{s, s'}(t)}^2.$$

Démonstration. – Nous allons décomposer le terme S_0^\pm en des contributions linéaires en w , qui vont fournir le premier terme dans le membre de droite de (2.57'), et en des termes de reste au moins quadratiques, qui vérifieront donc (2.57''). Écrivons

$$(2.58) \quad \begin{aligned} & (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+))(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_-))w \\ &= (D_t^2 - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+ + \tau_-)D_t + \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+\tau_-))w \\ & \quad + (\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+) \circ \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_-) - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+\tau_-))w - \text{Op}^{\mathcal{B}}(D_t\tau_-)w. \end{aligned}$$

D'après (2.52'), le dernier terme, $-\text{Op}^{\mathcal{B}}(D_t\tau_-)w$, s'écrit

$$(2.59') \quad \begin{aligned} & i\frac{D^2}{t^3} \left(1 + \frac{D^2}{t^2}\right)^{-1/2} w + \frac{i}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left(\theta_-^1 \left(t, x, \xi, \partial_t w, \partial_t^2 w, \partial_t \frac{\partial_x}{t} w \right) \right) w \\ & \quad + \frac{1}{t} S_0^\pm(t, w, \partial_t w, \partial_t^2 w) \end{aligned}$$

où

$$\|S_0^\pm(t, w, w', w'')\|_{H_{\alpha+1}^{s, s'}} \leq C \|w\|_{H_{\alpha}^{s, s'+1}(t)} \|(w, w', w'')\|_{\tilde{F}_{\alpha}^{s, s'}(t)},$$

puisque le symbole r dans (2.52') est dans Σ_1^1 , et que ses semi-normes sont majorées par (2.52''). Le premier terme de (2.59') fournit une contribution au premier terme du membre de droite de (2.57'). Le second terme de (2.59') et l'avant-dernier terme du membre de droite de (2.58) sont traités dans [1], les termes de reste qu'ils induisent étant du type $\frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^+$. On montre également dans [1] que le premier terme du membre de droite de (2.58) s'écrit, modulo des restes en $\frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^+$, sous la forme du membre de droite de (1.40). Les diverses contributions à ce dernier, à l'exception de la première, sont traitées dans [1]. Les restes qu'elles engendrent soit sont en $\frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^+$, soit vérifient (2.57'') car ils sont quadratiques en w et ses dérivées. Il reste donc seulement à traiter la première quantité du membre de droite de (1.40), soit $i\frac{K(x)}{t} \frac{D_x}{t} w$. Il nous suffit de montrer que

$$i\frac{K(x)}{t} \frac{D_x}{t} w - \frac{i}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left(K(x) \frac{\xi}{t} \right) w$$

est un reste en $\frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^+$, puisque $iK(x) \frac{\xi}{t}$ est un symbole de S_1^1 , qui fournit une contribution au premier terme du membre de droite de (2.57'). Il reste donc à voir que $t^\nu T_{(\frac{D_x}{t} w)} K$ et $t^\nu R(K, \frac{D_x}{t} w)$ sont bornés dans $H_{\alpha}^{s, s'}(t)$. Or, comme $w \in H_{\alpha}^{s, s'+1}(t)$ et que, d'après (2.56), $s > \alpha + 1$, nous avons $\|S_j \frac{D_x}{t} w\| \leq C t^{-1-\alpha}$. D'autre part, comme $K(x) = \kappa \text{th}(\kappa x)$ est C^∞ bornée ainsi que toutes ses dérivées, $\|\Delta_j K\|_{L^\infty} \leq C_N 2^{-jN}$ pour tout N . La conclusion cherchée en résulte. \square

Nous précisons maintenant certains résultats de la sous-section 2.3 de [1]. Complétons d'abord la définition 2.18 :

DÉFINITION 2.18. – On appelle opérateur de reste de type $(0, 1)$ au sens fort sur la boule $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r)$, tout opérateur $U \rightarrow S_0^l(t, U)$ défini pour $t \geq T_0$ sur la boule précédente, à valeurs dans $H_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$, et vérifiant les estimations uniformes

$$(2.62') \quad \|S_0^l(t, U)\|_{H_{\alpha+1}^{s, s'}(t)} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)}^2 = C \|U\|_{E_{\alpha}^{s, s'}(t)}^2.$$

