

## CŒUR ET NOMBRE D'INTERSECTION POUR LES ACTIONS DE GROUPES SUR LES ARBRES

PAR VINCENT GUIRADEL

---

RÉSUMÉ. – On construit une sorte de *cœur convexe* pour le produit de deux actions d'un groupe sur des arbres réels. Cette construction géométrique généralise et unifie le nombre d'intersection de deux courbes ou de deux feuilletages mesurés sur une surface, le nombre d'intersection de Scott de deux scindements, et l'apparition de surfaces dans la construction du scindement JSJ de Fujiwara–Papasoglu. En particulier, cette construction donne une interprétation topologique du nombre d'intersection analogue à la définition du nombre d'intersection de deux courbes sur une surface. Comme application, on démontre qu'un automorphisme irréductible du groupe libre dont les arbres stables et instables sont géométriques est en fait induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface.

© 2005 Elsevier SAS

ABSTRACT. – We present the construction of a kind of *convex core* for the product of two actions of a group on  $\mathbb{R}$ -trees. This geometric construction allows one to generalize and unify the intersection number of two curves or of two measured foliations on a surface, Scott's intersection number of two splittings, and the appearance of surfaces in Fujiwara–Papasoglu's construction of the JSJ splitting. In particular, this construction allows a topological interpretation of the intersection number analogous to the definition for curves in surfaces. As an application of this construction, we prove that an irreducible automorphism of the free group whose stable and unstable trees are geometric, is actually induced by a pseudo-Anosov homeomorphism of a surface.

© 2005 Elsevier SAS

Soient  $\Sigma$  une surface fermée et  $c_1, c_2$  deux classes d'isotopie de courbes fermées simples. Soit  $i(c_1, c_2)$  leur nombre d'intersection géométrique. Ce nombre est nul si et seulement si on peut isotoper les deux courbes de manière à ce qu'elles soient disjointes. En termes de scindements en produit amalgamé ou extension HNN,  $i(c_1, c_2) = 0$  si et seulement si les deux scindements de  $\pi_1(\Sigma)$  définis par  $c_1$  et  $c_2$  sont *compatibles*, i.e. ont un raffinement commun (voir section 1.1).

Dans [19] (voir aussi [20,21]), Scott a généralisé cette notion de nombre d'intersection à une paire quelconque de scindements d'un groupe de type fini  $G$ . Ce nombre d'intersection est symétrique en les deux scindements. De plus, si les groupes d'arêtes des deux scindements sont de type fini, ce nombre d'intersection est fini, et il s'annule si et seulement si les deux scindements sont compatibles.

D'après la théorie de Bass–Serre, deux scindements d'un groupe  $G$  en graphes de groupes correspondent à deux actions de  $G$  sur des arbres simpliciaux  $T_1, T_2$  (voir [22]). Cet article introduit une construction géométrique d'une sorte de *cœur convexe* pour l'action diagonale de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  qui permet de retrouver le nombre d'intersection des scindements correspondants. Grâce à sa nature géométrique, cette construction se généralise naturellement dans le cadre des arbres réels. La convexité en question ici n'est pas la convexité CAT(0), car elle définirait un

cœur beaucoup trop gros. La notion utile dans ce contexte est la *convexité par fibres* : un sous-ensemble  $E \subset T_1 \times T_2$  est à fibres convexes si pour  $i \in \{1, 2\}$  et pour tout  $x \in T_i$ ,  $E \cap p_i^{-1}(x)$  est convexe (où  $p_i : T_1 \times T_2 \rightarrow T_i$  est la projection canonique).

**THÉORÈME PRINCIPAL.** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions minimales d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres réels. On suppose que les fonctions longueurs de  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas homothétiques, ou que l'un au moins des arbres est irréductible. On suppose aussi que  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas des raffinements d'un arbre simplicial commun.

Alors il existe un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset T_1 \times T_2$  qui est le plus petit sous-ensemble non vide fermé invariant qui soit connexe et à fibres convexes. De plus,  $\mathcal{C}$  est CAT(0) pour la distance de longueur induite, et  $T_1 \times T_2$  se rétracte par déformation forte de manière équivariante sur  $\mathcal{C}$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  le cœur de  $T_1 \times T_2$ .

Par définition,  $\mathcal{C}$  est unique ; il est donc invariant sous l'action des automorphismes des actions de  $G$  sur  $T_1$  et  $T_2$ .

Les hypothèses du théorème principal sont très générales, et l'énoncé donné ci-dessus n'est pas optimal pour des raisons de simplicité (voir la proposition 5.1 et le corollaire 5.2 pour plus de détails). Si  $T_1$  et  $T_2$  sont duaux à un produit amalgamé ou à une extension HNN, l'hypothèse que  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas des raffinements d'un même arbre simplicial est vraie dès que les fonctions longueur de  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas homothétiques. Sans ces hypothèses, on peut toujours donner une construction d'un ensemble  $\mathcal{C}$ , mais deux pathologies peuvent se présenter :  $\mathcal{C}$  peut être vide, et il peut ne pas être connexe. On donne des caractérisations simples de ces pathologies (voir les sections 3 et 4). On peut remédier à la non connexité de  $\mathcal{C}$  : il existe un sous-ensemble canonique  $\widehat{\mathcal{C}}$  (le cœur augmenté) contenant  $\mathcal{C}$ , qui est connexe et à fibres connexes (voir section 4.4).

On définit ensuite le nombre d'intersection de  $T_1$  et  $T_2$  comme le covolume de  $\mathcal{C}$  (voir la définition 2.3). Si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux arbres simpliciaux munis de leur distance combinatoire, ce covolume est simplement le nombre d'orbites de 2-cellules de  $\mathcal{C}$ . Dans le cas où l'action de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  n'est pas discrète, l'utilité de la définition du nombre d'intersection n'est pas claire. Notons cependant qu'il y a des cas intéressants où l'action de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  est discrète alors que l'action de  $G$  sur chacun des deux arbres ne l'est pas (voir par exemple l'application aux automorphismes du groupe libre en section 9).

La construction du cœur étant symétrique par définition, on a immédiatement que  $i(T_1, T_2) = i(T_2, T_1)$ . Par contre, la symétrie du nombre d'intersection de Scott est un fait non trivial qui ne découle pas directement de sa définition.

Dans le cas simplicial, la nullité du nombre d'intersection correspond à la compatibilité des scindements. Dans le cas général (en particulier si l'action de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  n'est pas discrète), la bonne notion est plutôt le fait que  $\mathcal{C}$  est de dimension 1, c'est-à-dire ne contient pas le produit  $I_1 \times I_2$  de deux arcs non dégénérés :

**THÉORÈME 6.1** (Voir aussi [20]). – Soient  $T_1, T_2$  deux actions minimales de  $G$  sur des arbres réels telles que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$ .

Alors,  $T_1$  et  $T_2$  ont un raffinement commun si et seulement si  $\mathcal{C}$  est de dimension 1.

La preuve de ce résultat est très naturelle car dans ce cas, le cœur lui-même est un arbre réel qui est un raffinement commun de  $T_1$  et  $T_2$ .

Notre construction du cœur et du nombre d'intersection généralise et unifie plusieurs notions :

*Le nombre d'intersection des courbes et le nombre d'intersection de Scott.* Notre définition du nombre d'intersection coïncide avec le nombre d'intersection géométrique de deux courbes fermées simples sur une surface et avec le nombre d'intersection de Scott (exemple 3, section 2.2 et section 10). Cependant, contrairement à Scott, notre approche ne permet pas de

traiter les ensembles presque-invariants puisqu'on a besoin de partir d'actions sur des arbres. Mais il est probable que l'on puisse faire une théorie similaire pour les complexes cubiques de Sageev [18,17].

*Nombre d'intersection de feuilletages mesurés.* Étant donnés deux feuilletages mesurés transverses  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  sur une surface  $\Sigma$ , il y a un nombre d'intersection bien défini  $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  qui est le volume de la métrique euclidienne singulière sur  $\Sigma$  définie par les mesures transverses de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  (voir par exemple [5]). Le nombre d'intersection des actions de  $\pi_1(\Sigma)$  sur les arbres réels duaux à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  coïncide avec  $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  (voir exemple 4, section 2.3).

*Le cœur de Culler–Levitt–Shalen.* Étant donnés deux arbres  $T_1, T_2$  duaux à des feuilletages mesurés transverses sur une surface  $\Sigma$ ,  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$  est une surface qui est naturellement isomorphe au revêtement universel de  $\Sigma$ , muni de sa métrique euclidienne singulière. Dans ce cas, Culler–Levitt–Shalen ont caractérisé cette surface comme le plus petit sous-ensemble invariant simplement connexe de  $T_1 \times T_2$  [7].

*Le scindement JSJ de Fujiwara–Papasoglu.* Dans leur construction du scindement JSJ, Fujiwara et Papasoglu produisent une surface dans le produit de deux arbres simpliciaux [10]. Cette surface coïncide avec le cœur (proposition 12.1). Dans un contexte plus général, leur construction n'est pas symétrique en  $T_1$  et  $T_2$  et produit un cœur asymétrique (voir section 11).

En général, ce cœur asymétrique est fortement relié au nombre d'intersection fort (asymétrique) de Scott et Swarup : le nombre d'intersection fort est le nombre d'orbites de 2-cellules dans le cœur asymétrique (corollaire 11.4).

Une première application de notre construction est une interprétation topologique du nombre d'intersection analogue à la définition du nombre d'intersection de deux courbes sur une surface : le nombre d'intersection de deux scindements est essentiellement le nombre minimal de composantes connexes de  $Y_1 \cap Y_2$  où  $Y_1, Y_2$  sont deux sous-complexes d'un complexe  $X$  représentant les deux scindements considérés.

**THÉORÈME 7.1.** – *Soient  $Y_1, Y_2 \subset X$  deux sous-complexes à deux côtés qui s'intersectent transversalement. Soient  $T_1, T_2$  les arbres duaux munis de l'action du groupe  $G = \pi_1(X)$ . Alors*

$$i(T_1, T_2) \leq \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2).$$

*De plus, étant données deux actions non triviales d'un groupe sur des arbres simpliciaux  $T_1, T_2$ , il existe un complexe  $X$  et  $Y_1, Y_2 \subset X$  deux sous-complexes à deux côtés s'intersectant transversalement tels que  $T_i$  soit dual à  $Y_i \subset X$  et*

$$i(T_1, T_2) = \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2).$$

Le nombre d'intersection de deux courbes fermées simples sur une surface  $X$  peut être atteint sans changer l'espace ambiant  $X$ . Dans [8, Th. 6.7], ce résultat a été étendu à des scindements duaux à des tores ou à des bouteilles de Klein dans une variété de dimension 3 en montrant que le nombre d'intersection de deux telles surfaces coïncide avec le nombre de courbes d'intersection de deux surfaces minimales représentant les surfaces considérées. Cependant, en général, il peut être nécessaire de changer l'espace ambiant  $X$  pour réaliser géométriquement le nombre d'intersection.

Une question naturelle à propos du cœur est sa cocompacité. Dans [19], Scott démontre que le nombre d'intersection de deux scindements d'un groupe de type fini au-dessus de groupes de

type fini est fini. Cependant, il y a des exemples de scindements d'un groupe de présentation finie (un groupe libre) au-dessus de groupes non de type fini qui ont un nombre d'intersection infini (voir le lemme 8.4). Ceci répond à une question de Scott et Swarup [20].

En termes d'actions de groupes sur des arbres, le fait que les groupes d'arêtes d'un scindement soient de type fini signifie plus géométriquement que les arbres de Bass–Serre correspondant sont *géométriques*, c'est-à-dire duaux à des feuilletages mesurés sur des 2-complexes finis [15].

Dans ce cadre, on obtient le critère de finitude suivant :

**THÉORÈME 8.1.** – *Soient  $T_1, T_2$  deux actions géométriques d'un groupe de type fini sur des arbres réels.*

*Alors il existe un sous-ensemble  $D \subset T_1 \times T_2$  qui est la réunion d'un nombre fini de rectangles compacts, tel que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \subset \overline{G.D}$ .*

Ceci n'implique pas la cocompacité en général à cause de la nécessité de prendre l'adhérence de  $G.D$ . Cependant, si  $T_1$  et  $T_2$  sont simpliciaux,  $G.D$  est automatiquement fermé, ce qui montre donc que le cœur est cocompact et que  $i(T_1, T_2)$  est fini (corollaire 8.2). On peut aussi en déduire que le nombre d'intersection de deux actions géométriques d'un groupe de *présentation finie* est fini (proposition 8.3).

Finalement, nous donnons une application aux automorphismes du groupe libre. L'argument central consiste à démontrer que le cœur du produit des arbres stable et instable est essentiellement une surface. Ce résultat a été obtenu indépendamment par Handel et Mosher par d'autres méthodes [12].

**COROLLAIRE 9.3.** – *Soit  $\alpha \in \text{Out}(F_n)$  un automorphisme complètement irréductible. Soient  $T_1, T_2$  les arbres stable et instable correspondant à  $\alpha$ .*

*Si  $T_1$  et  $T_2$  sont tous deux géométriques, alors  $\alpha$  est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord.*

L'organisation du papier est la suivante. Les définitions de base et les préliminaires sont en section 1. La définition générale du cœur est donnée en section 2. En section 3, on étudie les cas où le cœur est vide, et on donne une condition nécessaire et suffisante. En section 4, on démontre que le cœur est contractile dès qu'il est connexe, et on prouve qu'il est connexe dès que  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas des raffinement d'un même arbre simplicial. De plus, quand le cœur n'est pas connexe, on explicite une façon canonique de l'agrandir pour obtenir un cœur augmenté  $\hat{\mathcal{C}}$  qui est contractile, à fibres convexes. On démontre aussi la propriété  $\text{CAT}(0)$  à la fin de cette section. En section 5, on démontre la caractérisation du cœur comme plus petit fermé invariant connexe à fibres convexes. On démontre que la nullité du nombre d'intersection est essentiellement équivalente à la compatibilité des arbres en section 6. La section 7 contient l'interprétation topologique du nombre d'intersection de deux scindements. La section 8 est consacrée au résultat de finitude pour le cœur d'actions géométriques. L'application aux automorphismes du groupe libre est contenue en section 9. L'égalité avec le nombre d'intersection de Scott est traitée en section 10. En section 11, on introduit le cœur asymétrique de Fujiwara–Papasoglu et on le relie au nombre d'intersection fort de Scott et Swarup. Finalement, la section 12 donne une condition similaire à celle de Fujiwara et Papasoglu impliquant que le cœur asymétrique coïncide avec le cœur.

Ce papier a été très inspiré par les travaux de Scott et Swarup sur les nombres d'intersection [19,20]. La construction du cœur est issue d'une tentative de comprendre géométriquement leur définition. Une version du papier en anglais est disponible sur arxiv [11].

## 1. Définitions et préliminaires

### 1.1. Vocabulaire de base

Un *arbre réel* est un espace métrique dans lequel toute paire de points distincts est reliée par un unique arc (c'est-à-dire homéomorphe à  $[0, 1]$ ), et cet arc est en fait une géodésique. De manière équivalente, un arbre réel est un espace métrique géodésique qui ne contient aucun cercle topologique plongé. La géodésique joignant deux points  $a, b$  est notée  $[a, b]$ . On dit aussi que  $[a, b]$  est un segment. Un *intervalle* d'un arbre réel est un sous-ensemble isométrique à un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}$  (pas forcément borné, ni fermé). Dans un arbre réel, un sous-ensemble est connexe si et seulement s'il est convexe ; un tel sous-ensemble est un *sous-arbre*. Un sous-arbre est *non dégénéré* s'il contient une infinité de points. Le *pont* entre deux sous-arbres disjoints non vides est le segment défini comme l'intersection de tous les segments reliant un sous-arbre à l'autre.

Un arbre simplicial  $T$  (i.e. un graphe connexe et simplement connexe) peut être muni de sa *distance combinatoire* qui donne la longueur 1 à chacune de ses arêtes. Cette distance fait de  $T$  un arbre réel, appelé par abus *arbre simplicial* (combinatoire). Plus généralement, on peut attribuer une longueur strictement positive à chacune des arêtes de  $T$  et obtenir un arbre réel. Un tel arbre réel sera appelé *arbre simplicial métrique*.

Soit  $T$  un arbre réel. Une *direction* en un point  $x \in T$  est une composante connexe de  $T \setminus \{x\}$ . Notons que  $y, z$  sont dans la même direction issue de  $x$  si et seulement si  $[x, y]$  et  $[x, z]$  partagent un segment initial commun non dégénéré (i.e. non réduit à un point). Un *point de branchement* de  $T$  est un point duquel sont issues au moins 3 directions.

Un *rayon* de  $T$  est un plongement isométrique de  $\mathbb{R}_+$  dans  $T$ . Un *bout* de  $T$  est une classe d'équivalence de rayons pour la relation *être à distance de Hausdorff finie*. Si  $S$  est un sous-arbre de  $T$  (une direction par exemple), on notera  $\partial_\infty S \subset \partial_\infty T$  l'ensemble des bouts de  $S$ .

Un *scindement* d'un groupe  $G$  est la donnée d'un isomorphisme entre  $G$  et le groupe fondamental d'un graphe de groupes. Un scindement de  $G$  comme amalgame ou extension HNN sera appelé *scindement à une arête*.

Une isométrie d'un arbre réel est *elliptique* si elle a un point fixe. Dans ce cas, l'ensemble de ses points fixes est un sous-arbre. Sinon, elle est *hyperbolique*, et elle a un axe sur lequel elle agit par translation. Si  $h, h'$  sont deux isométries hyperboliques dont les axes se rencontrent en un intervalle non dégénéré  $I = [a, b]$ , on dit que  $h$  et  $h'$  *translatent dans la même direction* si pour tout  $c \in ]a, b[$ ,  $c \notin [h(c), h'(c)]$ . On note  $\text{Axe}_T(h)$  l'axe d'une isométrie hyperbolique (c'est-à-dire non elliptique)  $h$  de  $T$ . Un *demi-axe positif* de  $h$  est un rayon  $A \subset \text{Axe}(h)$  tel que  $h.A \subset A$ . Si  $h$  est une isométrie hyperbolique de  $T$ , on note  $\omega_T(h)$  le bout de  $T$  défini par un quelconque de ses demi-axes positifs.

Un groupe  $G$  agissant sur un arbre réel  $T$  est *elliptique* s'il fixe un point de  $T$ . Une action d'un groupe  $G$  sur  $T$  est dite *triviale* si chacun des éléments de  $G$  est elliptique. Cette terminologie n'est pas tout à fait standard car la convention usuelle est de dire qu'une action est triviale si elle a un point fixe. Cependant, pour un groupe de type fini, l'action est triviale si et seulement si elle a un point fixe. C'est une conséquence du lemme de Serre qui dit que si  $S$  est un ensemble fini d'isométries elliptiques tel que pour tout  $a, b \in S$ ,  $ab$  soit elliptique, alors les éléments de  $S$  ont un point fixe commun. En général, si l'action de  $G$  est triviale mais pas elliptique, alors  $G$  fixe un point du complété de  $T$ , ou un bout de  $T$ . Toutes les actions de  $G$  considérées seront supposées non triviales.

Une action de  $G$  sur un arbre réel  $T$  est *minimale* si  $T$  n'a pas de sous-arbre invariant propre. Quand l'action est non triviale, il y a un unique sous-ensemble  $G$ -invariant minimal non vide,

c'est la réunion des axes de translation des éléments hyperboliques de  $G$ . Ce sous-arbre minimal est noté  $\min_T(G)$ .

On note  $l_T(g) = \min\{d(x, g.x) \mid x \in T\}$  la longueur de translation d'un élément  $g \in G$ . Considérons une action non triviale d'un groupe de type fini  $G$  sur un arbre réel  $T$ . L'action est dite *abélienne* s'il existe un morphisme  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $l_T(g) = |\varphi(g)|$ . De manière équivalente, une action est abélienne si et seulement si  $G$  fixe un bout de  $T$ . L'action est dite *diédrale* si  $T$  contient une droite  $G$ -invariante sur laquelle un élément agit par réflexion. L'action est dite *irréductible* si elle n'est ni abélienne, ni diédrale ; c'est le cas si et seulement s'il existe deux éléments hyperboliques dont les axes ont une intersection compacte (ou vide).

Un *morphisme d'arbres réels* est une application 1-lipschitzienne  $f: T \rightarrow T'$  telle que tout arc  $I \subset T$  puisse être subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles de sorte que  $f$  soit un plongement isométrique en restriction à chacun d'eux.

Une application *préservant l'alignement* est une application continue  $f: T \rightarrow T'$  telle que  $x \in [y, z]$  implique  $f(x) \in [f(y), f(z)]$ .

LEMME 1.1. – Soit  $f: T \rightarrow T'$  une application continue. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (1)  $f$  préserve l'alignement ;
- (2) l'image réciproque d'un convexe est convexe ;
- (3) l'image réciproque d'un point est connexe.

*Démonstration.* – Clairement, (1) implique (2) qui implique (3). Supposons donc (3). Soit  $x \in [y, z]$ , et supposons que  $f(x) \notin [f(y), f(z)]$ . Soit  $p$  le point de  $[f(y), f(z)]$  le plus proche de  $f(x)$ . Soit  $y' \in [y, x]$  un point tel que  $f(y') = p$  ( $y'$  existe parce que si  $p \neq f(y)$ ,  $p$  sépare  $f(x)$  de  $f(y)$ ). On définit  $z' \in [z, x]$  de manière analogue. On a  $y', z' \in f^{-1}(p)$  et  $x \notin f^{-1}(p)$ , ce qui contredit la connexité de  $f^{-1}(p)$ .

La notion suivante de raffinement généralise aux arbres réels la notion habituelle de raffinement d'un scindement.

DÉFINITION 1.2 (*Raffinement*). – Soient  $T, T'$  deux arbres réels munis d'actions de  $G$ . On dit que  $T$  est un *raffinement* de  $T'$  s'il existe une application équivariante préservant l'alignement de  $T$  vers  $T'$ .

## 1.2. Énoncés techniques de minimalité

Dans ce qui suit, étant donné  $A \subset G$ , on note  $\langle A \rangle$  le groupe engendré par  $A$ .

LEMME 1.3. – Considérons une action d'un groupe  $G$  sur un arbre réel  $T$ , et  $S \subset G$  un semi-groupe de type fini agissant non trivialement sur  $T$  de sorte que le sous-arbre minimal  $\langle S \rangle$ -invariant ne soit pas une droite. Soit  $I$  un arc contenu dans l'axe d'un élément hyperbolique  $h \in S$ .

Alors, il existe un semi-groupe de type fini  $S' \subset S$  tel que

- $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ ,
- tout élément  $g \in S' \setminus \{1\}$  est hyperbolique dans  $T$ , son axe contient  $I$ , et  $g$  translate dans la même direction que  $h$ .