Nous pouvons alors préciser la proposition 2.20 de [1] :

PROPOSITION 2.20. – *La formule (2.79) peut se récrire*

$$(2.79') \quad \begin{aligned} & (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)))u_{\pm} \\ &= \frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)U + \frac{1}{\sqrt{t}} {}^t U \Gamma(x)U + \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0U) \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(L_{\pm}(t, x, \xi, U))U + \frac{1}{t} S_0'^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U), \end{aligned}$$

où \tilde{K}_1 est un symbole de S_1^0 et où $S_0'^{\pm}(t, U)$ est un reste de type $(0, 1)$ au sens fort.

Démonstration. – Nous devons mettre le membre de droite de (2.57), dans lequel le terme en S_0^{\pm} a été remplacé par (2.57'), sous la forme (2.79'). Remarquons d'abord que dans les lemmes 2.21 et 2.22, les restes en S_0^{\pm} sont en fait des restes de type $(0, 1)$ au sens fort puisqu'ils sont obtenus en exprimant des quantités quadratiques ou cubiques en w à partir de U : ils vérifient donc des estimations du type (2.62'). Le seul terme nouveau à étudier est donc le terme en $\frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K})w$ dans lequel on exprime $w = \Lambda^{-1} H_t^2(U)$, $H_t^2(U)$ désignant la seconde composante de $H_t(U)$ donné par (2.68). D'après cette égalité et (2.69), $\Lambda^{-1}(H_t(U) - M_0U)$ est dans $\frac{1}{\sqrt{t}} H_{\alpha}^{s, s'+1}(t)$, donc $\frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K})w$ s'écrit $\frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)U$ pour un symbole $\tilde{K}_1 \in S_1^0$, modulo un terme en $\frac{1}{t^{3/2}} S_1^{\pm}(t, U)$. \square

Le théorème 2.25 admet alors la version précisée suivante :

THÉORÈME 2.25. – *Le membre de droite de (2.96) peut se récrire sous la forme :*

$$(2.96') \quad \begin{aligned} & \frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(U) + \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0U) - \frac{2}{t} ({}^t U \Gamma(x)U) ([1, 1] \hat{\Gamma}^{\pm}(x)U) \\ & \quad + \frac{1}{t} S_0'^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U) \end{aligned}$$

où S_1^{\pm} est un reste de type $(0, 0)$ et $S_0'^{\pm}$ un reste de type $(0, 1)$ au sens fort.

Démonstration. – On remarque d'abord que dans la proposition 2.26, le lemme 2.27 et le lemme 2.28, les restes en S_0 vérifient (2.62') car ils sont obtenus à partir de quantités au moins quadratiques en U . Par conséquent, d'après la proposition 2.26, le lemme 2.28 et (2.79'), le membre de gauche de (2.96) s'écrit

$$(2.112') \quad \begin{aligned} & \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0U) - \frac{2}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})((D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U, U) \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t [(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U] C_{\pm})U - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t U C_{\pm})(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U \\ & \quad + \frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(U) + \frac{1}{t} S_0'^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U) \end{aligned}$$

où $S_0'^{\pm}$ (resp. S_1^{\pm}) est un reste de type $(0, 1)$ au sens fort (resp. un reste de type $(0, 0)$). Il reste pour obtenir (2.96') à appliquer aux second, troisième et quatrième termes de (2.112') les réductions faites dans [1, p. 47], en remarquant que ces termes étant au moins quadratiques en U , les restes de type $(0, 1)$ que l'on obtient vérifient l'estimation (2.62') i.e. sont des restes au sens fort. \square

2. Estimations L^2 et L^{∞}

Nous commençons par établir deux résultats techniques.

LEMME E.2.1. – Soient s, s', α vérifiant $s' + \alpha > 0$. Il y a équivalence, uniformément en $t \geq T_0 > 0$, entre la norme $\|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)}$ et la norme

$$(E.2.1) \quad \|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)} = t^{-s'} \|u\|_{H^{s+s'}} + t^\alpha \|u\|_{H^{s-\alpha}}.$$

Démonstration. – Rappelons que $\|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)}$ est la meilleure constante $C > 0$ telle qu'il existe une famille $(c_j)_{j \geq -1}$ vérifiant $\sum c_j^2 \leq 1$ et

$$(E.2.2) \quad \|\Delta_j u\| \leq C c_j 2^{-js} \left(\frac{2^j}{t}\right)^\alpha \left(1 + \frac{2^j}{t}\right)^{-s'-\alpha}.$$

On en déduit, puisque $s' + \alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq -1} 2^{2j(s+s')} \|\Delta_j u\|^2 &\leq C_0 C^2 t^{2s'}, \\ \sum_{j \geq -1} 2^{2j(s-\alpha)} \|\Delta_j u\|^2 &\leq C_0 C^2 t^{-2\alpha} \end{aligned}$$

avec une constante uniforme C_0 , d'où une majoration de (E.2.1) en termes de $\|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)}$. Réciproquement, on a d'après (E.2.1)

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\| &\leq \|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)} c_j t^{s'} 2^{-j(s+s')}, \\ \|\Delta_j u\| &\leq \|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)} c_j t^{-\alpha} 2^{-j(s-\alpha)} \end{aligned}$$

pour une suite $(c_j)_j$ de la boule unité de ℓ^2 , d'où l'on déduit (E.2.2). \square

LEMME E.2.2. – Supposons données trois familles $m_j(t)$, $\tilde{m}_j(t)$, $d_j(t)$, $j \geq -1$, de fonctions définies sur $[T_0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. Notons pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $t \geq T_0$

$$(E.2.3) \quad \begin{aligned} \mu(\theta, t) &= \left(\sum_{j \geq -1} 2^{2j\theta} m_j(t)^2 \right)^{1/2}, \\ \tilde{\mu}(\theta, t) &= \left(\sum_{j \geq -1} 2^{2j\theta} \tilde{m}_j(t)^2 \right)^{1/2}, \\ \delta(\theta, t) &= \left(\sum_{j \geq -1} 2^{2j\theta} d_j(t)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $t \geq T_0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $C_0^{-1} \mu(\theta, t) \leq \tilde{\mu}(\theta, t) \leq C_0 \mu(\theta, t)$. Soient $s \in \mathbb{R}_+$, $s' \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $s' + \alpha$ soit entier et vérifie $C_0 \Omega < s' + \alpha < C_0 \Omega + 1$. Supposons que pour tout $t \geq T_0$

$$(E.2.4) \quad m_j(t) \leq m_j(T_0) + \Omega \int_{T_0}^t \frac{2^j}{\tau} \left(1 + \frac{2^j}{\tau}\right)^{-1} \tilde{m}_j(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \int_{T_0}^t d_j(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Il existe alors $C > 0$ telle que si l'on pose $\Omega' = C_0 \Omega$, $\ell = s' + \alpha - 1 \in \mathbb{N}$, on ait pour tout $t \geq T_0$

$$(E.2.5) \quad \mu(s + s', t) \leq Ct^{\Omega'} \left[\mu(s + s', T_0) + \int_{T_0}^t \delta(s + s', \tau) \frac{d\tau}{\tau^{\Omega'+1}} \right],$$

$$\mu(s - \alpha, t) \leq C \left[\mu(s + s', T_0) + \sum_{\ell'=0}^{\ell+1} \int_{T_0}^t \delta(s + s' - \ell', \tau) \tau^{-s'+\ell'} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \right].$$

Démonstration. – Nous reprenons un argument déjà utilisé dans [2]. Multipliant (E.2.4) par $2^{j(s+s')}$, majorant par 1 le terme en $\frac{2^j}{\tau}(1 + \frac{2^j}{\tau})^{-1}$, et prenant la norme ℓ^2 , on obtient

$$\mu(s + s', t) \leq \mu(s + s', T_0) + \Omega \int_{T_0}^t \tilde{\mu}(s + s', \tau) \frac{d\tau}{\tau} + \int_{T_0}^t \delta(s + s', \tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Puisque $\tilde{\mu}(s + s', \cdot) \leq C_0 \mu(s + s', \cdot)$, on peut appliquer le lemme de Gronwall, ce qui donne la première inégalité (E.2.5).