COROLLAIRE 1.4. – Soient  $T_1, T_2$  deux actions non triviales d'un groupe  $G$  sur un arbre réel telles que le sous-arbre minimal de  $T_i$  soit dense dans  $T_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Alors, pour toute direction  $\delta_1$  de  $T_1$ , il existe un élément  $h$  qui est hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$  ayant un demi-axe positif contenu dans  $\delta_1$ .

*Preuve.* – Supposons d'abord que  $T_1$  contienne une droite invariante, ce qui implique que  $T_1$  est une droite et que  $\delta_1$  est une demi-droite. Soit  $G_+$  le sous-groupe d'indice au plus 2 de  $G$  dont tous les éléments préservent l'orientation. Soit  $G_0 \triangleleft G_+$  le noyau de l'action sur  $T_1$ . Les éléments de  $G_+ - G_0$  sont hyperboliques dans  $T_1$ . Supposons que tous ces éléments soient elliptiques dans  $T_2$ . Soit  $h \in G_0$  hyperbolique dans  $T_2$ , et  $g \in G_+ - G_0$ . Les éléments  $g, hgh^{-1}$  et leur produit  $g.hgh^{-1}$  ne sont pas dans  $G_0$  et sont donc elliptiques dans  $T_2$ . Donc  $g$  et  $hgh^{-1}$  ont un point fixe commun dans  $T_2$ , et  $g$  fixe un intervalle non trivial dans l'axe de  $h$ . On en déduit que  $gh \notin G_0$  est hyperbolique dans  $T_2$  (voir le fait 1.5 ci-dessous), contradiction. On a donc trouvé un élément  $h'$  hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$ . Quitte à changer  $h'$  en  $h'^{-1}$ , ceci prouve le corollaire.

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas de droite invariante dans  $T_1$ . Par densité,  $\delta_1$  intersecte le sous-arbre minimal de  $T_1$ . Soit  $I_1$  un arc non dégénéré contenu dans l'intersection de  $\delta_1$  avec l'axe d'un élément  $h \in G$  hyperbolique dans  $T_1$ . Quitte à changer  $h$  en  $h^{-1}$ , on peut supposer que  $\omega_{T_1}(h) \in \partial_\infty \delta_1$ . Puisque  $T_1$  n'a pas de droite invariante, il existe  $h' \in G$  dont l'axe dans  $T_1$  est distinct de celui de  $h$ . Soit  $h_2 \in G$  un élément hyperbolique dans  $T_2$ .

En appliquant le lemme 1.3 dans  $T_1$  à  $S = \langle h, h', h_2 \rangle$ ,  $I_1$  et  $h$ , on obtient un semi-groupe  $S'$  tel que  $\langle S' \rangle = S$  et dont les éléments sont hyperboliques dans  $T_1$ , dont les axes contiennent  $I_1$ , et qui translatent dans la même direction que  $h$ . Ceci implique que pour tout  $g \in S'$ ,  $\omega_{T_1}(g) \in \partial_\infty(\delta_1)$ . Puisque  $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$ , le lemme de Serre implique que  $S'$  contient au moins un élément hyperbolique dans  $T_2$ . □

*Preuve du lemme 1.3.* – Soit  $A$  un ensemble fini engendrant  $S$  comme semi-groupe, et contenant l'élément hyperbolique  $h$ . On va modifier  $A$  de sorte qu'à chaque étape, le semi-groupe engendré par  $A$  décroisse, mais que  $\langle A \rangle$  reste constant.

**Étape 1 : remplacer  $A$  par des éléments hyperboliques.** On veut remplacer  $A$  par un ensemble dont tous les éléments sont hyperboliques. La preuve du fait suivant est laissée au lecteur (le cas où l'intersection est vide est prouvé dans [6, Lem. 3.2.2]) :

FAIT 1.5. – Soient  $a, b$  deux isométries d'un arbre réel  $T$ , avec  $b$  hyperbolique, et  $a$  elliptique. Si  $\#(\text{Fix } a \cap \text{Axe}(b)) \neq 1$ , alors  $ab$  est hyperbolique.

S'il existe  $a \in A$  elliptique et  $b \in A$  hyperbolique avec  $\#(\text{Fix } a \cap \text{Axe}(b)) \neq 1$ , on modifie  $A$  en remplaçant  $a$  par  $ab$ . Si  $\#(\text{Fix } a \cap \text{Axe}(b)) = 1$  pour tout  $a \in A$  elliptique et tout  $b \in A$  hyperbolique, c'est plus délicat.

**Cas 1 :** il existe  $a \in A$  elliptique et  $b \in A$  hyperbolique tels que  $a.\text{Axe}(b) \neq \text{Axe}(b)$ .

**Sous-cas 1.a :**  $a.\omega_T(b) \neq \omega_T(b^{-1})$ . Dans ce cas, on vérifie facilement que  $b^k a$  est hyperbolique pour  $k \geq 0$  assez grand ; on remplace alors  $a$  par  $b^k a$  dans  $A$ .

**Sous-cas 1.b :**  $a.\omega_T(b) = \omega_T(b^{-1})$ . On a alors  $a^2.\omega_T(b) \neq \omega_T(b^{-1})$  et  $a^3.\omega_T(b) \neq \omega_T(b^{-1})$ .

On remplace  $a$  par  $\{a^2, a^3\}$  dans  $A$ , ce qui permet de conclure puisque  $a^2$  et  $a^3$  ou bien satisfont le sous-cas 1.a, ou bien fixent un demi-axe de  $b$  auquel cas le fait 1.5 s'applique.

**Cas 2 :** pour tout élément elliptique  $a \in A$  et tout élément hyperbolique  $b \in A$ ,  $a.\text{Axe}(b) = \text{Axe}(b)$ . Puisque  $\langle S \rangle$  n'a pas de droite invariante, les éléments hyperboliques de  $A$  ne peuvent pas tous avoir le même axe. Soient donc  $b, b' \in A$  dont les axes sont distincts. Alors  $b^k a$  et  $ab^k$  agissent sur l'axe de  $b$  comme des réflexions pour tout  $k$ , et quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , leurs points fixes convergent respectivement vers  $\omega_T(b)$  et  $\omega_T(b^{-1})$ . On en déduit qu'au moins un de ces points fixes n'est pas sur l'axe de  $b'$ . D'après le fait 1.5 ci-dessus, au moins un des éléments  $b'(b^k a)$ ,  $b'(ab^k)$  est hyperbolique, et on peut alors modifier  $A$  en remplaçant  $a$  par cet élément.

**Étape 2 : remplacer  $A$  par un ensemble cohérent d'éléments hyperboliques.** On veut maintenant que l'axe de chaque élément de  $A$  contienne  $I$ , et translate dans le même sens que  $h$ . Le lemme en découlera puisque si  $g_1, g_2$  satisfont cette propriété, il en est de même de  $g_1 g_2$ .

Si aucun élément de  $a$  n'envoie  $\omega_T(h)$  sur  $\omega_T(h^{-1})$ , le résultat découle directement du fait suivant. Si  $a.\omega_T(h) = \omega_T(h^{-1})$ , alors  $a^2\omega_T(h)$  et  $a^3\omega_T(h)$  sont tous deux distincts de  $\omega_T(h^{-1})$ , et on peut remplacer  $\{a\}$  par  $\{a^2, a^3\}$  dans  $A$  puis conclure avec le fait suivant.  $\square$

**FAIT.** – Soient  $h, a$  des éléments hyperboliques tels que  $a.\omega_T(h) \neq \omega_T(h^{-1})$ , et  $I$  un arc contenu dans  $\text{Axe}(h)$ .

Alors pour  $k \geq 0$  assez grand,  $h^k a h^k$  est hyperbolique d'axe contenant  $I$ , et il translate dans la même direction que  $h$ .

*Démonstration.* – Le fait est évident si  $a$  et  $h$  ont le même axe.

Si  $a$  fixe  $\omega_T(h)$ , alors pour tout  $p \in \text{Axe}(h)$ ,  $h^k.p$ ,  $a h^k.p$ , et  $h^k a h^k.p$  sont sur  $\text{Axe}(h)$  pour  $k$  assez grand, et le fait en découle facilement. Sinon, l'hypothèse signifie que si  $p$  est assez loin sur un demi-axe positif de  $h$ , alors  $a.p \notin \text{Axe}(h)$ . Le résultat en découle.  $\square$

## 2. Définition principale et exemples

### 2.1. Quadrants légers et cœur

Rappelons qu'une *direction* basée en un point  $x \in T$  est une composante connexe de  $T \setminus \{x\}$ . Un *quadrant* dans  $T_1 \times T_2$  est le produit  $\delta_1 \times \delta_2$  de deux directions  $\delta_1 \subset T_1$  et  $\delta_2 \subset T_2$ . On dit que ce quadrant est basé au point  $(x_1, x_2)$  où  $x_i$  est le point base de la direction  $\delta_i$ .

Considérons deux actions d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres réels  $T_1, T_2$ , et choisissons un point base  $* = (*_1, *_2) \in T_1 \times T_2$ .

**DÉFINITION (Quadrant lourd).** – Considérons un quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2 \subset T_1 \times T_2$ . On dit que  $Q$  est *lourd* s'il existe une suite d'éléments  $g_k \in G$  telle que

- $g_k.* \in Q$ ,
- $d(g_k.*_1, *_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  et  $d(g_k.*_2, *_2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ .

Si  $Q$  n'est pas lourd, on dit qu'il est *léger*.

*Remarque.* – Cette définition ne dépend pas du choix du point base.

Le cœur de  $T_1 \times T_2$  est ce qu'il reste lorsqu'on a enlevé les quadrants légers :

**DÉFINITION.** – Le cœur  $\mathcal{C}$  de  $T_1 \times T_2$  est le sous-ensemble

$$\mathcal{C} = T_1 \times T_2 \setminus \left[ \bigcup_{Q \text{ quadrant léger}} Q \right].$$

S'il y a une ambiguïté, on écrit  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$  au lieu de  $\mathcal{C}$ .

La définition de quadrant léger peut sembler un peu arbitraire. On peut donner deux autres définitions qui sont en fait équivalentes sous l'hypothèse assez faible que  $\mathcal{C}$  est non vide (voir la remarque 2.2 ci-dessous, et le corollaire 3.8).

**DÉFINITION 2.1 (Variations sur la légèreté des quadrants).** –

- Un quadrant  $Q$  est *faiblement lourd* si l'orbite de tout point de  $T_1 \times T_2$  rencontre  $Q$ .
- Un quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  est *rendu lourd par un élément hyperbolique* s'il existe un élément  $h \in G$  hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$ , et tel que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\omega_{T_i}(h) \in \partial_\infty \delta_i$ .

*Remarque 2.2.* – Il est clair qu'un quadrant rendu lourd par un élément hyperbolique est lourd, et qu'un quadrant lourd est faiblement lourd. Si  $\mathcal{C}$  est non vide, alors tout quadrant  $Q$  faiblement lourd est lourd. En effet,  $Q$  contient alors un point  $x$  de  $\mathcal{C}$  (puisque  $\mathcal{C}$  est  $G$ -invariant). Mais si  $Q$  était léger,  $x$  ne serait pas dans  $\mathcal{C}$ .

## 2.2. Exemples

*Exemple 1 :*  $T_1 = T_2 = T$ , l'action de  $G$  sur  $T$  est minimale, et l'ensemble des points de branchements est dense. – Un quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  est léger si et seulement si  $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$ . En effet, si  $\delta_1 \cap \delta_2$  est vide, alors  $Q$  ne rencontre l'orbite d'aucun point sur la diagonale, et  $Q$  est donc léger. Réciproquement, si  $\delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset$ ,  $\delta_1 \cap \delta_2$  contient un point de branchement, et il existe donc un élément hyperbolique  $h$  dont l'axe rencontre  $\delta_1 \cap \delta_2$  en au moins un demi-axe. Donc  $Q$  est rendu lourd par  $h$  ou  $h^{-1}$ . On en déduit que  $\mathcal{C}(T \times T)$  est exactement la diagonale de  $T \times T$ .

*Exemple 2 :*  $T_1 = T_2 = T$  est un arbre simplicial sans sommet de valence 2, et l'action de  $G$  sur  $T$  est minimale. – L'argument ci-dessus s'étend pour montrer qu'un quadrant  $\delta_1 \times \delta_2$  est léger si et seulement si  $\delta_1 \cap \delta_2$  est contenu dans une arête. On en déduit que  $\mathcal{C}(T \times T) = \{(v, v) \mid v \text{ sommet de } T\}$ . Cet exemple illustre la situation typique où  $\mathcal{C}$  est disconnexe (voir section 4).

*Exemple 3 :*  $T_1$  et  $T_2$  sont les arbres duaux à deux courbes sur une surface. – Soit  $\Sigma$  une surface fermée hyperbolique, et  $c_1, c_2$  deux géodésiques fermées simples distinctes. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on peut définir  $T_i$  ainsi : soit  $p: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  le revêtement universel de  $\Sigma$  ; les sommets de  $T_i$  sont les composantes connexes de  $\tilde{\Sigma} \setminus p^{-1}(c_i)$  et ses arêtes non orientées sont les composantes connexes de  $p^{-1}(c_i)$ . L'action de  $G = \pi_1(\Sigma)$  sur  $\tilde{\Sigma}$  induit une action de  $G$  sur  $T_i$ .

On définit une application équivariante  $f_i: \tilde{\Sigma} \rightarrow T_i$  ainsi : soit  $A_i \simeq c_i \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  un petit voisinage tubulaire ouvert de  $c_i$ , feuilleté par des courbes parallèles à  $c_i$ . Ceci peut être fait de sorte que les deux feuilletages des anneaux soient transverses sur  $A_1 \cap A_2$ . Soit  $\tilde{A}_i = p^{-1}(A_i)$  ; définissons  $f_i$  de sorte que  $f_i$  envoie une composante de  $\tilde{A}_i$  sur l'arête correspondante de  $T_i$ , et envoie une composante de  $\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{A}_i$  sur le sommet correspondant. Pour toute direction  $\delta$  de  $T_i$ ,  $f_i^{-1}(\delta)$  est à distance de Hausdorff finie d'un demi-plan  $U_\delta$  de  $\tilde{\Sigma}$  bordé par une géodésique de  $p^{-1}(c_i)$ .

Soit  $F = (f_1, f_2): \tilde{\Sigma} \rightarrow T_1 \times T_2$ . On va démontrer que  $\mathcal{C} = F(\tilde{\Sigma})$  en montrant qu'un quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  est léger si et seulement si  $f_1^{-1}(\delta_1) \cap f_2^{-1}(\delta_2) = \emptyset$ . Il est clair que si  $f_1^{-1}(\delta_1) \cap f_2^{-1}(\delta_2) = \emptyset$ , alors  $Q$  est léger puisque pour tout point  $* \in \tilde{\Sigma}$ , l'orbite de  $(f_1(*), f_2(*))$  ne rencontre pas  $Q$ . Réciproquement, si  $f_1^{-1}(\delta_1)$  rencontre  $f_2^{-1}(\delta_2)$ , alors  $U_{\delta_1}$  et  $U_{\delta_2}$  se rencontrent, et il existe un élément  $h \in G$  dont l'axe dans  $\tilde{\Sigma}$  rencontre les géodésiques qui bordent  $U_{\delta_1}$  et  $U_{\delta_2}$ . Il est alors clair que  $h$  est hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$  et que  $h$  ou  $h^{-1}$  rend  $Q$  lourd.

Par conséquent,  $F$  induit une bijection entre les 2-cellules de  $\mathcal{C}$  et les points de  $p^{-1}(c_1) \cap p^{-1}(c_2)$ . En d'autres termes, le nombre de 2-cellules de  $\mathcal{C}/G$  est égal au nombre d'intersection des deux courbes  $c_1, c_2$ .

Ceci motive la définition qui suit.

## 2.3. Nombre d'intersection

Soient  $K_1, K_2$  deux sous-arbres finis de  $T_1$  et  $T_2$  (un sous-arbre fini est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini). Soit  $\mu_{K_1, K_2}$  le produit des mesures de Lebesgue sur  $K_1$  et  $K_2$ . Si  $E \subset T_1 \times T_2$  est un borélien, on définit alors

$$\mu(E) = \sup_{K_1, K_2} \mu_{K_1, K_2}(E \cap (K_1 \times K_2)).$$

Le covolume d'un borélien invariant  $\mathcal{C}$  est alors

$$\inf\{\mu(E) \mid G.E \supset \mathcal{C}, E \text{ borélien}\}.$$

DÉFINITION 2.3. – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres réels munis d'une action d'un groupe  $G$  de type fini. Le nombre d'intersection  $i(T_1, T_2)$  est par définition le covolume de  $\mathcal{C}$ .

Quand  $T_1$  et  $T_2$  sont des arbres simpliciaux avec des arêtes de longueur 1,  $i(T_1, T_2)$  est donc le nombre de 2-cellules de  $\mathcal{C}/G$ .

Notons qu'un ensemble compact peut être de mesure infinie : considérer une union de segments de longueur  $1/n$  issus d'un sommet de valence infinie d'un arbre simplicial par exemple. On peut bien sûr obtenir un exemple bidimensionnel en prenant un produit avec un intervalle.

*Exemple 4 : Arbres duaux à des feuilletages mesurés sur une surface.* – Soient  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  deux feuilletages mesurés transverses sur une surface fermée  $\Sigma$  (voir [9]). On peut définir un arbre réel  $T_i$  dual à  $\mathcal{F}_i$  en relevant  $\mathcal{F}_i$  au revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ , et en prenant pour  $T_i$  l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_i$  muni de la distance induite par l'intégration de la mesure transverse. L'action de  $G = \pi_1(\Sigma)$  sur  $T_i$  est induite par l'action de  $G$  sur  $\tilde{\Sigma}$ .

Soit  $f_i: \tilde{\Sigma} \rightarrow T_i$  l'application quotient, et soit  $F = (f_1, f_2): \tilde{\Sigma} \rightarrow T_1 \times T_2$ . L'argument de l'exemple 3 s'étend facilement à cette situation et permet de montrer que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) = F(\tilde{\Sigma})$ . En particulier,  $\mathcal{C}/G$  est isométrique à  $\Sigma$  muni de la métrique euclidienne singulière définie par  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Puisque le nombre d'intersection de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  est le volume de cette métrique euclidienne singulière, on obtient que  $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = i(T_1, T_2)$ .

## 2.4. Propriétés de base du cœur

DÉFINITION 2.4 (*Fibres convexes*). – On dit qu'un ensemble  $C \subset T_1 \times T_2$  est à fibres convexes (ou connexes) si pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et tout  $x \in T_i$ ,  $p_i^{-1}(x) \cap C$  est convexe (éventuellement vide).

Les propriétés suivantes du cœur sont immédiates :

PROPOSITION 2.5. – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres réels munis d'une action non triviale d'un groupe  $G$ , et soit  $\mathcal{C}$  le cœur de  $T_1 \times T_2$ . Alors

- $\mathcal{C}$  est fermé ;
- $\mathcal{C}$  est à fibres convexes ;
- $\mathcal{C} \subset \overline{\text{Min}_{T_1}(G)} \times \overline{\text{Min}_{T_2}(G)}$  ;
- si  $T_1$  et  $T_2$  sont des arbres simpliciaux métriques, alors  $\mathcal{C}$  est un sous-complexe de  $T_1 \times T_2$ .

*Démonstration.* – Le cœur est fermé parce qu'un quadrant est ouvert. Puisque  $\mathcal{C}$  peut s'écrire comme l'intersection des complémentaires des quadrants légers, les fibres de  $\mathcal{C}$  sont convexes car le complémentaire d'un quadrant est à fibres convexes.

Pour le troisième point, supposons par exemple que  $x_1 \notin \overline{\text{Min}_{T_1}(G)}$ . Il existe une direction  $\delta_1$  contenant  $x_1$  et qui ne rencontre pas  $\overline{\text{Min}_{T_1}(G)}$ . Pour toute direction  $\delta_2$  de  $T_2$ , le quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  est donc léger puisque pour tout point  $(*_1, *_2) \in \overline{\text{Min}_{T_1}(G)} \times T_2$ ,  $Q$  ne rencontre pas l'orbite de  $(*_1, *_2)$ .

Finalement, soient  $T_1, T_2$  deux arbres simpliciaux métriques. Soit  $Q$  un quadrant et soit  $\hat{Q}$  la réunion des cellules ouvertes de  $T_1 \times T_2$  qui rencontrent  $Q$ . Il est clair que  $\hat{Q}$  est un quadrant et que le complémentaire de  $\hat{Q}$  est un sous-complexe de  $T_1 \times T_2$ . Puisque  $\hat{Q}$  est à distance de Hausdorff bornée de  $Q$ ,  $\hat{Q}$  est léger si et seulement si  $Q$  l'est. On en déduit que  $\mathcal{C}$  est un sous-complexe comme intersection de sous-complexes.  $\square$

### 3. Le cœur est-il vide ?

PROPOSITION 3.1. – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres réels munis d'actions non triviales d'un groupe de type fini  $G$ . Alors  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$  est vide si et seulement si  $T_1$  et  $T_2$  ont des fonctions longueur homothétiques, et

- soit  $T_1$  est diédral (ce qui implique que  $T_2$  est aussi diédral) ;
- soit il existe deux bouts  $\omega_1 \in \partial_\infty T_1$ ,  $\omega_2 \in \partial_\infty T_2$  fixés par  $G$  et tels que tout  $h$  translate en direction de  $\omega_1$  dans  $T_1$  si et seulement si  $h^{-1}$  translate en direction de  $\omega_2$  dans  $T_2$ .

En particulier, si l'un des deux arbres est irréductible,  $\mathcal{C}$  est non vide.

Remarque. – Un exemple particulier du second cas arrive lorsque  $T_1$  ou  $T_2$  est une droite, et que  $T_1$  et  $T_2$  ont des fonctions longueurs homothétiques.

Si  $T_1$  et  $T_2$  sont géométriques (i.e. si les stabilisateurs d'arête sont de type fini dans le cas simplicial) alors le second cas ne peut arriver que si  $T_1$  et  $T_2$  ont tous deux une droite invariante sur laquelle  $G$  agit par translation (voir l'avant-dernier corollaire de [13]). En particulier, si  $T_1$  et  $T_2$  sont minimaux et géométriques, et si  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) = \emptyset$ , alors il y a une homothétie équivariante entre  $T_1$  et  $T_2$ .

Nous allons utiliser le critère suivant.

CRITÈRE 3.2. – Supposons que  $a, b, c \in G$  soient hyperboliques dans  $T_1$  et  $T_2$ , et que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , les trois bouts  $\omega_{T_i}(a)$ ,  $\omega_{T_i}(b)$  et  $\omega_{T_i}(c)$  soient distincts.