Pour prouver la seconde, montrons d'abord par récurrence sur $\ell' = 0, \dots, \ell$

$$(E.2.6) \quad \mu(s + s' - \ell', t) \leq Ct^{\Omega' - \ell'} \left[\mu(s + s', T_0) + \int_{T_0}^t \delta(s + s', \tau) \frac{d\tau}{\tau^{\Omega'+1}} \right]$$

$$+ C \sum_{\ell''=1}^{\ell'} \int_{T_0}^t \delta(s + s' - \ell'', \tau) \frac{d\tau}{\tau^{\ell'+1-\ell''}}.$$

Le cas $\ell' = 0$ de l'inégalité est déjà prouvé. Supposons (E.2.6) déjà démontré au cran $\ell' < \ell$. Multipliant (E.2.4) par $2^{j(s+s'-\ell'-1)}$ et prenant la norme ℓ^2 en j , nous obtenons

$$(E.2.7) \quad \mu(s + s' - \ell' - 1, t) \leq \mu(s + s' - \ell' - 1, T_0)$$

$$+ \Omega' \int_{T_0}^t \mu(s + s' - \ell', \tau) \frac{d\tau}{\tau^2} + \int_{T_0}^t \delta(s + s' - \ell' - 1, \tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

où, dans le terme en \tilde{m}_j de (E.2.4), nous avons utilisé le facteur $2^j/\tau$ pour perdre un cran de régularité et gagner un cran de décroissance. Si nous majorons le terme en $\mu(s + s' - \ell', \tau)$ dans le membre de droite de (E.2.7) à l'aide de (E.2.6), et utilisons que si $\ell' < \ell$, $\Omega' - \ell' - 2 > -1$, nous obtenons (E.2.6) au cran $\ell' + 1$.

Enfin nous utilisons (E.2.7) avec $\ell' = \ell$, de telle manière que, par définition de ℓ , son membre de gauche vaille $\mu(s - \alpha, t)$. Appliquant (E.2.6) avec $\ell' = \ell$ pour estimer le terme en $\mu(s + s' - \ell, \tau)$ du membre de droite, nous obtenons une majoration de $\mu(s + s' - \ell - 1, t)$ par le membre de droite de la seconde formule (E.2.5), utilisant que $\Omega' - \ell - 2 < -1$ grâce à l'hypothèse $\Omega' < s' + \alpha < \Omega' + 1$ et à la définition de $\ell = s' + \alpha - 1$. Cela conclut la preuve. \square

Nous reprenons maintenant la preuve de l'estimation L^2 donnée dans les pages 48 à 50 de [1]. Nous choisissons d'abord un indice de régularité σ pour la donnée initiale vérifiant $\sigma > \sigma_0$ où $\sigma_0 = \Omega' + \frac{7}{2}$, la constante $\Omega' = C_0 \Omega$ étant à fixer ci-dessous, en fonction du seul paramètre κ introduit dans la formule (1.20), et astreint à vérifier la seule condition $\kappa \geq 3$ d'après [1, p. 13]. Nous fixons $\alpha < 0$ assez proche de 0, s' réel tel que $s' + \alpha \in \mathbb{N}$ et $\Omega' < s' + \alpha < \Omega' + 1$ (nous pouvons toujours supposer Ω' non entier, quitte à augmenter un peu sa valeur). Si nous posons