Soit  $x_i$  le centre du triangle  $\{\omega_{T_i}(a), \omega_{T_i}(b), \omega_{T_i}(c)\}$ . Alors, tout quadrant contenant le point  $x = (x_1, x_2)$  est rendu lourd par un élément hyperbolique.

En particulier  $x \in \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ .

Démonstration. – Considérons un quadrant  $\delta_1 \times \delta_2$  contenant  $x$ . Puisque le complémentaire  ${}^c\delta_i$  de  $\delta_i$  est convexe,  $\partial_\infty \delta_i$  contient au moins deux des trois bouts  $\{\omega_{T_i}(a), \omega_{T_i}(b), \omega_{T_i}(c)\}$  puisque sinon  ${}^c\delta_i$  contiendrait  $x_i$ . Donc au moins un élément  $\gamma \in \{a, b, c\}$  est tel que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\omega_{T_i}(\gamma) \in \partial_\infty \delta_i$ . Cet élément  $\gamma$  rend  $\delta_1 \times \delta_2$  lourd.  $\square$

CRITÈRE 3.3. – Supposons que  $a, b \in G$  soient hyperboliques dans  $T_1$  et  $T_2$ , et que l'une des hypothèses suivantes soit vraie :

- (1) les axes de  $a$  et  $b$  s'intersectent en au plus un point dans un des  $T_i$  ;
- (2) ou bien les axes de  $a$  et  $b$  s'intersectent en plus d'un point dans  $T_1$  et  $T_2$ , et
  - $a$  et  $b$  traduisent dans la même direction dans  $T_1$ ,
  - $a$  et  $b$  traduisent dans des directions opposées dans  $T_2$ .

Alors, il existe un point  $x \in T_1 \times T_2$  tel que tout quadrant contenant  $x$  soit rendu lourd par un élément hyperbolique.

En particulier  $x \in \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ .

Démonstration. – Considérons le point  $x = (x_1, x_2)$  défini ainsi : si  $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) \neq \emptyset$ , prenons  $x_i$  dans cette intersection, et sinon, soit  $x_i$  le point de  $\text{Axe}_{T_i}(a)$  le plus proche de  $\text{Axe}_{T_i}(b)$ . Pour toute direction  $\delta$  de  $T_i$ , notons  $E_i(\delta) = \{\gamma \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} \mid \omega_{T_i}(\gamma) \in \partial_\infty \delta\}$ . On va montrer que pour tout quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  contenant  $x$ ,  $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2) \neq \emptyset$ . Ceci impliquera que  $Q$  est rendu lourd par un élément de  $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2)$ .

Pour toute direction  $\delta_i$  contenant  $x_i$ , le choix de  $x_i$  implique que si  $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b)$  est réduit à un point, alors  $E_i(\delta_i)$  contient trois éléments. Si  $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) = \emptyset$ ,  $E_i(\delta_i)$  contient  $\{a, a^{-1}\}$ ,  $\{a, b, b^{-1}\}$  ou  $\{a^{-1}, b, b^{-1}\}$ . Si  $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) \neq \emptyset$  et si  $a$  et  $b$  traduisent dans la même direction, alors  $E_i(\delta_i)$  contient  $\{a, b\}$  ou  $\{a^{-1}, b^{-1}\}$ . Si  $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) \neq \emptyset$  et si  $a$  et  $b$  traduisent dans des directions opposées, alors  $E_i(\delta_i)$  contient  $\{a, b^{-1}\}$  ou  $\{a^{-1}, b\}$ .

Le critère s'en déduit facilement : puisque  $\#E_i(\delta_i) \geq 2$ , la seule possibilité autorisant  $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2) = \emptyset$  est que  $E_1(\delta_1)$  et  $E_2(\delta_2)$  aient chacun deux éléments et soient complémentaires l'un de l'autre. Ceci ne peut arriver que si les axes de  $a$  et  $b$  ont une intersection non dégénérée dans  $T_1$  et  $T_2$ . L'hypothèse sur les directions de translations empêche alors  $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2)$  d'être vide.  $\square$

*Preuve de la proposition 3.1.* – Montrons d'abord l'implication directe.

FAIT 3.4. – *Supposons que  $T_1$  soit irréductible. Alors il existe un point  $x \in T_1 \times T_2$  tel que tout quadrant contenant  $x$  soit rendu lourd par un élément hyperbolique. En particulier  $C \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* – Si  $T_1$  est irréductible, on peut trouver  $a, b \in G$  hyperboliques dans  $T_1$  et dont les axes sont disjoints. Si  $a$  et  $b$  sont hyperboliques dans  $T_2$ , le critère 3.3 conclut. Sinon, le corollaire 1.4 appliqué aux sous-arbres minimaux dit qu'on peut trouver un élément  $h$  hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$ . Il est maintenant facile de vérifier qu'il existe des conjugués de  $h$  par des puissances de  $a$  et  $b$  dont les axes sont disjoints dans  $T_1$  : soit  $p$  le milieu du pont joignant  $\text{Axe}_{T_1}(a)$  à  $\text{Axe}_{T_1}(b)$ , et soit  $\delta_a, \delta_b$  les directions basées en  $p$  contenant les axes de  $a$  et  $b$  ; il y a au plus deux entiers  $k$  tels que  $a^k \cdot \text{Axe}(h) \not\subset \delta_a$  (resp. tels que  $b^k \cdot \text{Axe}(h) \not\subset \delta_b$ ). Le critère 3.3 s'applique donc à une paire de la forme  $a^k h a^{-k}, b^{k'} h b^{-k'}$ .  $\square$

FAIT 3.5. – *Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  soient réductibles (i.e. diédraux ou abéliens) et que les fonctions longueurs  $l_1$  et  $l_2$  de  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas homothétiques.*

*Alors il existe un point  $x \in T_1 \times T_2$  tel que tout quadrant contenant  $x$  soit rendu lourd par un élément hyperbolique. En particulier  $C \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* – Soit  $G'$  un sous-groupe d'indice au plus 4 de  $G$  tel que  $G'$  fixe un bout dans  $T_1$  et  $T_2$ . Il est clair qu'un quadrant lourd pour l'action de  $G'$  est lourd pour l'action de  $G$  ; il suffit donc de montrer que le cœur pour l'action de  $G'$  est non vide. On se ramène ainsi à deux actions abéliennes. Puisqu'une fonction longueur vérifie  $l(g^2) = 2l(g)$ , les fonctions longueurs restreintes à  $G'$  ne sont pas homothétiques. Soit  $\varphi_i : G' \rightarrow \mathbb{R}$  un morphisme dont  $l_i$  est la valeur absolue en restriction à  $G'$ . Notons que deux éléments  $a, b$  traduisent dans la même direction dans  $T_i$  si et seulement si  $\varphi_i(a)$  et  $\varphi_i(b)$  sont de même signe. Puisque  $l_1$  et  $l_2$  ne sont pas homothétiques, considérons  $g, h \in G'$  tels que  $|\frac{\varphi_1(g)}{\varphi_1(h)}| \neq |\frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(h)}|$ . Il est facile de trouver de tels  $g, h$  qui soient hyperboliques dans  $T_1$  et  $T_2$ . Si les signes à l'intérieur des valeurs absolues sont opposés, alors  $g, h$  satisfont les hypothèses 3.3 et on a terminé. Sinon, quitte à échanger les rôles de  $T_1$  et  $T_2$ , on peut trouver  $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tels que  $0 < \frac{\varphi_1(g)}{\varphi_1(h)} < p/q < \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(h)}$ . On a donc  $\frac{\varphi_1(g^q)}{\varphi_1(h^p)} < 1 < \frac{\varphi_2(g^q)}{\varphi_2(h^p)}$ , et  $\frac{\varphi_1(g^q h^{-p})}{\varphi_1(h^p)} < 0 < \frac{\varphi_2(g^q h^{-p})}{\varphi_2(h^p)}$ , donc le deuxième point du critère 3.3 s'applique à  $a = h^p, b = g^q h^{-p}$ .  $\square$

FAIT 3.6. – *Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  soient réductibles et que  $T_1$  et  $T_2$  n'aient pas de droite invariante (i.e. que  $T_i$  ait un unique bout fixe  $\omega_i$ ). Supposons que les fonctions longueurs  $l_1$  et  $l_2$  de  $T_1$  et  $T_2$  soient homothétiques, et que pour tout  $g \in G$ ,  $g$  translate vers  $\omega_1$  dans  $T_1$  si et seulement si  $g$  translate vers  $\omega_2$  dans  $T_2$ .*

*Alors il existe un point  $x \in T_1 \times T_2$  tel que tout quadrant contenant  $x$  soit rendu lourd par un élément hyperbolique. En particulier  $C \neq \emptyset$ .*

*Remarque.* – Étant données deux actions abéliennes  $T_1, T_2$  ayant des fonctions longueurs homothétiques, et des bouts fixes  $\omega_1, \omega_2$ , s'il existe  $g$  hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$  traduisant vers  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans  $T_1$  et  $T_2$ , alors tout  $h \in G$  translate vers  $\omega_1$  dans  $T_1$  si et seulement si  $h$  translate vers  $\omega_2$  dans  $T_2$ . En effet, il existe deux morphismes homothétiques  $\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{R}$  dont les valeurs absolues sont les fonctions longueurs correspondantes, et tels que  $g$  translate vers  $\omega_i$  si et seulement si  $\varphi_i(g) > 0$ .

*Démonstration.* – On trouve facilement  $g, h \in G$  dont les axes sont distincts dans  $T_1$  et dans  $T_2$ . Quitte à changer  $g$  et  $h$  en leur inverse, on peut supposer que  $\omega_{T_1}(g) = \omega_{T_1}(h)$ . Par hypothèse,  $\omega_{T_2}(g) = \omega_{T_2}(h)$ . Le critère 3.2 s'applique donc à  $a = g, b = g^{-1}, c = h^{-1}$ .  $\square$

Ceci termine la preuve du sens direct de la proposition. Il reste à démontrer que  $\mathcal{C}$  est vide dans les cas exceptionnels.

Pour commencer, si  $T_1$  est diédral et si  $l_1$  et  $l_2$  sont homothétiques, alors  $T_2$  est aussi diédral, et on vérifie sans peine que  $\mathcal{C} = \emptyset$ . Soient donc  $\omega_1, \omega_2$  des bouts de  $T_1$  et  $T_2$  fixés par  $G$  et tels que  $h$  translate en direction de  $\omega_1$  dans  $T_1$  si et seulement si  $h^{-1}$  translate en direction de  $\omega_2$  dans  $T_2$ . En d'autres termes,  $\omega_{T_1}(h) = \omega_1$  si et seulement si  $\omega_{T_2}(h^{-1}) = \omega_2$ . Démontrons que tout quadrant  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  tel que  $\omega_i \notin \partial_\infty \delta_i$  est léger. Cela implique clairement que  $\mathcal{C} = \emptyset$ . Soit  $x_i$  le point où  $\delta_i$  est basée, et prenons  $x = (x_1, x_2)$  comme point base. Soit  $g \in G$  tel que  $g.x_1 \in \delta_1$ , et soit  $\text{Car}(g)$  son ensemble caractéristique, c'est-à-dire l'ensemble de ses points fixes ou son axe. Puisque  $\omega_1 \in \partial_\infty \text{Car}(g)$ , on a que  $x_1 \in \text{Car}(g)$  car sinon le sous-arbre  $\overline{\delta_1}$  ne rencontrerait pas  $\text{Car}(g)$ , et serait donc disjoint de son image par  $g$ . En particulier,  $g$  est hyperbolique et translate dans la direction opposée de  $\omega_1$ . L'argument symétrique dans  $T_2$  dit que si  $g.x_2 \in \delta_2$ ,  $g$  translate dans la direction opposée de  $\omega_2$ . Par hypothèses, ces deux situations ne peuvent pas arriver simultanément, donc  $\delta_1 \times \delta_2$  ne rencontre pas l'orbite du point  $x$ , et  $\delta_1 \times \delta_2$  est léger.  $\square$

*Remarque 3.7.* – Si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux arbres simpliciaux, étant donnée une arête orientée  $e$  de  $T_i$ , soit  $\delta(e)$  la direction basée à l'origine de  $e$  et contenant  $e$ . La fin de la preuve de la proposition démontre que si  $T_1$  et  $T_2$  satisfont la seconde hypothèse, alors pour toute paire d'arêtes non orientées  $e_1, e_2$ , il existe un choix d'orientations de  $e_1, e_2$  (celle qui ne pointe pas vers  $\omega_i$ ) et un choix de point base  $*$  (défini par l'origine de  $e_1$  et de  $e_2$ ) tel que l'orbite de  $*$  ne rencontre pas  $\delta(e_1) \times \delta(e_2)$ . Ce fait implique que le nombre d'intersection de Scott est nul dans ce cas (voir section 10).

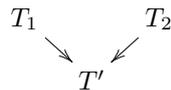
**COROLLAIRE 3.8.** – *Soient  $T_1, T_2$  deux actions non triviales d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres réels. Supposons que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$ .*

*Alors, tout quadrant faiblement lourd est rendu lourd par un élément hyperbolique.*

*Démonstration.* – D'après la proposition 3.1, les hypothèses de l'un des trois faits ci-dessus sont satisfaites, donc il existe  $x \in \mathcal{C}$  tel que chaque quadrant contenant  $x$  soit rendu lourd par un élément hyperbolique. Soit  $Q$  un quadrant faiblement lourd. Il contient donc un point  $g.x$  de l'orbite de  $x$ . Le quadrant  $g^{-1}Q$  est donc rendu lourd par un élément hyperbolique, et il en est donc de même de  $Q$ .  $\square$

#### 4. Contractibilité du cœur

Dans toute cette section, on suppose, sans perte de généralité que  $T_1$  et  $T_2$  ont un sous-arbre minimal dense. Le but de la section est de comprendre quand le cœur peut être non connexe. On a vu dans l'exemple 2 que c'était le cas lorsque  $T_1 = T_2$  est un arbre simplicial puisqu'alors  $\mathcal{C} = \{(v, v) \mid v \text{ sommet } T\}$ . Nous allons montrer que c'est le cas essentiel où cela arrive : la proposition 4.14 montre que  $\mathcal{C}$  est non connexe si et seulement si  $T_1$  et  $T_2$  sont des raffinements d'un même arbre simplicial  $T'$  comme dans le diagramme suivant



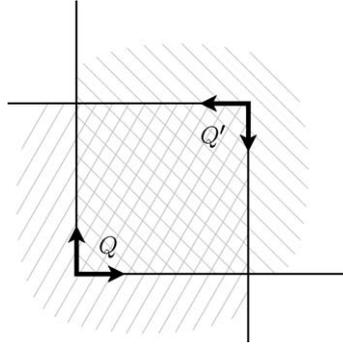


Fig. 1. Deux quadrants légers face à face s'intersectent en un rectangle doublement léger.

On démontrera qu'en dehors de ce cas pathologique,  $\mathcal{C}$  est contractile ; il y a même une rétraction par déformation forte équivariante de  $T_1 \times T_2$  sur  $\mathcal{C}$  (proposition 4.16). Dans le cas pathologique où  $\mathcal{C}$  est non connexe, on construira un *cœur augmenté* canonique  $\widehat{\mathcal{C}}$  obtenu en adjoignant à  $\mathcal{C}$  des *diagonales*, et on montrera que  $\widehat{\mathcal{C}}$  est contractile.

#### 4.1. Rectangles doublement légers

On s'intéresse au cas où un point de  $T_1 \times T_2$  est *enlevé deux fois* dans la construction de  $\mathcal{C}$ , comme sur la Fig. 1. On démontrera que le cœur est connexe si et seulement si il n'y a pas de rectangle doublement léger.

On aura besoin d'un peu de terminologie.

**DÉFINITION 4.1** (*Directions et quadrants face à face*). – On dit que deux directions  $\delta, \delta' \subset T$ , basées en des points distincts  $x \neq x'$  de  $T$  sont *face à face* si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (1)  $\delta \cup \delta' = T$ ,
- (2)  ${}^c\delta \cap {}^c\delta' = \emptyset$ ,
- (3)  $]x, x'[ \subset \delta \cap \delta'$ .

On dit que les quadrants  $Q = \delta_1 \times \delta_2 \subset T_1 \times T_2$  et  $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2 \subset T_1 \times T_2$  sont *face à face* si pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\delta_i$  fait face à  $\delta'_i$ .

La preuve de l'équivalence est immédiate.

**DÉFINITION 4.2** (*Rectangles doublement légers*). – Soient  $Q, Q'$  deux quadrants légers face à face. On dit alors que  $Q \cap Q'$  est un *rectangle doublement léger*.

Dans  $T_1 \times T_2$ , un *rectangle* est le produit de deux intervalles  $I_1 \times I_2$ .

**PROPOSITION 4.3** (*Un rectangle doublement léger est un rectangle*). – *Supposons que les sous-arbres minimaux de  $T_1$  et  $T_2$  soient denses dans  $T_1$  et  $T_2$ .*

*Soient  $Q, Q'$  deux quadrants légers face à face basés en  $x = (x_1, x_2)$  et  $x' = (x'_1, x'_2)$ , et soit  $R$  le rectangle  $]x_1, x'_1[ \times ]x_2, x'_2[$ .*

*Alors  $R = Q \cap Q'$ , et aucun des intervalles  $]x_i, x'_i[ = p_i(R)$  ne contient de point de branchement.*

*Démonstration.* – Puisque  $Q$  et  $Q'$  se font face, il est clair que  $R \subset Q \cap Q'$ .

Soit  $(t_1, t_2) \in R$  ; supposons par l'absurde que  $t_1$  soit un point de branchement. Soit  $\eta_1$  une direction issue de  $t_1$  qui ne contient ni  $x_1$  ni  $x'_1$ . On a que  $\eta_1 \subset \delta_1 \cap \delta'_1$ . Puisque le sous-arbre

minimal de  $T_1$  est dense, le corollaire 1.4 dit qu'il existe  $h \in G$  hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$  tel que  $\omega_{T_1}(h) \in \partial_\infty \eta_1$ . Puisque  $\delta_2 \cup \delta'_2 = T_2$ ,  $\omega_{T_2}(h) \in \partial_\infty \delta_2 \cup \partial_\infty \delta'_2$ . Donc l'un au moins des deux quadrants  $Q, Q'$  est rendu lourd par  $h$ , contradiction. L'argument symétrique montre que  $]x_2, x'_2[$  ne contient pas de point de branchement.

On en déduit que  $\delta_i \cap \delta'_i = ]x_i, x'_i[$  et que  $R = Q \cap Q'$ .  $\square$

#### 4.2. Connexité en l'absence de rectangle doublement léger

Remarquons tout d'abord que s'il y a des rectangles doublement légers, alors  $\mathcal{C}$  ne peut pas être connexe (du moins s'il est non vide). En effet, soient  $Q, Q'$  deux quadrants légers se faisant face, basés en  $x = (x_1, x_2)$  et  $x' = (x'_1, x'_2)$ . Alors  $Q \cup Q'$  contient  $]x_1, x'_1[ \times T_2$ , de sorte que  $p_1(\mathcal{C})$  ne rencontre pas  $]x_1, x'_1[$ . Cependant, si  $\mathcal{C}$  était connexe, alors  $p_1(\mathcal{C})$  serait un sous-ensemble connexe et  $G$ -invariant de  $T_1$ , qui serait donc dense par hypothèse, contradiction.

Montrons maintenant la réciproque.

**PROPOSITION 4.4.** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions non triviales de  $G$  sur des arbres réels dont les sous-arbres minimaux sont denses, et tels que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$ .

S'il n'y a pas de rectangle doublement léger alors  $\mathcal{C}$  est connexe (et la réciproque est vraie).

De plus, pour tout rectangle  $R = I_1 \times I_2$ ,  $\mathcal{C} \cap R$  est soit vide soit connexe.

*Démonstration.* – Nous avons déjà démontré que  $\mathcal{C}$  est non connexe en présence de rectangle doublement léger. Il suffit en fait de démontrer la dernière partie de l'énoncé. Soient  $x = (x_1, x_2)$ , et  $x' = (x'_1, x'_2) \in R \cap \mathcal{C}$ , et soit  $R_0 = [x_1, x'_1] \times [x_2, x'_2] \subset R$  le rectangle dont  $x$  et  $x'$  sont des coins. Il nous suffit de montrer que  $R_0 \cap \mathcal{C}$  est connexe.

Soient  $a = (x_1, x'_2)$  et  $b = (x'_1, x_2)$  les deux autres coins de  $R_0$ . Soit  $Q$  un quadrant léger qui rencontre  $R_0$ . Puisque  $Q$  ne contient ni  $x$  ni  $x'$ , sa trace sur  $R_0$  est un rectangle ouvert contenant  $a$  ou  $b$ . Puisqu'il n'y a pas de rectangle doublement léger, un quadrant léger contenant  $a$  ne peut pas rencontrer un quadrant léger contenant  $b$ .

Soit  $A \subset R_0$  (resp.  $B$ ) la réunion des traces sur  $R_0$  des quadrants légers contenant  $a$  (resp.  $b$ ). On peut écrire  $A$  comme une union croissante  $A = \bigcup_k A_k$  où  $A_k$  est une union finie de trace de quadrants légers contenant  $a$ . On écrit de même  $B = \bigcup_k B_k$ , et pour tout  $k$  on a  $A_k \cap B_k = \emptyset$ . Les ensembles  $R_0 \setminus A_k$  et  $R_0 \setminus B_k$  sont contractiles car étoilés, donc  $R_0 \setminus A_k \cup B_k$  est connexe (et même contractile). L'ensemble  $R_0 \setminus A \cup B$  est donc connexe comme intersection décroissante de compacts connexes.  $\square$

On peut reformuler la proposition dans un cadre plus général qui sera utile plus loin.

**DÉFINITION 4.5** (*Famille de quadrants cohérente et son cœur*). – Une famille de quadrants  $\mathcal{Q}$  de  $T_1 \times T_2$  est *cohérente* si elle ne contient pas de paire de quadrants se faisant face.

Son cœur  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  est  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} = T_1 \times T_2 \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ .

**PROPOSITION 4.6.** – Le cœur d'une famille cohérente  $\mathcal{Q}$  de quadrants est connexe (ou vide). De plus, pour tout rectangle  $R$  de  $T_1 \times T_2$ , la trace de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  sur  $R$  est connexe ou vide.

#### 4.3. Les coins d'un rectangle doublement léger

**LEMME 4.7.** – Supposons que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$ . Alors tout rectangle doublement léger est contenu dans un unique rectangle doublement léger maximal.

*Démonstration.* – On écarte le cas où l'un des arbres est une droite car l'existence de rectangles doublement légers implique que le cœur est vide.

Soit  $R = ]x_1, x'_1[ \times ]x_2, x'_2[$  un rectangle doublement léger. Soit  $]y_i, y'_i[ \subset T_i$  l'intervalle ouvert maximal contenant  $]x_i, x'_i[$  et ne contenant pas de point de branchement (de manière équivalente,

$y_i$  et  $y'_i$  sont des points de branchements, mais  $]y_i, y'_i[$  n'en contient pas). Cet intervalle existe parce que l'enveloppe convexe des points de branchements est dense car le sous-arbre minimal est dense. Il est alors clair que  $]y_1, y'_1[ \times ]y_2, y'_2[$  est doublement léger et qu'il est maximal pour cette propriété à cause de la proposition 4.3.  $\square$

**DÉFINITION 4.8.** – Deux quadrants  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  et  $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$  sont *faiblement face à face* si  $\delta_1$  fait face à  $\delta'_1$  ou  $\delta_2$  fait face à  $\delta'_2$ .

**LEMME 4.9.** – Soient  $Q, Q'$  deux quadrants légers qui se rencontrent. Si  $Q$  et  $Q'$  sont faiblement face à face, alors  $Q$  et  $Q'$  sont face à face.

*Démonstration.* – Soient  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  et  $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$ ; supposons que  $\delta_1$  soit face à  $\delta'_1$ . Si  $\delta_2$  et  $\delta'_2$  ne sont pas face à face,  $\delta_2$  et  $\delta'_2$  seraient emboîtées puisque  $\delta_2 \cap \delta'_2 \neq \emptyset$ . Supposons par exemple  $\delta_2 \subset \delta'_2$ . Soit  $\gamma \in G$  hyperbolique dans  $T_1$  et  $T_2$  et tel que  $\omega_{T_2}(\gamma) \in \partial_\infty \delta_2$  (corollaire 1.4). Puisque  $\delta_1 \times \delta_2$  et  $\delta'_1 \times \delta'_2$  sont légers,  $\omega_T(\gamma) \notin \partial_\infty \delta_1$  et  $\omega_T(\gamma) \notin \partial_\infty \delta'_1$ . Ceci contredit l'égalité  $\delta_1 \cup \delta'_1 = T_1$ .  $\square$

**LEMME 4.10.** – Supposons  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Soit  $R$  l'adhérence d'un rectangle doublement léger maximal. Alors,  $\mathcal{C} \cap R$  est constitué d'exactly deux points, et ces points sont deux coins diamétralement opposés de  $R$ .

*Démonstration.* – Soient  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  et  $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$  deux quadrants légers face à face dont l'intersection est l'intérieur de  $R$ . Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $x' = (x'_1, x'_2)$  les points bases de  $Q$  et  $Q'$ , et  $a = (x_1, x'_2)$  et  $b = (x'_1, x_2)$  les deux autres coins de  $R$ .

Il est clair que  $R \cap \mathcal{C} \subset \{a, b\}$  puisque  $R \setminus (Q \cup Q') = \{a, b\}$ . Montrons l'inclusion inverse. Si  $a \notin \mathcal{C}$ , soit  $P = \eta_1 \times \eta_2$  un quadrant léger contenant  $a$ . Puisque  $R$  est maximal, les deux coordonnées de  $a$  et  $b$  sont des points de branchement. En particulier,  $P$  et  $Q$  ne peuvent être face à face car sinon,  $P \cap Q$  serait doublement léger, mais  $p_2(P \cap Q)$  contiendrait le point de branchement  $p_2(a)$ , contradiction. De même  $P$  et  $Q'$  ne sont pas face à face.

Par ailleurs, nous allons montrer que  $\eta_1$  fait face à  $\delta_1$  ou  $\delta'_1$ . On aura la contradiction cherchée car  $P$  fait alors faiblement face à  $Q$  ou  $Q'$ , contredisant le lemme 4.9. On a  ${}^c\delta_1 \cap {}^c\delta'_1 = \emptyset$  car  $\delta_1$  et  $\delta'_1$  sont face à face. Si  $\eta_1$  ne fait face ni à  $\delta_1$  ni à  $\delta'_1$ ,  ${}^c\eta_1$  rencontre les deux sous-arbres  ${}^c\delta_1$  et  ${}^c\delta'_1$ , et doit donc contenir le pont les joignant, ce qui contredit le fait que  $P$  contient  $a$ .  $\square$

#### 4.4. Le cœur augmenté

**DÉFINITION 4.11.** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions de  $G$  sur des arbres réels telles que  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Soit  $R$  un rectangle doublement léger maximal. La *diagonale principale*  $\Delta_R$  de  $R$  est la diagonale de  $R$  joignant ses deux coins appartenant à  $\mathcal{C}$ .

Le *cœur augmenté*  $\widehat{\mathcal{C}}$  de  $T_1 \times T_2$  est l'union de  $\mathcal{C}$  et des diagonales principales des rectangles doublement légers maximaux.

**PROPOSITION 4.12.** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions de  $G$  sur des arbres réels telles que  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Alors  $\widehat{\mathcal{C}}$  est le cœur d'une famille cohérente de quadrants. En particulier  $\widehat{\mathcal{C}}$  est connexe, et il intersecte chaque rectangle de  $T_1 \times T_2$  en un ensemble connexe (peut-être vide).

*Démonstration.* – Soit  $\mathcal{Q}$  la famille des quadrants de  $T_1 \times T_2$  qui ne rencontrent pas  $\widehat{\mathcal{C}}$ . Chaque quadrant de  $\mathcal{Q}$  est léger puisqu'il ne rencontre pas  $\mathcal{C}$ .

Montrons que  $\mathcal{Q}$  est cohérent. En effet, si  $Q, Q' \in \mathcal{Q}$  sont face à face,  $Q \cap Q'$  est un rectangle doublement léger; soit  $R$  le rectangle doublement léger maximal contenant  $Q \cap Q'$ . Puisque la trace de  $Q \cup Q'$  sur  $R$  sépare ses deux coins appartenant à  $\mathcal{C}$ ,  $Q \cup Q'$  rencontre la diagonale principale de  $R$ , contradiction.

Il reste à voir que  $\widehat{\mathcal{C}}$  est le cœur de  $\mathcal{Q}$ . L'inclusion  $\widehat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  est claire par définition de  $\mathcal{Q}$ .

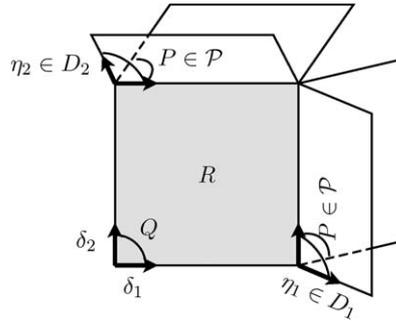


Fig. 2. La famille de quadrants  $\mathcal{P}$ .

Il est clair que si  $R = Q \cap Q'$  est un rectangle doublement léger maximal, tout élément  $x \in \overline{R} \setminus \Delta_R$  appartient à un quadrant contenu dans  $Q$  ou  $Q'$  et qui ne rencontre pas  $\Delta_R$ . Donc  $\widehat{C}$  et  $\mathcal{C}_Q$  ont la même trace sur  $\overline{R}$ .

Soit  $x \notin \widehat{C}$  un point n'appartenant pas à l'adhérence d'un rectangle doublement léger maximal ; montrons que  $x \notin \mathcal{C}_Q$ . Soit  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  un quadrant léger contenant  $x$ . On va prouver que  $x$  appartient à un quadrant léger qui ne rencontre aucun rectangle doublement léger. Supposons que  $Q$  rencontre un rectangle doublement léger maximal  $R$ . Le fait suivant sera prouvé plus loin.

FAIT 4.13. – *Un quadrant léger  $Q$  rencontre au plus un rectangle doublement léger maximal. De plus dans ce cas, le point base de  $Q$  appartient à l'adhérence de ce rectangle.*

Le point base de  $Q$  appartient donc à  $\overline{R}$ . Puisque  $R$  ne contient pas de point de branchement,  $Q \setminus \overline{R}$  s'écrit comme une union de quadrants

$$Q \setminus \overline{R} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$$

où  $\mathcal{P}$  est défini ainsi (Fig. 2) : soit  $D_i$  l'ensemble des composantes connexes de  $\delta_i \setminus p_i(\overline{R})$  (ces composantes sont en fait des directions) et soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des quadrants définis par

$$\mathcal{P} = \{\delta_1 \times \eta_2, \eta_1 \times \delta_2 \mid \eta_1 \in D_1, \eta_2 \in D_2\}.$$

Ces quadrants sont légers car contenus dans  $Q$ . Puisque  $x \in P$  pour un certain  $P \in \mathcal{P}$ , il reste à vérifier que les quadrants de  $\mathcal{P}$  ne rencontrent aucun rectangle doublement léger. C'est une conséquence du fait que  $Q$  ne peut pas rencontrer plus d'un rectangle doublement léger maximal. On a ainsi  $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_Q$ , et  $x \notin \mathcal{C}_Q$ .  $\square$

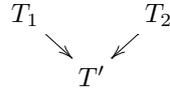
*Preuve du fait 4.13.* – Soit  $R$  un rectangle doublement léger maximal rencontrant un quadrant léger  $Q = \delta_1 \times \delta_2$ . Il suffit de prouver que le point base  $b = (b_1, b_2)$  de  $Q$  appartient à  $\overline{R}$ . En effet, ceci implique que deux rectangles doublement légers maximaux contenus dans  $Q$  s'intersectent (ils définissent le même germe en  $b$  puisqu'ils intersectent le même quadrant), et coïncident donc.

On veut montrer que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $b_i \in p_i(\overline{R})$ . Supposons par exemple que  $b_1 \notin p_1(\overline{R})$ . Par connexité, ou bien  $p_1(\overline{R}) \subset \delta_1$  ou bien  $p_1(\overline{R}) \subset {}^c\delta_1$ . Le second cas est impossible car  $R$  rencontre  $Q$ , donc  $p_1(R) \subset \delta_1$ . L'une au moins des extrémités de  $p_2(R)$  appartient à  $\delta_2$ , notons-la  $a_2$ . Le segment  $p_1(R) \times \{a_2\}$  est contenu dans  $Q$  et contient une des extrémités de la diagonale principale. Puisque cette extrémité appartient à  $\mathcal{C}$ , ceci contredit que  $Q$  est léger.  $\square$

**4.5. Caractérisation de la connexité du cœur**

PROPOSITION 4.14 (Caractérisation de la connexité du cœur). – Soient  $T_1, T_2$  deux actions non triviales d'un groupe  $G$  de type fini sur des arbres réels, dont les sous-arbres minimaux sont denses, et telles que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$ .

Alors,  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$  est non connexe si et seulement si  $T_1$  et  $T_2$  raffinent une même action de  $G$  non triviale sur arbre simplicial  $T'$  :



LEMME 4.15. – Étant donné  $x_1 \in T_1$ , il y a au plus un rectangle doublement léger maximal  $R$  tel que  $x_1 \in p_1(R)$ .

En particulier,  $p_1|_{\widehat{\mathcal{C}}}$  est injective.

Démonstration. – Soient  $R = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[$  et  $R' = ]a'_1, b'_1[ \times ]a'_2, b'_2[$  deux rectangles doublement légers maximaux qui contrediraient le lemme. Soient  $P$  et  $Q$  deux quadrants légers tels que  $R = P \cap Q$ . On a  $]a_1, b_1[ \cap ]a'_1, b'_1[ \neq \emptyset$  mais ces deux intervalles ne contiennent pas de point de branchement, et les quatre points  $a_1, b_1, a'_1, b'_1$  sont des points de branchements. On en déduit que  $]a_1, b_1[ = ]a'_1, b'_1[$ .

Si  $]a_2, b_2[$  rencontre  $]a'_2, b'_2[$ , l'argument symétrique montre que  $R = R'$ , et on a terminé. Sinon,  $]a'_2, b'_2[$  est contenu dans  $p_2(P)$  ou dans  $p_2(Q)$ , donc  $R'$  est contenu dans  $P$  ou  $Q$ . Le fait 4.13 conclut que  $R = R'$ . □

Preuve de la proposition 4.14. – Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  raffinent un arbre simplicial  $T'$ . On va utiliser un argument similaire à l'exemple 2 (section 2.2) pour démontrer qu'il existe des rectangles doublement légers. Soit  $e = ]a, a'[$  une arête ouverte de  $T'$ , et soit  $I_i = f_i^{-1}(e)$ . Puisque  $f_i$  préserve l'alignement,  $I_i$  est connexe.

Montrons que  $I_i$  ne contient pas de point de branchement, et que c'est donc un intervalle ouvert. Supposons par l'absurde que  $b_i \in I_i$  soit un point de branchement, et soit  $\delta_i$  une direction basée en  $b_i$  qui ne rencontre ni  $f_i^{-1}(a)$  ni  $f_i^{-1}(a')$ . On a  $f_i(\delta_i) = \{f_i(b_i)\}$  car sinon, l'image réciproque d'un point de  $e$  ne serait pas connexe. Par densité du sous-arbre minimal, on peut trouver  $h \in G$  hyperbolique dans  $T_i$  tel que  $\omega_{T_i}(h) \in \partial_\infty(\delta)$ . L'image de toute paire de points par une puissance suffisamment grande de  $h$  est contenue dans  $\delta$ . Puisque  $f_i$  est constante sur  $\delta$ , on en déduit que  $f_i$  est constante sur  $T_i$ , ce qui contredit la non trivialité de l'action de  $G$  sur  $T'$ .

Soient  $a_i$  et  $a'_i$  les extrémités de  $\overline{I_i}$  qui sont envoyées par  $f_i$  sur  $a$  et  $a'$  respectivement. Soient  $\delta_i$  et  $\delta'_i$  les directions de  $T_i$  basées en  $a_i$  et  $a'_i$  et contenant  $I_i$ . Soient  $Q = \delta_1 \times \delta'_2$  et  $Q' = \delta'_1 \times \delta_2$ . Ces deux quadrants se font face. Soit  $* = (*_1, *_2)$  tel que  $f_1(*_1) = f_2(*_2) \in e$ . Le quadrant  $Q$  est léger car si  $g.* \in Q$ , alors  $g.f_1(*_1) = g.f_2(*_2) \in f_1(\delta_1) \cap f_2(\delta'_2) = e$  donc  $g.* \in I_1 \times I_2$  ne peut aller à l'infini. De même,  $Q'$  est léger, et  $Q \cap Q'$  est doublement léger.

Pour prouver la réciproque, l'idée est d'obtenir  $T'$  à partir de  $\widehat{\mathcal{C}}$  en écrasant tout sauf les diagonales principales. Soit  $T'$  le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de  $\mathcal{C}$ , et dont les arêtes sont les diagonales principales. Le graphe  $T'$  est connexe parce que  $\widehat{\mathcal{C}}$  l'est. D'après le lemme 4.15,  $p_1(\widehat{\mathcal{C}} \setminus \Delta)$  ne rencontre pas  $p_1(\Delta)$  et ne peut donc pas être connexe. Chaque arête disconnecte donc  $T'$ , donc  $T'$  est un arbre. On définit  $f_i : T_i \rightarrow T'$  ainsi : si  $x \in p_i(\mathcal{C})$ , alors  $p_i^{-1}(x)$  est connexe et définit donc un sommet de  $T'$ . On définit  $f_i(x)$  comme étant ce sommet. Si  $x \in p_i(R)$  pour un rectangle doublement léger maximal  $R$ , alors  $R$  est unique, et on envoie  $x$  sur le point de  $T'$  correspondant au point  $y$  de  $\Delta_R$  tel que  $p_i(y) = x$ . L'application  $f_i$  est ainsi

définie sur  $p_i(\mathcal{C})$  qui est un sous-arbre dense de  $T_i$  (il contient le sous-arbre minimal). Si on munit  $T'$  de sa distance combinatoire,  $f_i$  est lipschitzienne et s'étend donc de manière unique à  $T_i$ . Il est clair que  $f_i$  préserve l'alignement en restriction à  $p_i(\mathcal{C})$  car la préimage d'un point est connexe. On vérifie sans peine que ceci implique que  $f_i$  préserve l'alignement.  $\square$

**4.6. Flot et contractibilité du cœur**

PROPOSITION 4.16. – Soient  $T_1, T_2$  deux actions minimales non triviales d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres réels dont le cœur est non vide. Soit  $\hat{\mathcal{C}}$  le cœur augmenté.

Alors, il existe une rétraction par déformation forte de  $T_1 \times T_2$  sur  $\hat{\mathcal{C}}$ . Cette rétraction est équivariante et lipschitzienne. En particulier,  $\hat{\mathcal{C}}$  est contractile. De plus, pour tout rectangle  $R \subset T_1 \times T_2$ ,  $R \cap \hat{\mathcal{C}}$  est soit vide, soit contractile.

Remarque. – La minimalité dans la proposition ci-dessus peut être remplacée par l'hypothèse plus faible que  $T_i = p_i(\hat{\mathcal{C}})$ . En particulier, la contractibilité de  $\hat{\mathcal{C}}$  reste vraie sans hypothèse de minimalité car la proposition implique que  $\hat{\mathcal{C}}$  est un rétract par déformation forte de  $p_1(\hat{\mathcal{C}}) \times p_2(\hat{\mathcal{C}})$ .

On va en fait montrer l'énoncé plus général suivant :

LEMME 4.17. – Soit  $\mathcal{Q}$  une famille  $G$ -invariante de quadrants dont le cœur  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  est connexe, et telle que  $p_i(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}) = T_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Alors, il existe un semi-flot lipschitzien  $G$ -équivariant  $\varphi_t$  sur  $T_1 \times T_2$  dont la restriction à  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  est l'identité, et tel que pour tout  $x \in T_1 \times T_2$ , il existe  $t \in [0, +\infty[$  tel que  $\varphi_t(x) \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ .

De plus, pour tout rectangle  $R$  tel que  $p_i(R \cap \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}) = p_i(R)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $R$  est invariant sous  $\varphi_t$ .

Preuve de la proposition à partir du lemme. – La minimalité et la connexité de  $\hat{\mathcal{C}}$  impliquent que  $p_i(\hat{\mathcal{C}}) = T_i$ . Les hypothèses du lemme sont donc satisfaites. Le semi-flot  $\varphi_t$  est la rétraction par déformation forte cherchée.

Il reste à vérifier que la trace de  $\hat{\mathcal{C}}$  sur un rectangle  $R$  est vide ou contractile. Si  $R \cap \hat{\mathcal{C}}$  est non vide, soit  $R_0 = p_1(R \cap \hat{\mathcal{C}}) \times p_2(R \cap \hat{\mathcal{C}})$  le plus petit rectangle contenant  $R \cap \hat{\mathcal{C}}$  (c'est un rectangle car  $R \cap \hat{\mathcal{C}}$  est connexe d'après la proposition 4.12). Le lemme dit que  $R_0$  est invariant sous le semi-flot, donc  $R \cap \hat{\mathcal{C}}$  est un rétract par déformation forte de  $R_0$ .  $\square$

Preuve du lemme. – Pour tout  $t \in [0, \infty]$  et  $x \in T_1 \times T_2$ , on veut définir  $\varphi_t(x)$  (voir Fig. 3). Si  $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ , on définit  $\varphi_t(x) = x$  pour tout  $t \geq 0$ . Sinon, puisque  $p_i(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}) = T_i$ , soient  $a, b \in \mathcal{C}$  tels que  $p_1(a) = p_1(x)$  et  $p_2(b) = p_2(x)$  et soit  $R = [x_1, b_1] \times [x_2, a_2]$  le plus petit rectangle contenant  $a$  et  $b$  (avec les notations  $a_i = p_i(a)$  et  $b_i = p_i(b)$ ). La proposition 4.6 montre que  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} \cap R$  est

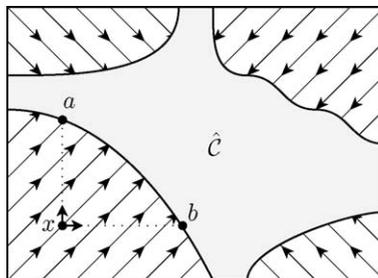


Fig. 3. Le semi-flot  $\varphi_t$ .

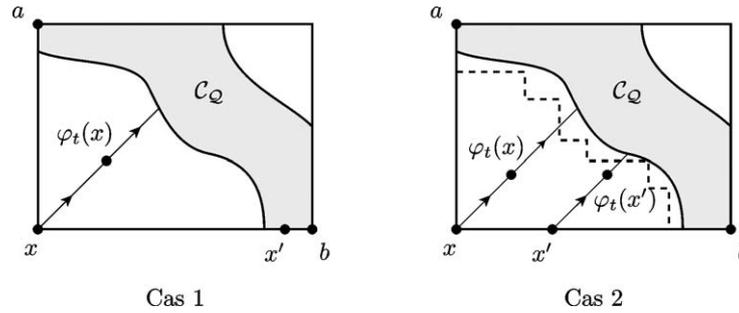


Fig. 4. Le semi-flot est lipschitzien.

connexe. De plus,  $R \setminus C_Q$  a au plus deux composantes connexes : la composante  $R_x$  contenant  $x$ , et la composante contenant le coin opposé  $(b_1, a_2)$ , cette deuxième composante n'existant que si  $(b_1, a_2) \notin C_Q$ . En effet, les deux composantes sont les unions des traces des quadrants contenant  $x$  et  $(b_1, a_2)$  respectivement.

On dit qu'un rectangle  $R$  est une *carte* pour  $x$  si  $x$  est un coin de  $R$ , et s'il existe deux points  $a, b \in R \cap C_Q$  tels que  $p_1(a) = p_1(x)$  et  $p_2(b) = p_2(x)$ . Étant donnée une carte  $R$  pour  $x$ , on l'identifie isométriquement avec  $[0, l_1] \times [0, l_2] \subset \mathbb{R}^2$  en envoyant  $x, a$  et  $b$  sur  $(0, 0), (l_1, 0), (0, l_2)$  respectivement où  $l_1 = d(x_1, b_1)$  et  $l_2 = d(x_2, a_2)$ . Les lignes de flot seront parallèles au vecteur  $\vec{v} = (1, 1)$ . Grâce à cette identification, étant donné  $y \in R$  et  $t \in [0, \min(l_1, l_2)]$  pas trop grand, l'écriture  $y + t\vec{v}$  a un sens dans  $R$ .

Puisque  $R \cap C_Q$  est connexe, il existe  $t \leq \min(l_1, l_2)$  tel que  $x + t\vec{v} \in C_Q$  car sinon, ce segment séparerait  $a$  de  $b$ , contredisant la connexité de  $C_Q \cap R$ . De même, pour tout  $y \in R_x$ , il existe  $t \in [0, \min(l_1, l_2)]$  tel que  $y + t\vec{v} \in C_Q$ . Ainsi, pour tout choix de  $R$ , on peut définir  $\tau_R(y)$  comme le plus petit  $s \geq 0$  tel que  $y + s\vec{v} \in C_Q$ . Pour  $y \in R_x$ , on définit alors le semi-flot par  $\varphi_t^R(y) = y + \min(t, \tau_R(y))\vec{v}$ .