$s = \sigma - s' - 0$, les conditions (3.1) sont satisfaites par s, s', α . L'équation (2.96) (ou (3.3)) de [1] se réécrit, compte tenu de l'expression précisée (2.96') de son membre de droite,

$$(3.3') \quad (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)))\tilde{u}_{\pm} = \frac{1}{t}\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(u_{\pm}) + \frac{1}{t}f_{\pm}$$

avec

$$(3.4') \quad \tilde{u}_{\pm} = u_{\pm} - \frac{1}{\sqrt{t}}\text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})(U, U) - \frac{1}{\sqrt{t}}\text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})U, \\ f_{\pm} = \tilde{A}_3(x)(M_0U) - 2({}^tU\Gamma(x)U)([1, 1]\hat{\Gamma}^{\pm}(x)U) + S_0'^{\pm}(t, U) + t^{-\nu}S_1^{\pm}(t, U)$$

où $S_0'^{\pm}$ est un terme de reste de type $(0, 1)$ au sens fort. Nous posons $\tilde{U} = [\tilde{u}_+]$, $f = [f_+]$. D'après la formule (3.11) de [1], on a

$$\|\tilde{U}(t, \cdot) - U(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(t)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|U(t, \cdot)\|_{L^{\infty}}\|U(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(t)}.$$

Quitte à modifier le terme en S_1^{\pm} de f_{\pm} , nous pouvons donc, dans la formule (3.3'), remplacer $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(u_{\pm})$ par $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(\tilde{u}_{\pm})$. La proposition 3.1 de [1] se modifie alors comme suit :

PROPOSITION 3.1. – *Il existe une constante Ω assez grande telle que si s, s', α vérifient les conditions ci-dessus, il existe $C > 0$ et $\tilde{\nu} > 0$ tels que l'on ait l'inégalité*

$$(3.5') \quad \|U(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(t)} \leq C \left[\|U(T_0, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(T_0)} + \|U(t, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s, s'}(t)}^2 \right. \\ \left. + \int_{T_0}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s, s'}(\tau)}^2 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{T_0}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{1+\tilde{\nu}}} \right],$$

la norme $E_{\alpha}^{s, s'}(t)$ désignant la somme des normes $H_{\alpha}^{s, s'}(t)$ et L^{∞} .

Démonstration. – Nous faisons agir Δ_j sur l'équation (3.3') dans le membre de droite de laquelle nous avons remplacé $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(u_{\pm})$ par $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(\tilde{u}_{\pm})$. Nous obtenons :

$$(3.6') \quad (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}))\Delta_j\tilde{u}_{\pm} = [\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})]\tilde{u}_{\pm} + \frac{1}{t}\Delta_j f_{\pm} + \frac{1}{t}\Delta_j \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1)(\tilde{u}_{\pm}).$$

Nous désignons par $\tilde{\Delta}_j$ une troncature spectrale donnée pour j assez grand par $\tilde{\varphi}(2^{-j}D)$, où $\tilde{\varphi}$ est supportée dans une couronne assez grande et vérifie $\tilde{\varphi}\varphi = \varphi$, si φ est la troncature permettant de définir Δ_j . Nous procédons de même pour les petits j , mais avec une troncature sur une boule. Compte tenu des propriétés des opérateurs paradifférentiels, ces troncatures peuvent être adaptées de telle manière que nous puissions remplacer dans le membre de droite de (3.6') \tilde{u}_{\pm} par $\tilde{\Delta}_j\tilde{u}_{\pm}$ sans changer sa valeur. Nous obtenons alors

$$(3.9') \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_j \tilde{U}(t, \cdot)\|^2 = \text{Re}\langle i\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+) \Delta_j \tilde{u}_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle + \text{Re}\langle i\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_-) \Delta_j \tilde{u}_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle \\ + \text{Re}\langle i[\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+)] \tilde{\Delta}_j \tilde{u}_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle \\ + \text{Re}\langle i[\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_-)] \tilde{\Delta}_j \tilde{u}_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle \\ + \frac{1}{t} \text{Re}\langle i\Delta_j f_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle + \frac{1}{t} \text{Re}\langle i\Delta_j f_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{t} \operatorname{Re} \langle i \Delta_j \operatorname{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1) \tilde{\Delta}_j \tilde{u}_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle \\
& + \frac{1}{t} \operatorname{Re} \langle i \Delta_j \operatorname{Op}^{\mathcal{B}}(\tilde{K}_1) \tilde{\Delta}_j \tilde{u}_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle.
\end{aligned}$$