La définition du semi-flot ne change pas si l'on change une carte  $R$  en une carte plus petite  $R'$ . En effet, pour tout  $y \in R'_x$ , le point  $y + \tau_R(y)\vec{v}$  appartient aussi à  $R'$  car sinon, il n'y aurait pas de  $s$  tel que  $y + s\vec{v} \in C_Q \cap R'$ . Ceci implique que les définitions de  $\tau_R$  et  $\tau_{R'}$  coïncident, et donc que les semi-flots  $\varphi_t^R$  et  $\varphi_t^{R'}$  coïncident. Puisque pour tout  $x$ , il y a une carte contenue dans toutes les autres, la définition du semi-flot ne dépend d'aucun choix.

Notons que, par définition,  $\varphi_t(x)$  reste dans toute carte pour  $x$ . Or si  $R$  est un rectangle tel que  $p_i(R \cap C_Q) = p_i(R)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ , alors  $R$  contient une carte pour chacun de ses points. En particulier,  $R$  est invariant sous  $\varphi_t$ .

Il nous reste à prouver que  $\varphi: \mathbb{R}_+ \times T_1 \times T_2 \rightarrow T_1 \times T_2$  est lipschitzien ; il suffit de le faire par rapport à chaque variable séparément. Sur  $T_1 \times T_2$ , on utilise la distance  $d(x, y) = \max_{i \in \{1, 2\}} d_{T_i}(x_i, y_i)$ . Il est clair que  $t \mapsto \varphi_t(x)$  est 1-lipschitzienne. Considérons  $x_1 \mapsto \varphi_t(x_1, x_2)$  où  $t$  et  $x_2$  sont fixés. Soit  $b_1 \in T_1$  tel que  $b = (b_1, x_2) \in C_Q$  (voir Fig. 4). Soient  $x_1, x'_1 \in T_1$  ; notons  $x = (x_1, x_2)$  et  $x' = (x'_1, x_2)$ . Soit  $l = d(x_1, x'_1)$ .

**1er cas :**  $x \notin C_Q$  et  $x' \in C_Q$ . Dans ce cas, on choisit la carte  $R = [x_1, x'_1] \times [x_2, a_2]$  où  $(x_1, a_2) \in C_Q$ . Alors,  $d(\varphi_t(x), \varphi_t(x')) = d(\varphi_t(x), x') \leq l$ . En effet, soit  $\lambda = \min(t, \tau(x))$ , on a  $\lambda \leq l$  car  $\varphi_t(x) \in R$ . Donc  $d(\varphi_t(x), x') = \|x + \lambda\vec{v} - x'\| = \max(|\lambda|, |\lambda - l|) \leq l$ .

**2ème cas :**  $x$  et  $x'$  ne sont pas dans  $C_Q$ , et  $x'_1 \in [x_1, b_1]$  (rappelons que  $b_1$  est tel que  $(b_1, x_2) \in C_Q$ ). Dans ce cas, on se place dans la carte  $R = [x_1, b_1] \times [x_2, a_2]$  où  $a = (x_1, a_2) \in C_Q$ . L'arc  $[x_1, x'_1] \times \{x_2\}$  ne rencontre pas  $C_Q$  parce que les fibres sont convexes et que  $(b_1, x_2) \in C_Q$ . Ainsi,  $x$  et  $x'$  sont dans la même composante  $R_x$  de  $R \setminus C_Q$ . Soit  $\lambda = \min(t, \tau(x))$

et  $\lambda' = \min(t, \tau(x'))$ . On a  $d(\varphi_t(x), \varphi_t(x')) = \|(\lambda, \lambda) - (\lambda' + t, \lambda')\| \leq t + |\lambda - \lambda'|$ . Il reste à prouver que  $z_1 \mapsto \tau(z_1, x_2)$  est lipschitzienne en restriction à  $R_x$ . Écrivons  $R_x$  comme une union croissante d'ensembles  $R_k$  où chacun des  $R_k$  est une union finie de traces de quadrants de  $\mathcal{Q}$  sur  $R$ . On vérifie facilement que l'application linéaire par morceaux  $\tau_k$  obtenue en remplaçant  $R_x$  par  $R_k$  est  $\sqrt{2}$ -lipschitzienne. La fonction  $\tau$  étant la borne supérieure des fonctions  $\tau_k$ , elle est  $\sqrt{2}$ -lipschitzienne.

On peut ensuite déduire les cas restants des deux premiers cas. Supposons que  $x, x' \notin \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ . Considérons la fibre  $\mathcal{F}_1 = \{b_1 \in T_1 \mid (b_1, x_2) \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}\}$ . Si  $\mathcal{F}_1$  rencontre  $[x_1, x'_1]$  en un point  $b'_1$ , on peut appliquer le 1er cas aux points  $x, b'_1$  puis aux points  $b', x'$  et appliquer l'inégalité triangulaire. Si  $\mathcal{F}_1$  ne rencontre pas  $[x_1, x'_1]$ , soit  $x''_1$  le centre du triangle  $(x_1, x'_1, b_1)$ . On peut alors appliquer le second cas aux points  $x, x''_1$  puis aux points  $x'', x'$ .  $\square$

#### 4.7. Le cœur est CAT(0)

Soit  $d$  la distance CAT(0) usuelle sur  $T_1 \times T_2$  définie par

$$d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt{d_{T_1}(a_1, b_1)^2 + d_{T_2}(a_2, b_2)^2}.$$

Soit  $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$  la distance de longueur induite par  $d$  sur  $\widehat{\mathcal{C}}$

$$d_{\widehat{\mathcal{C}}}(x, y) = \inf \{ \text{longueur}(c) \mid c \text{ chemin joignant } x \text{ à } y \text{ dans } \widehat{\mathcal{C}} \}$$

où la longueur d'un chemin est mesurée par rapport à  $d$ .

Notons que  $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$  est bien définie (et finie) car deux points quelconques de  $\widehat{\mathcal{C}}$  sont joints par un chemin lipschitzien (proposition 4.16). Cette distance n'est en général pas complète car  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas complets en général.

PROPOSITION 4.18. – *L'espace  $\widehat{\mathcal{C}}$  muni de la distance  $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$  est CAT(0).*

*Démonstration.* – Dans le cas où  $T_1$  et  $T_2$  sont des arbres simpliciaux métriques, le résultat est clair car  $\widehat{\mathcal{C}}$  est un complexe carré simplement connexe et le link à chaque sommet ne contient pas de courbe fermée non triviale de longueur strictement inférieure à  $2\pi$  parce que c'est déjà le cas dans  $T_1 \times T_2$  (voir [4]).

Pour des arbres réels, on va procéder par approximations. Soient  $K_1, K_2$  deux sous-ensembles convexes fermés de  $T_1$  et  $T_2$ . Pour tout chemin lipschitzien  $c: [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  joignant deux points de  $K_1 \times K_2 \cap \widehat{\mathcal{C}}$ , il y a un chemin plus court contenu dans  $(K_1 \times K_2) \cap \widehat{\mathcal{C}}$  les joignant : en effet, pour chaque composante  $]a, b[$  de  $[0, 1] \setminus (p_1 \circ c)^{-1}(K_1)$ , on a  $p_1(c(a)) = p_1(c(b)) \in K_1$ , et on peut redéfinir  $c$  sur  $]a, b[$  par la géodésique dans la fibre de  $p_1(c(a))$  et obtenir ainsi un chemin plus court  $c'$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  ayant la même constante de Lipschitz. En faisant cela pour chaque composante, on obtient un chemin plus court dans  $\widehat{\mathcal{C}} \cap (K_1 \times T_2)$ . En effectuant l'opération symétrique sur  $c'$ , on obtient un chemin plus court dans  $(K_1 \times K_2) \cap \widehat{\mathcal{C}}$ .

Étant donnés  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \widehat{\mathcal{C}}$  et  $K_i = [a_i, b_i]$ , la compacité de  $(K_1 \times K_2) \cap \widehat{\mathcal{C}}$  implique que la distance de  $a$  à  $b$  est atteinte par un certain chemin. En d'autres termes,  $\widehat{\mathcal{C}}$  est un espace géodésique, et les ensembles de la forme  $(K_1 \times K_2) \cap \widehat{\mathcal{C}}$  sont convexes.

De plus, il y a une unique géodésique entre deux points. Sinon, on pourrait trouver deux points  $a, b$  et deux géodésiques les joignant telles que  $c_1 \cap c_2 = \{a, b\}$ . Le fait que l'intersection d'un rectangle avec  $\widehat{\mathcal{C}}$  est convexe implique que  $c_1$  et  $c_2$  sont les graphes de deux fonctions monotones dans le plus petit rectangle contenant  $\{a, b\}$ . Supposons, avec ce point de vue que  $c_1 \leq c_2$ . Puisque l'ensemble contenu entre  $c_1$  et  $c_2$  est contenu dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ , si  $c_1$  n'était pas concave, on pourrait la raccourcir. De même,  $c_2$  est convexe. On en déduit  $c_1 = c_2$ .

Puisque tout triangle géodésique de  $\widehat{C}$  est contenu dans le produit de deux tripodes, il suffit de montrer que  $X = (K_1 \times K_2) \cap \widehat{C}$  est CAT(0) pour toute paire de tripodes  $K_1, K_2$ . Il est facile de voir que  $X$  est obtenu à partir de  $K_1 \times K_2$  en enlevant un nombre dénombrable de quadrants. Écrivons donc  $X$  comme l'intersection décroissante d'ensembles  $X_k$  obtenus en enlevant un nombre fini de quadrants à  $K_1 \times K_2$ . L'argument dans le cas simplicial montre que  $X_k$  est CAT(0). Considérons une suite de géodésiques de  $X_k$  paramétrées linéairement  $c_k : [0, 1] \rightarrow X_k$ , joignant deux points  $a, b \in X$ . Quitte à extraire une sous-suite,  $c_k$  converge vers une courbe  $c$  joignant  $a$  à  $b$  dans  $X$ . Un argument général montre que  $\text{longueur}(c) \leq \lim \text{longueur}(c_k)$  et puisque  $X \subset X_k$ ,  $\text{longueur}(c) \geq \text{longueur}(c_k)$ , donc la distance de longueur de  $X_k$  converge vers la distance de longueur de  $X$ . On en déduit que  $X$  est CAT(0).  $\square$

### 5. Caractérisation du cœur

**PROPOSITION 5.1 (Caractérisation du cœur).** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions non triviales d'un groupe  $G$  de type fini sur des arbres réels telles que  $C \neq \emptyset$ .

Soit  $F \subset T_1 \times T_2$  un fermé non vide  $G$ -invariant, connexe, à fibres convexes. Alors  $F$  contient  $C(T_1 \times T_2)$ .

De plus,  $C$  est l'intersection de tous les ensembles  $F$  de cette forme.

Si  $T_1$  et  $T_2$  ne raffinent pas un même arbre simplicial, alors  $C$  est lui-même un fermé connexe à fibres convexes. On obtient donc :

**COROLLAIRE 5.2.** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions non triviales d'un groupe  $G$  de type fini sur des arbres réels dont les sous-arbres minimaux sont denses. Supposons que  $C \neq \emptyset$ , et que  $T_1$  et  $T_2$  ne raffinent pas un même arbre simplicial.

Alors  $C$  est le plus petit fermé non vide invariant connexe à fibres convexes dans  $T_1 \times T_2$ .

On utilisera souvent cette caractérisation du cœur sous la forme suivante :

**COROLLAIRE 5.3.** – Soient  $T_1, T_2$  deux actions d'un groupe  $G$  sur des arbres réels. Soit  $X$  un espace connexe non vide muni d'une action de  $G$  et deux applications continues équivariantes  $f_1, f_2$  de  $X$  dans  $T_1$  et  $T_2$  telles que l'image réciproque de tout point soit connexe. Soit  $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$ .

Alors  $\overline{F(X)}$  contient  $C$ .

*Preuve.* – Puisque  $\overline{F(X)}$  est un sous-ensemble fermé connexe, il suffit de montrer que ses fibres sont convexes. D'après le corollaire 5.5 ci-dessous, il suffit de vérifier que  $F(X)$  est à fibres convexes. Mais une fibre de  $F(X)$  s'écrit  $F(X) \cap p_1^{-1}(x_1) = F(f_1^{-1}(x_1))$ , elle est donc connexe car  $f_1^{-1}(x_1)$  l'est.  $\square$

Le résultat technique principal de cette section est le suivant :

**LEMME 5.4.** – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres réels et  $F \subset T_1 \times T_2$  un sous-ensemble connexe à fibres convexes.

Alors, le complémentaire de  $\overline{F}$  est une union de quadrants.

On en déduit immédiatement :

**COROLLAIRE 5.5.** – Si  $F$  est connexe à fibres convexes,  $\overline{F}$  aussi.

*Remarque.* – Ceci est bien sûr faux sans hypothèse de connexité, comme le montre l'ensemble  $E = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

*Preuve de la proposition à partir du lemme 5.4.* – Soit  $\mathcal{Q}$  la famille des quadrants ne rencontrant pas  $F$ . D'après le lemme 5.4,  $F = (T_1 \times T_2) \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ . Pour montrer que  $F$  contient  $\mathcal{C}$ , il suffit de voir que chaque quadrant  $Q \in \mathcal{Q}$  est léger, ce qui est clair car il ne rencontre l'orbite d'aucun point de  $F$ .  $\square$

On va utiliser la terminologie suivante : si  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  est un quadrant basé en  $x = (x_1, x_2)$ , on note  $\partial_1 Q = \{x_1\} \times \delta_2$  (resp.  $\partial_2 Q = \delta_1 \times \{x_2\}$ ) la frontière *verticale* (resp. *horizontale*) de  $Q$ . On a ainsi  $\partial Q = \partial_1 Q \sqcup \partial_2 Q \sqcup \{x\}$ . On dit que deux quadrants  $\delta_1 \times \delta_2$  et  $\delta'_1 \times \delta'_2$  basés au même point sont *opposés* si  $\delta_1 \neq \delta'_1$  et  $\delta_2 \neq \delta'_2$ .

FAIT 5.6. – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres et  $F \subset T_1 \times T_2$  un sous-ensemble connexe à fibres convexes. Soit  $x \notin F$ .

- (1) Si  $F$  rencontre deux quadrants opposés basés en  $x$ , alors il existe un quadrant  $P$  basé en  $x$  tel que  $F$  rencontre les frontières verticales et horizontales de  $P$ .
- (2) Soit  $P$  un quadrant basé en  $x$  tel que  $F$  rencontre les frontières horizontales et verticales de  $P$ . Alors l'adhérence d'aucun quadrant opposé à  $P$  n'intersecte  $F$ . De plus,  $F$  rencontre  $P$ .

*Preuve.* – (1) Soient  $Q = \delta_1 \times \delta_2$ ,  $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$  deux quadrants opposés basés en  $x$  et rencontrant  $F$ . Puisque  $F$  est connexe et ne contient pas  $x$ ,  $F$  rencontre  $\partial Q \setminus \{x\} = \partial_1 Q \cup \partial_2 Q$ . Supposons par exemple que  $F$  rencontre  $\partial_1 Q = \{x_1\} \times \delta_2$ . Pour les mêmes raisons,  $F$  rencontre  $\partial_1 Q'$  ou  $\partial_2 Q'$ . Puisque les fibres de  $F$  sont convexes et que  $x \notin F$ ,  $F$  ne peut pas rencontrer  $\partial_1 Q'$ . Donc  $F$  rencontre les frontières verticales et horizontales du quadrant  $P = \delta'_1 \times \delta_2$ .

(2) Soit  $P = \rho_1 \times \rho_2$  un quadrant basé en  $(x_1, x_2)$  tel que  $F$  rencontre  $\partial_1 P$  et  $\partial_2 P$ . La convexité des fibres implique que  $F$  ne rencontre pas l'ensemble  $A = ({}^c\rho_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times {}^c\rho_2)$ . Soit  $Q$  un quadrant opposé à  $P$ . Puisque  $\partial Q \subset A \cup \{x\}$ , la connexité de  $F$  empêche  $F$  d'intersecter  $\overline{Q}$ .

Pour montrer que  $F$  rencontre  $P$ , il suffit de noter que  $A \cup P \cup \{x\}$  sépare  $\partial_1 P$  de  $\partial_2 P$ .  $\square$

*Preuve du lemme 5.4.* – Soit  $x = (x_1, x_2) \notin \overline{F}$ . On cherche un quadrant  $Q$  contenant  $x$  et disjoint de  $F$ . Soit  $V = V_1 \times V_2$  un voisinage ouvert de  $x$  ne rencontrant pas  $F$ . Si  $F$  ne rencontre aucun quadrant basé en  $x$ , on peut par exemple supposer que  $F$  est contenu dans  $\{x_1\} \times \delta_2$  pour une certaine direction  $\delta_2$  issue de  $x_2$ , et le résultat est clair.

Soit  $a = (a_1, a_2) \in F$  appartenant à un quadrant basé en  $x$ . Soient  $y \in V \cap ]x_1, a_1[ \times ]x_2, a_2[$ , et  $Q_y$  le quadrant basé en  $y$  contenant  $x$  (voir Figs. 5 et 6). Si  $Q_y \cap F = \emptyset$ , on a fini. Sinon,  $F$  rencontre deux quadrants opposés basés en  $y$  :  $Q_y$  et le quadrant contenant  $a$ . D'après le fait 5.6 ci-dessus, il existe un quadrant  $P_y = \rho_1 \times \rho_2$  basé en  $y$  dont  $F$  rencontre les frontières horizontales et verticales. D'après la deuxième partie du fait 5.6,  $P_y$  a une frontière (horizontale ou verticale) commune avec chaque quadrant basé en  $y$  rencontrant  $F$ . On peut donc supposer par exemple que  $P_y$  et  $Q_y$  ont en commun leur frontière verticale. Soient  $v = (y_1, v_2) \in F \cap \partial_1 P_y$ , et  $u = (u_1, y_2) \in F \cap \partial_2 P_y$ . On distingue deux cas :

1. soit  $x_2 \notin [v_2, y_2]$ .
2. soit  $x_2 \in [v_2, y_2]$ .

Plaçons-nous d'abord dans le cas 1 (Fig. 5). Puisque  $x \in Q_y$ ,  $x_2$  et  $v_2$  sont dans une même direction issue de  $y_2$  (la direction verticale de  $Q_y$ ). Donc  $[y_2, v_2]$  et  $[y_2, x_2]$  ont un segment initial non dégénéré en commun  $[y_2, z_2]$ . On a  $z_2 \neq x_2$  car sinon, le cas 2 aurait lieu et on a  $z_2 \neq v_2$  car  $F$  ne rencontre pas  $V$ . Ceci signifie que les trois directions  $\delta(y_2)$ ,  $\delta(x_2)$  et  $\delta(v_2)$  basées en  $z_2$  et contenant respectivement  $y_2, x_2$ , et  $v_2$  sont distinctes. Puisque  $x_2, z_2, y_2, a_2$  sont alignés dans cet ordre,  $a_2 \in \delta(y_2)$ .

Considérons maintenant le point  $z = (y_1, z_2) \in V$ . En particulier  $z \notin F$ . Soit  $Q'_z = \delta_1 \times \delta(x_2)$  le quadrant basé en  $z$  et contenant  $x$ . Si  $Q'_z$  ne rencontre pas  $F$ , on a terminé. Sinon, il y a

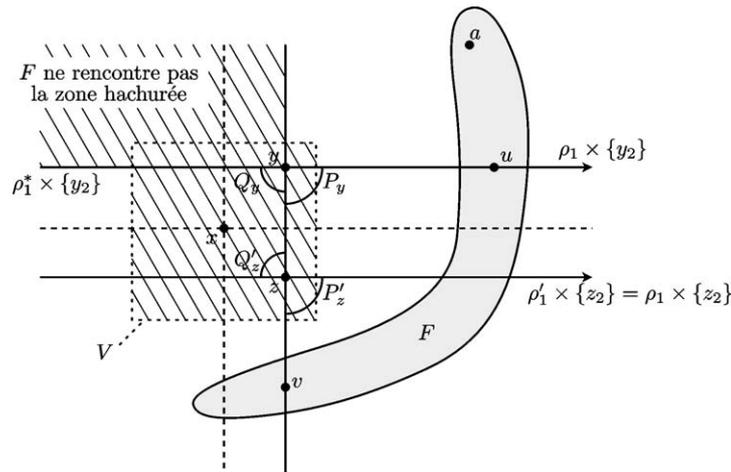


Fig. 5. Preuve du lemme 5.4, cas 1.

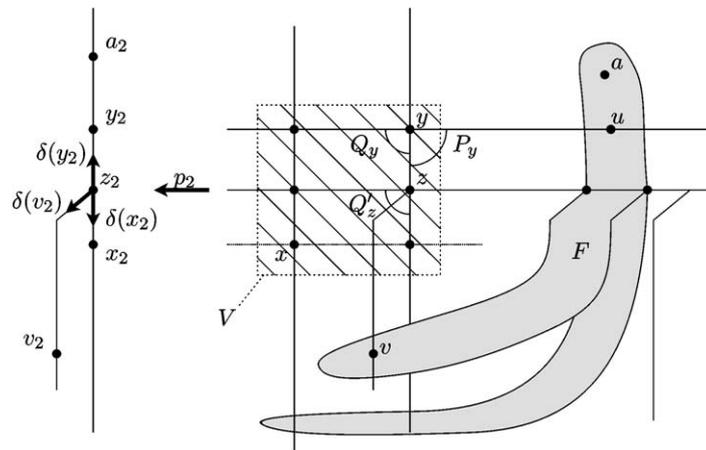


Fig. 6. Preuve du lemme 5.4, cas 2.

deux quadrants opposés, basés en  $z$  qui rencontrent  $F$  :  $Q'_z$  et le quadrant contenant  $a$ , noté  $\eta_1 \times \delta(y_2)$ . Le quadrant  $P'_z$  donné par le point 1 du fait 5.6 est l'un des deux quadrants  $\delta_1 \times \delta(y_2)$  ou  $\eta_1 \times \delta(x_2)$ . Puisque  $F$  intersecte la frontière verticale de  $P'_z$ ,  $F$  contient un point dans  $\{y_1\} \times \delta(y_2)$  ou dans  $\{y_1\} \times \delta(x_2)$ . Puisque  $v \in \{y_1\} \times \delta(v_2)$  appartient aussi à  $F$ , la convexité des fibres contredit le fait que  $z \notin F$ . Ceci conclut le cas 1.