Il est prouvé au haut de la page 50 de [1] que la somme des quatre premiers termes du membre de droite se majore par

$$\frac{C}{t^{1+\nu}} (\|\Delta_j \tilde{U}\| + \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}\|) \|\Delta_j \tilde{U}\|.$$

D'autre part, la somme des deux derniers termes de (3.9') s'estime par

$$\frac{\Omega}{t} \frac{2^j}{t} \left(1 + \frac{2^j}{t}\right)^{-1} \|\Delta_j \tilde{U}\| \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}\|$$

puisque $\tilde{K}_1 \in S_1^0$, la constante Ω ne dépendant que des semi-normes de \tilde{K}_1 , donc de la norme L^∞ de la fonction $K(x) = \kappa \operatorname{th}(\kappa x)$ qui a permis de le construire. Intégrant la relation (3.9'), on obtient, quitte à modifier les constantes

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j \tilde{U}(t, \cdot)\| & \leq \|\Delta_j \tilde{U}(T_0, \cdot)\| + \Omega \int_{T_0}^t \frac{2^j}{\tau} \left(1 + \frac{2^j}{\tau}\right)^{-1} \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}(\tau, \cdot)\| \frac{d\tau}{\tau} \\
& + C \int_{T_0}^t (\|\Delta_j \tilde{U}(\tau, \cdot)\| + \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}(\tau, \cdot)\|) \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu}} + C \int_{T_0}^t \|\Delta_j f(\tau, \cdot)\| \frac{d\tau}{\tau}.
\end{aligned}$$

Nous appliquons le lemme E.2.2 avec

$$\begin{aligned}
m_j(t) & = \|\Delta_j \tilde{U}(t, \cdot)\|, \quad \tilde{m}_j(t) = \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}(t, \cdot)\|, \\
d_j(t) & = \|\Delta_j f(t, \cdot)\| + \frac{1}{t^\nu} (m_j(t) + \tilde{m}_j(t)).
\end{aligned}$$

Alors $\mu(\theta, t) \sim \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H^\theta}$ et (E.2.5) s'écrit

$$\begin{aligned}
\text{(E.2.8)} \quad \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H^{s+s'}} & \leq C t^{\Omega'} \left[\|\tilde{U}(T_0, \cdot)\|_{H^{s+s'}} \right. \\
& \left. + \int_{T_0}^t \left(\|f(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'}} + \frac{1}{\tau^\nu} \|\tilde{U}(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1+\Omega'}} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(E.2.9)} \quad \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H^{s-\alpha}} & \leq C \left[\|\tilde{U}(T_0, \cdot)\|_{H^{s+s'}} \right. \\
& \left. + \sum_{\ell'=0}^{\ell+1} \int_{T_0}^t \left(\|f(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'-\ell'}} + \frac{1}{\tau^\nu} \|\tilde{U}(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'-\ell'}} \right) \tau^{-s'+\ell'} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \right].
\end{aligned}$$

Nous multiplions (E.2.8) par $t^{-s'}$. Nous obtenons

$$(E.2.10) \quad t^{-s'} \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H^{s+s'}} \leq C \left[\|\tilde{U}(T_0, \cdot)\|_{H^{s+s'}} t^{\Omega' - s'} + \int_{T_0}^t \left(\|f(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'}} + \frac{1}{\tau^\nu} \|\tilde{U}(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'}} \right) \tau^{-s'} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\Omega' - s'} \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

D'autre part, par interpolation entre les deux contributions à (E.2.1),

$$\|f(\tau, \cdot)\|_{H^{s+s'-\ell'}} \leq C \tau^{s'-\ell'} \|f(\tau, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)}$$

si $0 \leq \ell' \leq \ell + 1 = s' + \alpha$, et de même en remplaçant f par \tilde{U} . Nous déduisons alors de (E.2.9)

$$(E.2.11) \quad t^\alpha \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H^{s-\alpha}} \leq C \left[\|\tilde{U}(T_0, \cdot)\|_{H^{s+s'}} t^\alpha + \int_{T_0}^t \left(\|f(\tau, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} + \frac{1}{\tau^\nu} \|\tilde{U}(\tau, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} \right) \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