On se place maintenant dans le cas où  $x_2 \in [v_2, y_2]$  (Fig. 6). Soit  $z = (y_1, z_2)$  où  $z_2 \in V_2 \cap ]x_2, v_2[$ . On va montrer que le quadrant  $Q'_z$  basé en  $z$  et contenant  $x$  ne rencontre pas  $F$  en trouvant un quadrant  $P'_z$  opposé à  $Q'_z$  et rencontrant  $F$  en ses deux frontières. Le fait 5.6 permet alors de conclure.

Soit  $\rho'_2$  la direction issue de  $z_2$  contenant  $v_2$ , et soit  $\rho'_1 = \rho_1$ . Puisque  $x_2 \in [v_2, y_2]$ ,  $P'_z = \rho'_1 \times \rho'_2$  est opposé à  $Q'_z$ . De plus, le choix de  $\rho'_2$  implique que  $F$  rencontre la frontière verticale de  $P'_z$ . De plus,  ${}^c\rho_1 \times \{y_2\}$  ne rencontre pas  $F$  puisque cet ensemble est contenu dans l'adhérence de l'union des quadrants opposés à  $P_y$ , et  $V$  n'intersecte pas  $F$  non plus (zone hachurée de la figure). Or  ${}^c\rho_1 \times \{y_2\} \cup V \cup \rho_1 \times \{z_2\}$  sépare  $u$  de  $v$ . Ainsi, puisque  $F$  contient  $u$  et  $v$ ,  $F$

intersecte  $\rho_1 \times \{z_2\}$ , c'est-à-dire la frontière horizontale de  $P'_z$ . Donc  $F$  rencontre les deux frontières de  $P'_z$ , ce qui implique que  $F$  ne rencontre pas  $Q'_z$ . Le quadrant  $Q'_z$  convient donc.  $\square$

### 6. Compatibilité d'actions sur les arbres

Disons que  $\mathcal{C}$  est de dimension 1 s'il ne contient aucun rectangle  $I_1 \times I_2$  où  $I_1$  et  $I_2$  sont deux arcs non dégénérés. La preuve montrera que quand  $\mathcal{C}$  est de dimension 1,  $\widehat{\mathcal{C}}$  (ou le cœur augmenté  $\widehat{\mathcal{C}}$  si  $\mathcal{C}$  n'est pas connexe) a une structure naturelle d'arbre réel qui est un raffinement commun de  $T_1$  et  $T_2$ .

**THÉORÈME 6.1** (Comparer avec [20]). – Soient  $T_1, T_2$  deux actions minimales de  $G$  sur des arbres réels telles que  $\widehat{\mathcal{C}}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$ .

Alors  $T_1$  et  $T_2$  ont un raffinement commun si et seulement si  $\mathcal{C}$  est de dimension 1.

*Remarque.* – Ce résultat est faux si l'on ne suppose pas  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  : une action abélienne sans droite invariante et l'action correspondante sur  $\mathbb{R}$  n'ont pas de raffinement commun.

*Démonstration.* – Supposons d'abord que  $T_1$  et  $T_2$  ont un raffinement commun  $T_0$ ; soit  $f_i : T_0 \rightarrow T_i$  une application équivariante préservant l'alignement. Soit  $F = (f_1, f_2) : T_0 \rightarrow T_1 \times T_2$ . D'après le corollaire 5.3,  $\overline{F(T_0)}$  contient  $\mathcal{C}$ .

Montrons que  $F(T_0)$  est de dimension 1. Dans le contexte simplicial, ce serait clair. En général, soient  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (a_1, c_2)$ ,  $c = (c_1, c_2)$ ,  $d = (c_1, a_2)$  les coins d'un rectangle non aplati contenu dans  $F(T_0)$ , et soient  $a_0, b_0, c_0, d_0$  des antécédents dans  $T_0$ . Soit  $K_0 \subset T_0$  l'enveloppe convexe de  $\{a_0, b_0, c_0, d_0\}$ . On a soit  $[a_0, b_0] \cup [c_0, d_0] = K_0$ , soit  $[b_0, c_0] \cup [d_0, a_0] = K_0$ . Supposons par exemple que  $[a_0, b_0] \cup [c_0, d_0] = K_0$ . Puisque  $f_1(a_0) = f_1(b_0)$ ,  $f_1$  est constante sur  $[a_0, b_0]$ . De même,  $f_1$  est constante sur  $[c_0, d_0]$ . Donc  $f_1$  est constante sur  $K_0$ , contradiction. On en déduit que  $\overline{F(T_0)}$  est aussi de dimension 1 : soit  $R \subset \overline{F(T_0)}$  un rectangle non dégénéré, et soit  $x \in R$  n'appartenant pas au bord de  $R$ . Alors les quatre quadrants basés en  $x$  et contenant les quatre coins de  $R$  rencontrent  $F(T_0)$ , ce qui implique, d'après le fait 5.6, que  $x \in F(t_0)$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{C}$  et donc  $\widehat{\mathcal{C}}$  soient de dimension 1. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont des arbres simpliciaux, alors  $\widehat{\mathcal{C}}$  est un graphe contractile, donc un arbre. Ainsi,  $\widehat{\mathcal{C}}$  est un raffinement de  $T_1$  et  $T_2$  car l'application  $p_i : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow T_i$  préserve l'alignement car  $\widehat{\mathcal{C}}$  est à fibres convexes.

Dans le cas général, il reste à montrer que  $\widehat{\mathcal{C}}$  est un arbre réel. On a déjà montré que  $\widehat{\mathcal{C}}$  était CAT(0), et en particulier géodésique. Supposons que  $\widehat{\mathcal{C}}$  contienne un cercle topologique plongé  $c = (c_1, c_2) : S^1 \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ . Alors  $c_1$  ne peut pas être constante, donc il existe un intervalle non dégénéré  $[a, b] \subset S^1$  avec  $c_1(a) = c_1(b) \notin c_1(]a, b[)$ . Le segment  $\{c_1(a)\} \times [c_2(a), c_2(b)]$  est contenu dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  car les fibres sont convexes. Or  $c_1(]a, b[)$  est contenu dans une direction basée en  $c_1(a)$ , donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a' \in ]a, b[$  proche de  $a$  et  $b' \in ]a, b[$  proche de  $b$  tels que  $c_1(a') = c_1(b')$ ,  $d(c_2(a), c_2(a')) < \varepsilon$  et  $d(c_2(b), c_2(b')) < \varepsilon$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit comparé à  $d(c_2(a), c_2(b))$ , les segments  $[c_2(a), c_2(b)]$  et  $[c_2(a'), c_2(b')]$  de  $T_2$  doivent se rencontrer en un intervalle non dégénéré; appelons-le  $I_2$ . Les segments  $\{c_1(a)\} \times I_2$  et  $\{c_1(a')\} \times I_2$  sont contenus dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  par convexité des fibres, ce qui implique que le rectangle  $[c_1(a), c_1(a')] \times I_2$  est contenu dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ , contradiction.  $\square$

### 7. Interprétation topologique du nombre d'intersection

Nous allons donner une interprétation topologique du nombre d'intersection de deux scindements.

Commençons par quelques définitions. Étant donné un CW-complexe  $X$  et un sous-complexe (pas forcément connexe)  $Y \subset X$ , on dit que  $Y$  est à *deux côtés* si  $Y$  a un voisinage dans  $X$  homéomorphe à  $Y \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Soit  $\tilde{X}$  le revêtement universel de  $X$ , et  $\tilde{Y}$  l'image réciproque de  $Y$  dans  $\tilde{X}$ . L'arbre dual à  $Y \subset X$  est le graphe  $T_Y$  dont les sommets sont les composantes connexes de  $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$  et les arêtes sont les composantes connexes de  $\tilde{Y}$ , une arête  $e$  étant adjacente à un sommet  $v$  si  $e \subset \bar{v}$ . La simple connexité de  $\tilde{X}$  implique que  $T_Y$  est un arbre. L'action de  $G = \pi_1(\Sigma)$  sur  $\tilde{X}$  induit clairement une action sur  $T_Y$ .

Étant donné  $Y_1, Y_2$  deux sous-complexes à deux côtés de  $X$ , on dit que  $Y_1$  et  $Y_2$  s'intersectent transversalement si  $Y_1 \cap Y_2$  possède un voisinage  $N$  homéomorphe à  $(Y_1 \cap Y_2) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2$  où  $Y_i \cap N$  correspond à  $(Y_1 \cap Y_2) \times p_i^{-1}(0)$  où  $p_i : [-\varepsilon, \varepsilon]^2 \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$  est la projection canonique.

Dans la proposition suivante,  $\#\pi_0(Y_1 \cap Y_2)$  représente le nombre de composantes connexes de  $Y_1 \cap Y_2$ .

**THÉORÈME 7.1.** – *Supposons que  $Y_1, Y_2 \subset X$  soient des sous-complexes à deux côtés s'intersectant transversalement. Soient  $T_1, T_2$  les arbres duaux, munis de l'action de  $G = \pi_1(X)$ . Alors  $i(T_1, T_2) \leq \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2)$ .*

*De plus, étant données deux actions non triviales d'un groupe sur des arbres simpliciaux  $T_1, T_2$ , il existe un complexe  $X$  et  $Y_1, Y_2 \subset X$  des sous-complexes à deux côtés s'intersectant transversalement tels que  $T_i$  soit dual à  $Y_i \subset X$  et*

$$i(T_1, T_2) = \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2).$$

*Démonstration.* – Considérons l'arbre  $T_Y$  dual à  $Y \subset X$ . Alors, il existe une application continue équivariante naturelle  $f : \tilde{X} \rightarrow T_Y$  définie en envoyant chaque composante connexe de  $\tilde{Y} \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  sur une arête et en envoyant chaque composante connexe de  $(\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  sur un sommet. L'observation principale ici est que l'image réciproque par  $f$  de tout point de  $T_Y$  est connexe.

Dans notre contexte, notons  $f_i : \tilde{X} \rightarrow T_i$  les applications définies ci-dessus, et  $F = (f_1, f_2)$ . D'après le corollaire 5.3,  $F(\tilde{X})$  contient  $\mathcal{C}$  car  $F(\tilde{X})$  est fermé (c'est un sous-complexe de  $T_1 \times T_2$ ). Puisque  $Y_1$  et  $Y_2$  s'intersectent transversalement,  $Y_1 \cap Y_2$  a un voisinage homéomorphe à  $(Y_1 \cap Y_2) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2$ , donc  $F$  envoie chaque composante connexe de  $(\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2$  sur une 2-cellule de  $T_1 \times T_2$ . De plus, l'image réciproque du centre d'une 2-cellule de  $T_1 \times T_2$  est une composante connexe de  $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2$ . Ainsi, le nombre d'orbites de 2-cellules de  $F(\tilde{X})$  est borné par le nombre d'orbites de composantes connexes de  $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2$ . On a donc

$$\begin{aligned} i(T_1, T_2) &= \#\{2\text{-cellules de } \mathcal{C}/G\} \leq \#\{2\text{-cellules de } F(\tilde{X})/G\} \\ &\leq \#\pi_0(\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2)/G = \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2). \end{aligned}$$

Prouvons maintenant qu'on peut avoir l'égalité en construisant  $X, Y_1, Y_2$  à partir de  $\hat{\mathcal{C}}$ . Soient  $\tilde{X} = \hat{\mathcal{C}}$ , et  $E_i$  l'ensemble des milieux d'arêtes de  $T_i$ , et soit  $\tilde{Y}_i = \hat{\mathcal{C}} \cap p_i^{-1}(E_i)$ . Dans la catégorie des complexes de groupes, on pourrait essentiellement prendre  $Y_i = \tilde{Y}_i/G$  et  $X = \tilde{X}/G$ . Ici, on doit modifier cette construction pour avoir des actions libres. Soit  $A$  un complexe simplement connexe sur lequel  $G$  agit librement (un 2-complexe de Cayley par exemple). Soient  $\tilde{X}' = \hat{\mathcal{C}} \times A$  muni de l'action diagonale de  $G$ , et  $\tilde{Y}'_i = \tilde{Y}_i \times A$ . Les composantes connexes de  $\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2$  sont de la forme  $x \times A$  où  $x$  est soit le centre d'une 2-cellule de  $\mathcal{C}$ , soit le milieu d'une diagonale principale de  $\hat{\mathcal{C}}$ . Ainsi, en présence de rectangles doublement légers, on a besoin de changer  $E_i$  pour que  $\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2$  ne contienne pas de point correspondant aux diagonales principales de  $\hat{\mathcal{C}}$ . Pour cela, on peut garder  $E_1$  inchangé, et prendre pour  $E_2$ , un ensemble de points  $G$ -invariant de  $T_2$ , rencontrant chaque arête en un point, mais ne contenant pas de milieu d'arête. Une fois cette

modification faite, on a une bijection entre les composantes connexes de  $\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2$  et les 2-cellules de  $\mathcal{C}$ . En particulier,  $\#\pi_0(\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2)/G = i(T_1, T_2)$ .

Soient  $X' = \tilde{X}'/G$  et  $Y'_i = \tilde{Y}'_i/G$ . Puisque  $\tilde{X}'$  est simplement connexe, et puisque l'action de  $G$  sur  $\tilde{X}'$  est libre,  $\tilde{X}'$  est un revêtement universel de  $X'$  et  $G \simeq \pi_1(\Sigma)$ . Ainsi,  $T_i$  est dual à  $Y'_i \subset X'$ , et  $i(T_1, T_2) = \#\pi_0(Y'_1 \cap Y'_2)$ .  $\square$

## 8. Cœur d'actions géométriques

Notre but est de produire un domaine fondamental pour le cœur de deux actions géométriques dans le sens faible suivant :

**THÉORÈME 8.1.** – *Soient  $T_1, T_2$  des actions géométriques d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres réels.*

*Alors, il existe  $D \subset T_1 \times T_2$  une union finie de rectangles compacts telle que  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \subset \overline{G.D}$ .*

Rappelons qu'une action minimale d'un groupe de type fini sur un arbre métrique simplicial est géométrique si et seulement si les stabilisateurs d'arêtes sont de type fini [15]. On obtient ainsi :

**COROLLAIRE 8.2** [19]. – *Soient  $T_1, T_2$  deux actions d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres simpliciaux  $T_1, T_2$ .*

*Si les stabilisateurs d'arête de  $T_1$  et  $T_2$  sont de type fini, alors  $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)/G$  est compact. En particulier,  $i(T_1, T_2)$  est fini.*

Pour des arbres réels, nous avons besoin de supposer que  $G$  est de présentation finie pour montrer la finitude du nombre d'intersection.

**PROPOSITION 8.3.** – *Soient  $T_1, T_2$  deux actions géométriques d'un groupe  $G$  de présentation finie sur des arbres réels.*

*Alors  $i(T_1, T_2)$  est fini.*

La philosophie de la preuve est la suivante : on construit un 2-complexe  $X$  avec une action cocompacte de  $G$  et deux feuilletages mesurés  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  tels que  $T_1$  et  $T_2$  soient les espaces des feuilles rendus séparés de ces feuilletages (voir ci-dessous pour le rappel des définitions). Soient  $f_i : X \rightarrow T_i$  les projections canoniques et  $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$ . Il est clair que  $F(X)$  est contenu dans l'orbite d'un nombre fini de rectangles. Si les points de  $T_i$  coïncident exactement avec les feuilles de  $\mathcal{F}_i$ , les fibres de  $f_i$  sont connexes (ce sont les feuilles) et le corollaire 5.3 implique que  $\overline{F(X)}$  contient  $\mathcal{C}$ . Le problème technique ici est qu'en général, les fibres de  $f_i$  peuvent ne pas être connexes.

### 8.1. Un exemple de nombre d'intersection infini

En guise de motivation, voici un exemple d'actions du groupe libre  $F_3$  sur deux arbres simpliciaux dont le nombre d'intersection est infini. Ceci répond à une question posée par Scott et Swarup dans [20].

**LEMME 8.4.** – *Soit  $T_1$  une action libre minimale du groupe libre  $G = \langle a, b, c \rangle$  sur un arbre simplicial, par exemple son graphe de Cayley. Soit  $H$  un sous-groupe de type infini de  $\langle a, b \rangle$ , et soit  $T_2$  l'arbre de Bass-Serre de l'amalgame  $G = \langle a, b \rangle *_H (H * \langle c \rangle)$ .*

*Alors  $i(T_1, T_2) = \infty$ .*

*Démonstration.* – D’abord,  $\mathcal{C}$  est non vide d’après la proposition 3.1. Les arbres  $T_1$  et  $T_2$  ne raffinent pas un arbre commun  $T'$  non trivial parce que tout stabilisateur d’arête de  $T'$  devrait être à la fois un stabilisateur d’arête de  $T_1$  et de  $T_2$ . D’après la proposition 4.14,  $\mathcal{C}$  est connexe. Soit  $e_2$  une arête de  $T_2$  fixée par  $H$ , et soit  $A = \mathcal{C} \cap p_2^{-1}(e_2)$ . Par minimalité,  $p_i(\mathcal{C}) = T_i$ , donc  $A \neq \emptyset$ . Puisque les fibres sont convexes,  $A$  est de la forme  $A_1 \times e_2$  où  $A_1$  est un sous-arbre non vide de  $T_1$ . On a que  $A_1$  est  $H$ -invariant et que deux arêtes de  $A_1$  sont dans la même  $H$ -orbite si et seulement si les rectangles correspondants de  $A$  sont dans la même  $G$ -orbite. Pour montrer que  $i(T_1, T_2) = \infty$ , il suffit donc de montrer que  $A_1/H$  a un nombre infini d’arêtes. L’action de  $H$  sur  $A_1$  étant libre,  $H$  est le groupe fondamental de graphe  $A_1/H$ . Puisque  $H$  n’est pas de type fini,  $A_1/H$  ne peut pas être fini.  $\square$

## 8.2. Préliminaires sur les actions géométriques

Le matériel de cette section est emprunté à [15] où on trouvera plus de détails. Un feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$  sur un 2-complexe simplicial  $X$  est la donnée, pour chaque simplexe  $\sigma$  de  $X$  d’une application affine (ici éventuellement constante, contrairement à [15])  $f_\sigma : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , définie à post-composition près par une isométrie de  $\mathbb{R}$ . On suppose que cette donnée est consistante relativement à la restriction à une face : si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , alors  $f_\tau = \varphi \circ (f_\sigma)|_\tau$  pour une certaine isométrie  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$ . Les lignes de niveaux de  $f_\sigma$  définissent un feuilletage de  $\sigma$ . On appelle simplement *2-complexe feuilleté* un 2-complexe muni d’un feuilletage mesuré. Les feuilles sont les classes pour la relation d’équivalence engendrée par la relation  $x, y$  sont dans le même simplexe fermé  $\sigma$  et  $f_\sigma(x) = f_\sigma(y)$ . La mesure transverse  $\mu(c)$  d’un chemin  $c : [0, 1] \rightarrow \sigma$  est la longueur du chemin  $f_\sigma \circ c([0, 1])$  dans  $\mathbb{R}$ . Ceci permet de définir la mesure transverse d’un chemin  $c : [0, 1] \rightarrow X$  en le découpant en un nombre fini de chemins à valeurs dans un simplexe fermé. La mesure transverse est invariante par l’holonomie le long des feuilles, et définit une distance sur chaque arête transverse au feuilletage.

On dit qu’une application  $f$  d’un simplexe  $\sigma$  vers un arbre réel  $T$  est *affine* si  $f = i \circ a$  où  $a : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$  est une application affine, et  $i : I \rightarrow T$  est une isométrie définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  contenant  $a(\sigma)$ . Étant donné un 2-complexe mesuré  $X$  et une application  $f : X \rightarrow T$  affine en restriction à chaque simplexe, il y a un feuilletage mesuré naturel  $\mathcal{F}$  sur  $X$  défini par les restrictions de  $f$  aux simplexes de  $X$ . On appelle  $\mathcal{F}$  le *feuilletage mesuré induit par  $f$* .

La pseudo-métrique

$$\delta(x, y) = \inf \{ \mu(c) \text{ pour } c \text{ joignant } x \text{ à } y \}$$

est nulle sur chaque feuille de  $X$ . Par définition, l’espace des feuilles rendu séparé  $X/\mathcal{F}$  de  $X$  est l’espace métrique obtenu en rendant  $\delta$  séparée, i.e. en identifiant les points à pseudo-distance nulle.

**THÉORÈME 8.5** [15]. – *Soit  $(X, \mathcal{F})$  un 2-complexe feuilleté. Supposons que  $\pi_1(X)$  soit normalement engendré par des classes d’homotopies libres de courbes contenues dans des feuilles.*

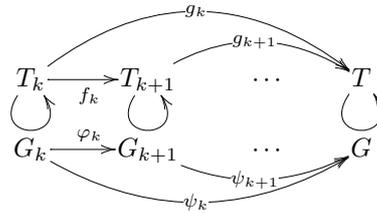
*Alors  $X/\mathcal{F}$  est un arbre réel.*

*Remarque.* – Si  $f_\sigma$  est constante sur  $\sigma$ , alors  $\sigma$  est contenue dans une feuille ; cette situation n’est pas autorisée dans [15]. En enlevant l’intérieur de ces 2-simplexes, ce qui ne change pas l’espace des feuilles rendu séparé, on se ramène au cas considéré par [15]. Lorsqu’on traite deux feuilletages mesurés simultanément, interdire ces simplexes introduirait des complications techniques inutiles.

DÉFINITION 8.6 (*Arbre dual à un 2-complexe, action géométrique*). – Soit  $G$  un groupe de type fini agissant sur un arbre réel. On dit que  $T$  est *dual* à un 2-complexe feuilleté  $X$  muni d'une action de  $G$  s'il existe une isométrie équivariante entre  $T$  et  $X/\mathcal{F}$  et si chaque arête transverse de  $X$  se plonge isométriquement dans  $X/\mathcal{F}$ .

On dit que  $T$  est *géométrique* s'il est dual à un 2-complexe feuilleté  $X$  tel que l'action de  $G$  sur  $X$  soit libre et cocompacte (et donc proprement discontinue).

Un *système inductif* d'actions sur des arbres réels est une suite d'actions de groupes de type fini  $G_k \curvearrowright T_k$  et une action  $G \curvearrowright T$ , avec des épimorphismes  $\varphi_k : G_k \rightarrow G_{k+1}$  et  $\psi_k : G_k \rightarrow G$ , et des morphismes d'arbres réels  $\varphi_k$ -équivariants (resp.  $\psi_k$ -équivariants)  $f_k : T_k \twoheadrightarrow T_{k+1}$  (resp.  $g_k : T_k \twoheadrightarrow T$ ) de sorte que les diagrammes suivants commutent :



On utilisera la notation  $f_{kk'} = f_{k'-1} \circ \dots \circ f_k : T_k \rightarrow T_{k'}$ .

DÉFINITION 8.7 (*Convergence forte*). – Un système inductif d'actions minimales de groupes de type fini sur des arbres réels *converge fortement* vers  $T$  si

- $G$  est la limite inductive des groupes  $G_k$ ,
- pour tout sous-arbre fini  $K \subset T_k$ , il existe  $k' \geq k$  tel que  $g_{k'}$  soit une isométrie en restriction à  $f_{kk'}(K)$ .