Sommant (E.2.10) et (E.2.11) et utilisant le lemme E.2.1, on obtient puisque $\Omega' - s' < \alpha < 0$

$$(E.2.12) \quad \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(t)} \leq C \left[\|\tilde{U}(T_0, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(T_0)} + \int_{T_0}^t \left(\|f(\tau, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} + \frac{1}{\tau^\nu} \|\tilde{U}(\tau, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} \right) \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

D'après l'expression (3.4') de f_\pm , le corollaire 2.3(i) de [1], et les inégalités (2.62') et (2.63)

$$\begin{aligned} \|f(\tau, \cdot)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} &\leq C \left[\|U(\tau, \cdot)\|_{E_\alpha^{s,s'}(\tau)}^3 + \|S_0^{\pm}(\tau, U)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} + t^{-\nu} \|S_1^{\pm}(\tau, U)\|_{H_\alpha^{s,s'}(\tau)} \right] \\ &\leq C \left[\|U(\tau, \cdot)\|_{E_\alpha^{s,s'}(\tau)}^2 + t^{-\nu} \|U(\tau, \cdot)\|_{E_\alpha^{s,s'}(\tau)} \right], \end{aligned}$$

utilisant que $U(t, \cdot)$ reste dans un borné de $E_\alpha^{s,s'}(t)$. Reportant cette inégalité dans (E.2.12) et utilisant la formule (3.11) de [1], on déduit de (E.2.12) l'estimation (3.5'), avec $\tilde{\nu} = \nu + \alpha > 0$ si α est assez proche de 0. \square

Pour terminer la preuve du théorème 1.2, il nous reste à reprendre la démonstration du lemme 3.7 de [1], en utilisant la version précisée de la proposition 3.1 que nous venons d'établir. Posons $N(t) = \sup_{[T_0, t]} \|U(t', \cdot)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t')}$ et ajoutons l'inégalité (3.5') et l'estimation L^∞ donnée par la formule (3.12) de [1]. Nous obtenons

$$N(t) \leq C \left[N(T_0) + N(t)^2 + \int_{T_0}^t N(\tau)^2 \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \frac{d\tau}{\tau} + \int_{T_0}^t N(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1+\tilde{\nu}}} \right]$$

pour un $\tilde{\nu} > 0$. Comme $\alpha < 0$ et que N est croissante, nous pouvons absorber le terme en $\int_{T_0}^t N(\tau)^2 \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \frac{d\tau}{\tau}$ par le terme en $N(t)^2$. Nous pouvons alors appliquer sans danger l'inégalité de Gronwall pour obtenir la formule (3.28) de [1]

$$N(t) \leq C' [N(T_0) + N(t)^2].$$

La fin de la preuve du lemme 3.7 de [1] s'applique alors sans changement, ce qui établit ce lemme et le théorème 1.2.

RÉFÉRENCES

- [1] DELORT J.-M., Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **34** (1) (2001) 1–61.
- [2] DELORT J.-M., FANG D., XUE R., Global existence of small solutions for quadratic quasilinear Klein–Gordon systems in two space dimensions, *J. Funct. Anal.* **211** (2) (2004) 288–323.
- [3] LINDBLAD H., SOFFER A., A remark on Long Range Scattering for the critical nonlinear Klein–Gordon equation, *J. Hyperbolic Differ. Equations* **2** (1) (2005) 77–89.
- [4] LINDBLAD H., SOFFER A., A remark on asymptotic completeness for the critical nonlinear Klein–Gordon equation, *Lett. Math. Phys.* **73** (3) (2005) 249–258.
- [5] SUNAGAWA H., Large time behavior of solutions to the Klein–Gordon equation with nonlinear dissipative terms, Preprint, 2004.

(Manuscrit reçu le 29 septembre 2005;
accepté le 17 janvier 2006.)

Jean-Marc DELORT
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications,
UMR CNRS 7539,
Institut Galilée,
Université Paris-Nord,
99, Avenue J.-B. Clément,
F-93430 Villetaneuse, France
E-mail : delort@math.univ-paris13.fr