Rappelons maintenant la définition d'une convergence forte *triviale*. Si  $H$  est un groupe dénombrable agissant par isométries sur un espace métrique  $T$ , on note  $\widehat{T/H}$  l'espace métrique obtenu en rendant séparée la pseudo-métrique naturelle portée par  $T/H$ . Une limite forte est *triviale* si pour  $k$  assez grand, l'espace  $T_k/\ker \psi_k$  (qui est naturellement muni d'une action de  $G$ ) est équivariamment isométrique à  $T$ .

THÉORÈME 8.8 [15, corollaire 0.3]. – Une action d'un groupe de type fini  $G$  sur un arbre réel  $T$  est géométrique si et seulement si tout système inductif convergeant fortement vers  $T$  converge trivialement.

### 8.3. Lemme technique d'extension de feuilletage

Le lemme suivant est une petite amélioration du théorème de caractérisation des actions géométriques de [15] cité ci-dessus.

LEMME 8.9. – *Considérons une action géométrique d'un groupe de type fini sur un arbre réel  $T$ , et  $X$  un 2-complexe muni d'une action libre et cocompacte de  $G$ . Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage mesuré  $G$ -invariant sur  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow T$  une application constante sur les feuilles de  $\mathcal{F}$  et isométrique en restriction aux arêtes transverses de  $X$ .*

Alors il existe

- un 2-complexe feuilleté  $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}})$  contenant  $X$ , muni d'une action libre et cocompacte de  $G$  étendant l'action sur  $X$ ,
- et une application équivariante  $\hat{f} : \widehat{X} \rightarrow T$  étendant  $f$ , constante sur les feuilles, et qui induit une isométrie entre  $\widehat{X}/\widehat{\mathcal{F}}$  et  $T$ .

De plus, l'inclusion  $X \subset \widehat{X}$  induit un épimorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Si  $G$  est de présentation finie, on peut aussi imposer que  $\widehat{X}$  soit simplement connexe.

*Démonstration.* – La preuve est une reformulation de [15]. On choisit un gros sous-graphe connexe fini  $K$  dans le 1-squelette de  $X$ , et on va construire un complexe feuilleté  $(X_K, \mathcal{F}_K)$  contenant  $X$  et tel que  $X_K/\mathcal{F}_K \rightarrow T$  soit une isométrie en restriction à l'image de  $K$ .

Notons d'abord que l'ensemble  $K_0 = f(K)$  est un arbre fini, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Il a donc une structure simpliciale naturelle. On peut subdiviser cette structure de sorte que pour tout sommet  $v$  de  $K$ ,  $f(v)$  soit un sommet de  $K_0$ . Soit  $C_K$  l'espace obtenu par recollement de  $K \times [0, 1]$  sur  $K_0$  via l'application  $K \times \{1\} \rightarrow K_0$  envoyant  $(x, 1)$  sur  $f(x)$ . Il y a un feuilletage mesuré naturel sur  $C_K$  induit par le feuilletage de  $K \times [0, 1]$  par  $\{*\} \times [0, 1]$ . L'espace  $C_K$  peut être facilement muni d'une structure de complexe simplicial sans subdiviser  $K \times \{0\}$ . De plus, l'application  $f : X \rightarrow T$  s'étend de manière unique en une application  $f_K : X_K \rightarrow T_K$  constante sur les feuilles, et isométrique en restriction aux arêtes transverses. Par construction, l'image de  $K$  dans  $X_K/\mathcal{F}_K$  se plonge isométriquement dans  $T$ .

Soit  $(X_K, \mathcal{F}_K)$  le 2-complexe feuilleté obtenu en collant sur  $X$  l'espace  $G \times C_K$  via l'application  $G \times K \times \{0\} \rightarrow X$  envoyant  $(g, (x, 0))$  sur  $g.x$ . Il se pourrait que  $X_K/\mathcal{F}_K$  ne soit pas un arbre réel (pour appliquer le théorème 8.5, on aurait besoin que  $\pi_1(X_K)$  soit engendré par des classes d'homotopie libres de courbes contenues dans des feuilles). On va prendre un revêtement de  $X_K$ , muni d'une action d'un groupe  $G_K$  pour y remédier. Le but est ensuite de faire grossir  $K$  pour appliquer la caractérisation des actions géométriques du théorème 8.8.

L'ensemble  $X_K$  est muni d'une action libre de  $G$ , donc  $X_K$  est un revêtement de  $\overline{X}_K = X_K/G$ . Soit  $N_K$  l'image de  $\pi_1(X_K)$  dans  $\pi_1(\overline{X}_K)$  de sorte que  $G \simeq \pi_1(\overline{X}_K)/N_K$ . Si  $G$  est de présentation finie, on peut choisir  $K$  assez grand de sorte que  $\pi_1(K)$  engendre normalement  $\pi_1(X)$ , ce qui signifie que  $X_K$  est simplement connexe et que  $N_K = \{1\}$ . Dans ce cas, on peut directement appliquer le théorème 8.5 et obtenir que  $X_K/\mathcal{F}_K$  est un arbre réel.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G}_K = \pi_1(\tilde{X}_K)/\tilde{N}_K & \curvearrowright & \tilde{X}_K \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G = \pi_1(\overline{X}_K)/N_K & \curvearrowright & X_K \\
 & & \downarrow \\
 & & \overline{X}_K
 \end{array}$$

Soit  $\tilde{N}_K \subset N_K$  le sous-groupe distingué de  $\pi_1(\tilde{X}_K)$  engendré par les classes d'homotopie libre de courbes contenues dans une feuille et représentant un élément de  $N_K$ . Soit  $\tilde{X}_K$  le revêtement galoisien de  $\overline{X}_K$  dont le groupe de transformations est  $G_K = \pi_1(\tilde{X}_K)/\tilde{N}_K$ . Soit  $\tilde{\mathcal{F}}_K$  le relevé du feuilletage mesuré à  $\tilde{X}_K$ . D'après le théorème 8.5, l'espace  $T_K = \tilde{X}_K/\tilde{\mathcal{F}}_K$  est un arbre réel. Soient  $\varphi_K : \tilde{G}_K \twoheadrightarrow G$  l'épimorphisme naturel et  $g_K : T_K \rightarrow T$  l'application naturelle  $\varphi_K$ -équivariante.

La construction est naturelle relativement aux inclusions  $K \subset K'$  : si  $K \subset K'$ , il y a un morphisme  $\varphi_{KK'} : G_K \twoheadrightarrow G_{K'}$ , et un morphisme d'arbres réels  $\varphi_{KK'}$ -équivariant  $g_{KK'} : T_K \rightarrow T_{K'}$ .

Il est clair que  $G$  est la limite inductive de  $G_K$  (relativement à  $\varphi_{KK'}$  et à  $\varphi_K$ ) puisque toute relation de  $G$  est tuée lors de l'opération de cône dans  $X_K$  pour  $K$  assez gros. De plus, par

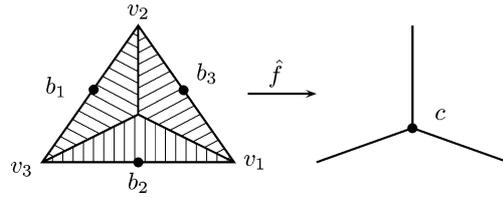


Fig. 7. Extension de  $f$ .

construction,  $T_K$  converge fortement vers  $T$  quand  $K$  devient de plus en plus gros (on peut prendre une exhaustion du 1-squelette de  $X$  par des graphes finis).

D'après le théorème 8.8, cette convergence est triviale. Cela signifie que pour  $K$  assez grand, l'application naturelle  $T_K / \ker \varphi_K \rightarrow T$  est une isométrie. Mais puisque  $\tilde{X}_K / \ker \varphi_K = X_K$ , on a  $T_K / H_K = X_K / \mathcal{F}_K$ , donc  $g_K : X_K / \mathcal{F}_K \rightarrow T$  est une isométrie.  $\square$

### 8.4. Deux feuilletages sur un complexe

PROPOSITION 8.10. – Soient  $G$  un groupe de type fini, et  $T_1, T_2$  deux actions géométriques de  $G$  sur des arbres réels.

Alors il existe un 2-complexe feuilleté  $X$  muni d'une action libre et cocompacte de  $G$ , et deux feuilletages mesurés  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  sur  $X$  tels que  $T_1$  et  $T_2$  soient duaux à  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  au sens de la définition 8.6.

De plus, si  $G$  est de présentation finie, on peut supposer  $X$  simplement connexe.

Rappelons qu'une application  $f$  d'un simplexe vers un arbre réel est affine si  $c$ 'est la composée d'une application affine vers  $\mathbb{R}$  suivie par une isométrie vers  $T$ .

Le fait suivant est standard.

FAIT 8.11. – Soient  $X$  un 2-complexe simplicial,  $T$  un arbre réel, et  $f : X_0 \rightarrow T$  une application définie sur un sous-complexe  $X_0$  contenant le 1-squelette de  $X$ , de sorte que  $f$  soit affine en restriction à chaque arête.

Alors, il existe une extension naturelle  $\hat{f} : X \rightarrow T$  de  $f$ , et une subdivision naturelle de  $X$  qui ne change pas la structure simpliciale sur  $X_0$ , telles que pour chaque simplexe  $\sigma \subset X_0 \setminus X$  de la nouvelle subdivision,  $f|_\sigma$  soit affine.

Si un groupe  $G$  agit sur  $X$  et  $T$  et si  $f$  est équivariante, alors la subdivision et  $\hat{f}$  sont équivariantes.

Preuve. – Voir Fig. 7. Soit  $\tau$  un simplexe de  $X_0 \setminus X$ . Soient  $e_1, e_2, e_3$  le côtés de  $\tau$ , et  $v_1, v_2, v_3$  ses sommets de sorte que  $v_i \notin e_i$ . Si  $f(\partial\tau)$  ne contient pas de tripode (i.e.  $f(\partial\tau)$  contenu dans un arc  $T$ ), alors  $f$  peut être étendue de manière unique en une application affine sur  $\tau$  (sans subdivision). Sinon, soit  $c$  le centre du tripode  $f(\partial\tau)$ , et pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , soit  $b_i$  son unique antécédent dans  $e_i$ . On subdivise  $\tau$  en introduisant  $b$  le barycentre de  $\{b_1, b_2, b_3\}$ , et en coupant  $\tau$  le long des trois segments  $[v_i, b]$ . On définit  $\hat{f}(b) = c$  et on étend  $\hat{f}$  de manière affine aux trois nouvelles arêtes. Maintenant,  $\hat{f}$  envoie le bord de chaque nouveau triangle sur un intervalle, donc  $\hat{f}$  s'étend de manière unique aux nouveaux triangles en une application affine.  $\square$

Preuve de la proposition 8.10. – Puisque  $T_1$  est géométrique, soit  $X$  un 2-complexe feuilleté tel que  $T_1$  soit dual à  $X$ . Plus précisément,  $X$  est muni d'une action libre cocompacte de  $G$  et d'un feuilletage mesuré  $\mathcal{F}_1$ , tel que  $T_1$  soit l'espace des feuilles rendu séparé de  $\mathcal{F}_1$ , et tel

que les arêtes transverses se plongent isométriquement dans  $T_1$ . Soit  $f_1 : X \rightarrow T_1$  l'application canonique.

Notons que si  $G$  est de présentation finie, on peut supposer que  $\pi_1(X)$  est engendré par les classes d'homotopie libre de courbes contenues dans des feuilles [15, Remark 2.3], et même que  $X$  est simplement connexe (en appliquant le lemme 8.9).

Définissons maintenant une application équivariante  $f : X \rightarrow T_2$ . On définit d'abord de manière arbitraire une application équivariante sur le 0-squelette (on peut car l'action sur  $X$  est libre). On étend ensuite  $f$  affinement au 1-squelette, et on utilise le fait ci-dessus pour étendre  $f$  au 2-squelette, après avoir éventuellement subdivisé  $X$ . Soit  $\mathcal{F}_2$  le feuilletage mesuré sur  $X$  induit par  $f$ .

Le lemme 8.9 montre qu'on peut agrandir  $X$  en un 2-complexe feuilleté  $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}}_2)$  de sorte que  $T_2$  soit dual à  $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}}_2)$ . Si  $G$  est de présentation finie,  $\widehat{X}$  est simplement connexe.

On étend maintenant  $f_1$  et  $\mathcal{F}_1$  à  $\widehat{X}$  : on définit  $\widehat{f}_1$  sur l'ensemble des sommets de  $\widehat{X} \setminus X$  de n'importe quelle manière équivariante, on étend  $\widehat{f}_1$  aux arêtes de  $\widehat{X} \setminus X$  affinement ; puis au 2-squelette grâce au fait 8.11 ; on définit  $\widehat{\mathcal{F}}_1$  comme le feuilletage mesuré induit par  $\widehat{f}_1$ . Puisqu'on a des applications naturelles 1-lipschitziennes  $X/\mathcal{F}_1 \rightarrow \widehat{X}/\widehat{\mathcal{F}}_1 \rightarrow T_1$ , et puisque  $X/\mathcal{F}_1 \rightarrow T_1$  est une isométrie, on obtient une isométrie équivariante entre  $\widehat{X}/\widehat{\mathcal{F}}_1$  et  $T_1$ .  $\square$

### 8.5. Un domaine faiblement fondamental

*Preuve du théorème 8.1.* – Soient  $X, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  un 2-complexe muni de deux feuilletages mesurés comme dans la proposition 8.10 ci-dessus. Soit  $f_i : X \rightarrow T_i$  l'application naturelle, et  $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$ . Il est clair que  $F(X)$  est connexe et  $G$ -invariant. L'image de chaque simplexe est contenue dans un rectangle. Puisque  $X$  a un nombre fini d'orbites de simplexes,  $F(X)$  est contenu dans  $G.D$  où  $D$  est une union finie de rectangles.

L'idée est que  $F(X)$  devrait être à fibres connexes car les fibres devraient coïncider avec l'image d'une feuille. Ceci n'est pas tout à fait vrai car les points de  $X/\mathcal{F}_i$  ne coïncident pas toujours avec les feuilles de  $X$ . Cependant, par définition de la distance sur  $X/\mathcal{F}_i$ , on a une propriété plus faible :

**DÉFINITION 8.12 (Faible connexité des fibres).** – On dit qu'un sous-ensemble  $F \subset T_1 \times T_2$  est à fibres faiblement connexes si pour tout  $a, b \in F$  tels que  $p_i(a) = p_i(b)$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un chemin  $c : [0, 1] \rightarrow F$  joignant  $a$  à  $b$  dans  $F$  tel que  $p_i \circ c([0, 1])$  soit contenu dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $p_i(a)$ .

La preuve du théorème 8.1 se termine avec le fait qui suit.  $\square$

**FAIT 8.13.** – Soit  $F \subset T_1 \times T_2$  un ensemble connexe à fibres faiblement connexes. Alors  $\overline{F}$  est à fibres convexes.

*Démonstration.* – Soit  $F_V$  la réunion des enveloppes convexes des fibres verticales de  $F$ . Par définition, les fibres verticales de  $F_V$  sont convexes. On a  $F_V \subset \overline{F}$ . En effet, soit  $x \in F_V \setminus F$  de sorte que  $x$  appartienne à un segment vertical  $\{x_1\} \times [a_2, b_2]$  dont les extrémités sont dans  $F$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $c$  un chemin de  $F$  joignant  $(x_1, a_2)$  à  $(x_1, b_2)$ , et tel que  $p_1 \circ c$  soit contenu dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\{x_1\}$ . Alors  $p_2 \circ c([0, 1])$  contient  $x_2$ . Ceci implique que  $x$  appartient à l'adhérence de sa fibre horizontale  $(F \cap T_1) \times \{x_2\}$ , et en particulier que  $F_V \subset \overline{F}$ . Ceci implique aussi que les fibres de  $F$  qui étaient connexes restent connexes dans  $F_V$ , que  $F_V$  est connexe, et est à fibres horizontales faiblement connexes.

Soit  $F_{V,H}$  la réunion des enveloppes convexes des fibres horizontales de  $F_V$ . L'argument symétrique montre que les fibres horizontales et verticales de  $F_{V,H}$  sont convexes, et que  $F_{V,H} \subset \overline{F}$ . Le corollaire 5.5 conclut que  $\overline{F}$  est à fibres convexes.  $\square$

**8.6. Finitude du nombre d'intersection**

*Preuve de la proposition 8.3.* – Soit  $G$  de présentation finie. Soient  $X, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  un 2-complexe muni de deux feuilletages mesurés comme dans la proposition 8.10 avec  $X$  simplement connexe. Soient  $f_i : X \rightarrow T_i$  l'application naturelle, et  $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$ .

D'après le lemme 3.4 de [15], l'application naturelle de l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_i$  (non rendu séparé) vers  $X/\mathcal{F}_i$  est injective à l'extérieur d'un ensemble dénombrable. En particulier, il y a au plus un nombre dénombrable de fibres de  $F(X)$  qui ne sont pas connexes. Puisque  $F(X)$  est connexe,  $G$ -invariant, et contenu dans  $G.D$  où  $D$  est une union finie de rectangles de  $T_1 \times T_2$ , le lemme suivant permet de conclure.  $\square \square$

LEMME 8.14. – *Soit  $F \subset T_1 \times T_2$  un ensemble connexe, à fibres faiblement connexes, tel qu'un nombre au plus dénombrable de feuilles horizontales et verticales ne soient pas convexes. Alors  $\overline{F}$  est à fibres convexes et  $\overline{F} \setminus F$  est de mesure nulle.*

*Démonstration.* – La première assertion découle du fait 8.13. Soit  $F_V$  la réunion des enveloppes convexes des fibres verticales de  $F$ . Clairement,  $F_V \setminus F$  est de mesure nulle. De plus, la preuve du fait 8.13 montre que les fibres horizontales de  $F$  qui étaient convexes restent convexes, l'ensemble des fibres horizontales de  $F_V$  non convexes est au plus dénombrable. L'argument symétrique montre que  $F_{V,H}$  est à fibres convexes. Puisque  $F_{V,H} \setminus F$  est de mesure nulle, la preuve découle du lemme suivant.  $\square$

LEMME 8.15. – *Soit  $F \subset T_1 \times T_2$  un ensemble convexe à fibres convexes. Alors  $\overline{F} \setminus F$  est de mesure nulle.*

*Démonstration.* – Il suffit de montrer que la trace de  $\overline{F} \setminus F$  sur chaque rectangle est de mesure nulle. Soient  $R_0$  un rectangle et  $J_i = p_i(\overline{F} \cap R_0)$ . Soit  $R = J_1 \times J_2$ . Puisque  $\overline{F} \cap R_0 \subset R$ , on veut montrer que  $(\overline{F} \setminus F) \cap R$  est de mesure nulle. D'après le lemme 5.4,  $\overline{F}$  est le complémentaire d'une union de quadrants. Quitte à changer  $T_1$  et  $T_2$  en  $p_1(\overline{F})$  et  $p_2(\overline{F})$ , on peut aussi supposer que  $p_i(\overline{F}) = T_i$ . D'après le lemme 4.17, on a un semi-flot  $\varphi_t$  lipschitzien qui rétracte  $T_1 \times T_2$  sur  $\overline{F}$  pour lequel  $R$  est  $\varphi_t$ -invariant.

On va montrer que  $\overline{F} \setminus F$  est contenu dans  $\varphi_\infty(\partial R)$ . Le fait que  $\varphi$  est lipschitzien conclura le lemme. Soit  $x = (x_1, x_2) \in (\overline{F} \setminus F) \cap R$ . On peut supposer  $x \notin \partial R$ . Considérons les quatre rectangles ouverts obtenus en subdivisant  $R$  verticalement et horizontalement en  $x$ . Au moins un de ces rectangles ne rencontre pas  $\overline{F}$  (d'après les points 1 et 2 du fait 5.6), appelons-le  $S$ . Partant de  $x$ , on peut alors suivre le semi-flot dans  $S$  en remontant le temps, jusqu'à atteindre le bord de  $R$  en un point  $x_0$ . On a  $\varphi_{t_0}(x_0) = x$  pour un certain  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , et  $\varphi_\infty(x_0) = \varphi_\infty(x) = x$  car  $x \in \overline{F}$ .  $\square$

**9. Application aux automorphismes du groupe libre**

Dans cette section, on étudie plus en détail le cas des arbres attractif et répulsif d'un automorphisme extérieur du groupe libre.

Notre point de départ est le résultat suivant dû à Levitt et Lustig :

THÉORÈME 9.1 [14]. – *Soit  $\alpha$  un automorphisme d'un groupe libre de type fini  $G$ . Alors il existe deux actions de  $G$  sur des arbres réels  $T_1, T_2$  et deux homothéties  $h_1 : T_1 \rightarrow T_1$ , et  $h_2 : T_2 \rightarrow T_2$  ayant pour constante de dilatation  $\lambda_1, \lambda_2$  telles que*

- $h_i$  est  $\alpha$ -équivariant (i.e.  $h_i(g.x) = \alpha(g).h_i(x)$ ),
- $\lambda_1 \geq 1, \lambda_2 \leq 1$ ,
- l'action de  $G$  sur  $T_i$  est à stabilisateurs d'arcs triviaux,

- $g \in G$  est elliptique dans  $T_1$  si et seulement s'il est elliptique dans  $T_2$ ,
- il existe  $\eta > 0$  tel que si  $l_{T_1}(g) + l_{T_2}(g) \leq \eta$  alors  $g$  est elliptique dans  $T_1$  et  $T_2$ .

Ceci implique que l'action de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  est discrète. On dit qu'un automorphisme  $\alpha$  est *complètement irréductible* s'il n'y a pas de facteur libre de  $G$  qui soit périodique sous l'action de  $\alpha$  à conjugaison près. Le théorème ci-dessus a été démontré pour les automorphismes complètement irréductibles dans [16] et [1,2]. De plus, dans ce cas, l'action de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  est libre, sauf si  $\alpha$  est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov sur une surface à bord.

Le but de cette section est le résultat suivant.

**THÉORÈME 9.2.** – *Soit  $\alpha$  un automorphisme d'un groupe libre de type fini  $G$ , et soient  $T_1, T_2$  comme ci-dessus.*

*Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  soient des actions géométriques et que  $\lambda_1 > 1$ . Alors, il existe un sous-ensemble  $G$ -invariant, cofini (discret)  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  du cœur tel que*

- $\mathcal{C}$  admet une structure de complexe simplicial et  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$  est une surface,
- le link de  $\mathcal{C}$  en chacun des points de  $\mathcal{S}$  est une union disjointe de cercles et de droites,
- l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C}$  est discrète et cocompacte, et elle est proprement discontinue sur  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ ,
- $\Sigma = \mathcal{C}/G$  est une surface pincée, et  $\Sigma \setminus (\mathcal{S}/G)$  est une surface compacte avec un nombre fini de trous,
- $\Sigma$  est muni de deux feuilletages mesurés transverses  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , et l'application  $H = (h_1, h_2)$  induit un homéomorphisme de  $\Sigma$  préservant les deux feuilletages, et multipliant la mesure transverse de  $\mathcal{F}_i$  par  $\lambda_i$ ; de plus  $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ .

Dans ce théorème, une *surface pincée* est un espace obtenu à partir d'une surface compacte en écrasant en un point un nombre fini de sous-ensembles finis non vides. De manière équivalente, c'est un 2-complexe fini dans lequel le link en tout sommet est une union disjointe de cercles.

**COROLLAIRE 9.3.** – *Supposons que  $\alpha$  soit complètement irréductible. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont tous deux géométriques, alors  $\alpha$  est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov sur une surface à bord.*

### 9.1. Une structure de 2-complexe

D'après le théorème 8.1, on a un domaine fondamental faible pour  $\mathcal{C}$  : il existe un ensemble fini de rectangles  $\mathcal{D}$  tel que l'adhérence de l'ensemble  $X = \bigcup_{R \in \mathcal{D}, g \in G} g.R$  soit connexe à fibres connexes, ce qui implique que  $\mathcal{C} \subset \overline{X}$

Notre premier objectif est de prouver que  $X$  est fermé et possède une structure de 2-complexe  $G$ -invariante, et que l'action de  $G$  est proprement discontinue en dehors d'un ensemble  $\mathcal{S}_0$  (corollaire 9.11).

Tout d'abord,  $\mathcal{C}$  est non vide puisque  $T_1$  et  $T_2$  sont irréductibles. De plus, il ne peut y avoir de rectangle doublement léger car sinon, il y aurait un arc dans  $T_1$  ne contenant pas de point de branchement, et les images de cet arc par des puissances de  $h_1$  donneraient des arcs arbitrairement grands sans point de branchement ce qui est impossible car par minimalité, il existe un arbre fini dont les translatés par  $G$  recouvrent  $T_1$ . On a donc  $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{C}}$ .

Sur  $T_1 \times T_2$ , on utilise la distance  $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_{T_1}(x_1, y_1) + d_{T_2}(x_2, y_2)$ . On note aussi  $l(g) = l_{T_1}(g) + l_{T_2}(g)$ . Soit  $\eta$  tel que  $l(g) < \eta \implies l(g) = 0$ , et soit  $\mathcal{S}_0 \subset T_1 \times T_2$  l'ensemble des points de  $T_1 \times T_2$  dont le stabilisateur est non trivial.

**LEMME 9.4.** – *Deux points distincts  $x, x' \in \mathcal{S}_0$  sont à distance au moins  $\eta/2$ .*

*Démonstration.* – Soient  $g, g' \in G \setminus \{1\}$  fixant  $x$  et  $x'$ . Puisque les stabilisateurs d'arcs sont triviaux,  $\text{Fix } g$  et  $\text{Fix } g'$  sont réduits à un point dans  $T_1$  et  $T_2$ . Mais la longueur de translation de

$gg'$  dans  $T_i$  est donnée par  $2d_{T_i}(\text{Fix } g, \text{Fix } g')$ . Donc  $l(gg') = 2d(x, x')$ , donc  $d(x, x') = 0$  ou  $d(x, x') > \eta/2$ .  $\square$

LEMME 9.5. – Si  $d(x, g.x) < \eta$  alors  $g$  a un point fixe  $y$  tel que  $d(x, y) = d(x, g.x)/2$ .

*Démonstration.* – Puisque  $d(x, g.x) < \eta$ ,  $l(g) < \eta$  donc  $g$  est elliptique dans  $T_1$  et  $T_2$ . Ceci implique que  $g$  fixe le milieu de  $[x_i, g.x_i]$  dans  $T_i$ .  $\square$

LEMME 9.6. – L'ensemble  $X$  est fermé dans  $T_1 \times T_2$ .

On en déduit que  $X$  est à fibres connexes et contient  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* – Soit  $x \in \overline{X}$ ; considérons une suite  $(x_i)$  dans  $\bigcup_{R \in \mathcal{D}} R$ , et une suite  $g_i \in G$  tels que  $g_i.x_i$  converge vers  $x$ . Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que  $x_i$  converge vers un point  $a$ . Ceci implique que  $g_i.a$  converge vers  $x$ . Si pour un certain  $i$  et une infinité de  $j > i$ ,  $g_j.g_i^{-1} = 1$ , alors  $x \in X$ , et on a terminé. Sinon, étant donné  $\varepsilon > 0$ , pour  $i$  assez grand et tout  $j > i$ ,  $g_j.g_i^{-1}$  déplace le point  $g_i.a$ , et donc  $x$  de moins de  $\varepsilon$ . Par conséquent, tous les éléments  $g_j.g_i^{-1}$  ont un point fixe commun  $b$  tel que  $d(b, x) \leq \varepsilon$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient  $b = x$ , donc  $d(g_j.a, x)$  est constante. Cette constante doit être nulle donc  $x \in X$ .  $\square$

À partir de maintenant, on subdivise  $\mathcal{D}$  de sorte que chaque rectangle  $R \in \mathcal{D}$  soit de diamètre au plus  $\eta/10$ , et que  $R \cap \mathcal{S}_0$  soit vide ou constitué seulement d'un coin de  $R$ .

LEMME 9.7. – L'espace  $X \setminus \mathcal{S}_0$  est localement compact, et  $G$  agit proprement discontinûment sur  $X \setminus \mathcal{S}_0$ .

Plus précisément, tout point de  $X \setminus \mathcal{S}_0$  possède un voisinage  $V$  tel que, pour tout  $R \in \mathcal{D}$ , il y ait au plus un élément  $g \in G$  tel que  $g.R$  rencontre  $V$ .

*Démonstration.* – Il suffit de prouver la seconde partie de l'énoncé. Soient  $x \notin \mathcal{S}_0$  et  $V = V_1 \times V_2$  le produit de deux boules autour de  $x$  de rayon au plus  $\eta/10$ , et tel que  $V$  ne rencontre pas  $\mathcal{S}_0$ . Fixons un rectangle  $R \in \mathcal{D}$  et supposons que  $g_1.R, g_2.R$  intersecte  $V$  pour  $g_1 \neq g_2 \in G$ . Alors  $h = g_2.g_1^{-1}$  déplace un certain point de  $g_2.R \cap V$  d'au plus  $\eta/2$ , donc  $h$  a un point fixe  $y = (y_1, y_2)$  à distance au plus  $\eta/2$  de  $x$ . Puisque  $R$  rencontre  $\mathcal{S}_0$  seulement aux coins de  $R$ ,  $g_1.R$  est contenu dans un quadrant  $\delta_1 \times \delta_2$  basé en  $y$ . Puisque  $y \notin V$ , on peut supposer que  $y_1 \notin V_1$ , donc que  $V_1$  est contenu dans  $\delta_1$ . Puisque l'action de  $\text{Stab}\{y_1\}$  sur l'ensemble des directions issues de  $y_1$  est libre,  $p_1(h.R) \subset h.\delta_1$  implique que  $h.R$  ne rencontre pas  $V$ .  $\square$

LEMME 9.8. – Il existe une subdivision de  $\mathcal{D}$  et un ensemble cofini  $G$ -invariant  $\mathcal{S}$  tels que

- deux rectangles distincts de  $G.\mathcal{D}$  s'intersectent en un segment (peut-être un point ou l'ensemble vide) contenu dans un côté de  $R$ , et dont les extrémités sont dans  $\mathcal{S}$ ;
- pour tout rectangle  $R \in \mathcal{D}$ ,  $\overset{\circ}{R}$  est ouvert dans  $X$ .

De plus,  $X$  a une structure  $G$ -invariante de complexe simplicial avec un nombre fini d'orbites de cellules ayant  $\mathcal{S}$  pour ensemble de sommets.

Dans l'énoncé,  $\overset{\circ}{R}$  signifie  $R$  privé de son bord.

*Remarque.* – Les rectangles de  $\mathcal{D}$  ne font pas de  $X$  un complexe rectangulaire. Il n'y a en général pas de décomposition de  $X$  en complexe rectangulaire à côtés horizontaux ou verticaux comme le montre l'exemple d'un tore muni de deux feuilletages irrationnels.

*Démonstration.* – Pour tout rectangle  $R = I_1 \times I_2 \in \mathcal{D}$ , soit  $\mathcal{I}(R)$  l'ensemble fini des translatsés des rectangles  $R' \in \mathcal{D}$  qui intersectent  $R$  en un rectangle non dégénéré. Soit  $\mathcal{I}_i(R) \subset I_i$  l'ensemble fini des extrémités des projections sur  $I_i$  des rectangles  $R \cap R'$  pour  $R' \in \mathcal{I}(R)$ . En subdivisant chaque rectangle  $R = I_1 \times I_2 \in \mathcal{D}$  le long de  $\mathcal{I}_1(R) \times I_2 \cup I_1 \times \mathcal{I}_2(R)$ , on obtient que  $g.R' \cap R$  est au plus un segment dès que  $g.R' \neq R$ .

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points de  $X$  qui sont une extrémité (ou un coin) de l'intersection de deux éléments de  $G\mathcal{D}$ . On a clairement  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ , et  $\mathcal{S}$  rencontre chaque rectangle de  $\mathcal{D}$  en un ensemble fini, donc  $\mathcal{S}/G$  est fini.

Le fait que  $\overset{\circ}{R}$  (i.e. un rectangle privé de son bord) est ouvert dans  $X$  se déduit du fait que deux rectangles ne s'intersectent que le long de leur bord, et qu'un point de  $\overset{\circ}{R}$  a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de rectangles.

Enfin, on triangule  $X$  ainsi : étant donné  $R \in \mathcal{D}$ , on choisit une triangulation de  $R$  dont l'ensemble des sommets est  $R \cap \mathcal{S}$  (il contient les coins de  $R$ ). Puisqu'étant donnés  $R, R' \in \mathcal{D}$  il y a au plus un élément  $g \in G$  tel que  $g.R = R'$ , on peut étendre cette triangulation de manière équivariante à  $X$ .  $\square$

## 9.2. Le cœur comme sous-complexe

On va maintenant montrer que quitte à subdiviser notre structure de 2-complexe sur  $X$ ,  $\mathcal{C}$  est un sous-complexe de  $X$ .

LEMME 9.9. – Soient  $R \in \mathcal{D}$ ,  $x \in \overset{\circ}{R}$ , et soit  $Q$  un quadrant basé en  $x$  et ne rencontrant pas  $R$ . Alors,  $Q$  ne rencontre pas  $X$ .

*Démonstration.* – Supposons au contraire qu'il existe  $y = (y_1, y_2) \in X \cap Q$ . Soient  $Q = \delta_1 \times \delta_2$ , et  $(b_1, b_2)$  le point base de  $Q$ . Soit  $c = (c_1, c_2) : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin reliant  $y$  à  $x$  dans  $X$ , et soit  $t_0$  le premier instant pour lequel une coordonnée de  $c(t_0)$  est égale à  $b_1$  ou  $b_2$ . Pour  $t < t_0$ , on a  $c(t) \notin R$ . Puisque  $\overset{\circ}{R}$  est ouvert dans  $X$ ,  $c(t_0) \neq (b_1, b_2)$ . Supposons donc que  $c_1(t_0) = b_1$  et  $c_2(t_0) \in \eta_2$ . Puisque les fibres de  $X$  sont convexes,  $\{b_1\} \times [b_2, c_2(t_0)] \subset X$ , ce qui contredit le fait que  $\overset{\circ}{R}$  est ouvert dans  $X$ .  $\square$

LEMME 9.10. – Il existe une subdivision équivariante de chaque rectangle de  $\mathcal{D}$  en sous-rectangles telle que pour tout  $R \in \mathcal{D}$ ,  $R \subset \mathcal{C}$  ou  $R \cap \mathcal{C} \subset \partial R$ .

*Démonstration.* – Soit  $R \in \mathcal{D}$  un rectangle non contenu dans  $\mathcal{C}$ . On va démontrer que  $\mathcal{C} \cap R$  peut être obtenu à partir de  $R$  en enlevant un nombre fini de quadrants. Le lemme en découle facilement.

Soit  $Q$  un quadrant léger. On a une des situations suivantes :

1.  $\overset{\circ}{R} \subset Q$ , ou  $R \cap Q = \emptyset$ ;
2. ou  $R \cap Q$  est un demi-rectangle ouvert ;
3. ou  $R \cap Q$  contient exactement un coin de  $R$ .

Les quadrants de type 1 ne posent pas de problème. Quitte à subdiviser  $R$ , on peut éviter les quadrants de type 2. En effet, soit  $I$  un côté de  $R$ , et soit  $L_I \subset R$  l'union des traces sur  $R$  de tous les quadrants légers de type 2 contenant  $I$ . Si  $L_I$  contient  $\overset{\circ}{R}$ , alors  $\mathcal{C}$  ne rencontre pas  $\overset{\circ}{R}$  et on a fini. Sinon, on peut découper  $R$  en  $\overline{L_I}$  et  $R \setminus L_I$ . En effectuant cette opération pour les quatre côtés de  $R$ , on évite l'occurrence de quadrants de type 2.

Un quadrant de type 3 est nécessairement basé en un point  $x \in R$ . Soient  $c = (c_1, c_2)$  un coin de  $R$ , et  $L_c$  la réunion des traces sur  $R$  des quadrants légers de type 3 contenant  $c$ , et supposons que  $L_c \neq \emptyset$ . On va montrer que  $L_c$  est lui-même la trace d'un quadrant léger de type 3. Le lemme s'en déduira puisque  $R \cap \mathcal{C}$  sera obtenu en enlevant au plus 4 quadrants à  $R$ .

Soit  $]a, c[ = ]a_1, c_2[ \times \{c_2\}$  et  $]b, c[ = \{c_1\} \times ]b_2, c_2[$  l'intersection de  $L_c$  avec les deux côtés de  $R$  contenant  $c$ . Soit  $P = \rho_1 \times \rho_2$  le quadrant basé en  $(a_1, b_2)$  contenant  $c$ . Il est clair que tout quadrant léger  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  de type 3 contenant  $c$  est contenu dans  $P$  : en effet,  $a \notin Q$  et  $c \in Q$  impliquent  $\delta_1 \subset \rho_1$  ; on a donc  $L_c \subset P$ .

Montrons l'autre inclusion. Soit  $x = (x_1, x_2) \in P$ . Puisque  $x_1 \in ]a_1, c_1[$ , par définition de  $a$ , il existe un quadrant léger  $Q = \delta_1 \times \delta_2$  tel que  $x_1 \in \delta_1$ . De même, il existe un quadrant léger tel

que  $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$  avec  $x_2 \in \delta'_2$ . Il suffit de prouver que le quadrant  $Q'' = \delta_1 \times \delta'_2$  est léger. On choisit un point base  $* \in X$ , et considérons une suite  $g_k.* \in Q''$  rendant  $Q''$  lourd. Pour  $k$  assez grand,  $g_k.* \notin Q$ ,  $g_k.* \notin Q'$  et  $g_k.* \notin R$ . On en déduit que  $g_k.*$  est dans un quadrant basé en  $R$  et disjoint de  $R$  comme dans le lemme 9.9. Puisque  $g_k.* \in X$ , on a une contradiction.  $\square$

On en déduit facilement une triangulation de  $X$  pour laquelle  $\mathcal{C}$  est un sous-complexe. On obtient ainsi le lemme suivant :

**COROLLAIRE 9.11.** – *Le cœur  $\mathcal{C}$  de  $T_1 \times T_2$  a une structure  $G$ -invariante de 2-complexe,  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}_0$  est localement compact, et l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}_0$  est proprement discontinue.*

### 9.3. Points singuliers du cœur

Montrons que le 2-complexe  $\Sigma = \mathcal{C}/G$  est une surface pincée. Ceci conclura la preuve du théorème 9.2. On va utiliser l'application  $H = (h_1, h_2) : T_1 \times T_2 \rightarrow T_1 \times T_2$ .

**LEMME 9.12.** – *Le cœur  $\mathcal{C}$  est  $H$ -invariant. De plus,  $H$  induit un homéomorphisme  $\overline{H}$  de  $\Sigma$ , et  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ .*

Les deux projections  $p_i : \mathcal{C} \rightarrow T_i$  induisent deux feuilletages mesurés sur  $\mathcal{C}$  et  $\Sigma$ , qui sont préservés par  $H$  et  $\overline{H}$  respectivement. De plus,  $\overline{H}$  multiplie les mesures transverses par  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$  respectivement.

*Démonstration.* – L'invariance de  $\mathcal{C}$  est une conséquence directe de sa caractérisation comme plus petit fermé connexe à fibres connexes, ou du fait que  $H$  envoie quadrant sur quadrant. De plus,  $x$  et  $y$  sont dans la même  $G$ -orbite si et seulement si  $H(x)$  et  $H(y)$  le sont. Les mesures transverses des deux feuilletages sur  $\Sigma$  induisent une mesure non nulle sur  $\Sigma$  : si cette mesure était nulle, alors  $\mathcal{C}$  serait un arbre simplicial, ce qui implique que  $T_1$  et  $T_2$  seraient simpliciaux, ce qu'interdit  $\lambda_1 \neq 1$ . Cette mesure est finie car  $\Sigma$  est une union finie de rectangles. Puisque  $\overline{H}$  multiplie cette mesure par un facteur  $\lambda_1 \lambda_2$ , on a donc  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ .  $\square$

Notons  $\mathcal{S}'$  l'ensemble des sommets d'une triangulation de  $\mathcal{C}$ , et  $\overline{\mathcal{S}'}$  l'image de  $\mathcal{S}'$  dans  $\Sigma$ .

**LEMME 9.13.** – *L'espace  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$  est une surface, et le link dans  $\mathcal{C}$  en chacun des points de  $\mathcal{S}'$  est une union disjointe de cercles et droites. De plus,  $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{S}'}$  est une surface fermée avec un nombre fini de trous, et  $\Sigma$  est une surface pincée.*

*Démonstration.* – Chaque point de  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$  possède un voisinage de la forme  $I_1 \times K_2$  ou  $K_1 \times I_2$  où  $K_i \subset T_i$  est un sous-arbre fini, et  $I_i \subset T_i$  est un segment. Soit  $\mathcal{S}'_H$  (resp.  $\mathcal{S}'_V$ ) l'ensemble singulier horizontal (resp. vertical) défini comme l'ensemble des points  $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$  ayant un voisinage de la forme  $K_1 \times I_2$  (resp.  $I_1 \times K_2$ ) mais aucun voisinage de la forme  $I_1 \times I_2$ .

On veut démontrer que  $\mathcal{S}'_H$  et  $\mathcal{S}'_V$  sont vides. L'image  $\overline{\mathcal{S}'_H}$  de  $\mathcal{S}'_H$  dans  $\Sigma$  est une union finie d'arêtes horizontales qui a donc une mesure transverse horizontale finie, et non nulle si  $\mathcal{S}'_H \neq \emptyset$ . L'homéomorphisme  $\overline{H}$  préserve  $\mathcal{S}'_H$  et multiplie sa mesure transverse horizontale par  $\lambda_1 > 1$ . Ceci contraint donc  $\mathcal{S}'_H = \emptyset$ . De même,  $\mathcal{S}'_V = \emptyset$ , donc  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$  est une surface.

Puisque l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$  est libre et proprement discontinue, ceci implique que  $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{S}'}$  est une surface. De plus, le link en tout point de  $\overline{\mathcal{S}'}$  est un graphe n'ayant que des sommets de valence 2. Puisqu'il est compact, c'est une union finie de cercles disjoints. Par conséquent,  $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{C}}$  est une surface fermée avec un nombre fini de trous, et  $\Sigma$  est une surface pincée. De même, le link dans  $\mathcal{C}$  de tout point de  $\mathcal{S}'$  est une union disjointe de cercles et de droites.  $\square$

Le théorème 9.2 en découle.

#### 9.4. Cas d'un automorphisme complètement irréductible

Nous démontrons ici le corollaire 9.3 affirmant que si  $\alpha$  est complètement irréductible, et si  $T_1$  et  $T_2$  sont géométriques, alors  $\alpha$  est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov.

*Preuve du corollaire 9.3.* – On utilise le fait que si  $\alpha$  n'est pas induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord, alors les actions de  $G$  sur  $T_1$  et  $T_2$  sont libres [3]. Supposons alors  $T_1$  et  $T_2$  géométriques et cherchons une contradiction. Puisque l'action de  $G$  sur  $T_1 \times T_2$  est libre,  $\mathcal{C}$  est le revêtement universel de  $\Sigma$ , et  $G \simeq \pi_1(\Sigma)$ .

Si  $\Sigma$  n'a pas de point singulier, c'est une surface compacte, ce qui contredit que  $G$  n'est pas le groupe fondamental d'une surface.

Soit  $\widehat{\Sigma}$  le 2-complexe obtenu en éclatant  $\Sigma$  de la façon suivante. Fixons  $v$  un sommet singulier de  $\Sigma$ . On remplace  $v$  par l'arbre  $T_v$  défini comme le cône sur  $C(v)$ , où  $C(v)$  possède un sommet  $v_C$  par composante connexe  $C$  du link de  $v$ . Plus précisément, si une cellule de  $\Sigma$  était collée sur  $v$ , elle définit une composante  $C \in C(v)$ , et on la colle maintenant sur  $v_C \in T_v$ . On obtient ainsi un complexe ayant la même homotopie que  $\Sigma$ , et qui peut être décrit comme une surface (a priori non connexe), sur laquelle on a attaché un nombre fini d'arbres finis. Puisque  $G$  ne contient pas de groupe de surface non trivial ( $G$  est libre), toutes ces surfaces sont des sphères. Ceci contredit la contractibilité du revêtement universel  $\mathcal{C}$  de  $\Sigma$ .  $\square$

### 10. Égalité avec le nombre d'intersection de Scott et Swarup

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux actions d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres simpliciaux avec une seule orbite d'arêtes. Scott a défini dans [19] le nombre d'intersection de  $T_1$  et  $T_2$ . On peut reformuler sa définition comme suit. Soient  $e_1, e_2$  deux arêtes orientées de  $T_1$  et  $T_2$ . Soit  $\delta(e_i) \subset T_i$  la direction basée à l'origine de  $e_i$ , et contenant  $e_i$ . Soit  $H_i$  le stabilisateur de  $e_i$  qui est aussi le stabilisateur de  $\delta(e_i)$ . Fixons un point base  $*_i \in T_i$ . Soit  $X_{e_i} = \{g \in G \mid g.*_i \in \delta(e_i)\}$ . L'ensemble  $X_{e_i}$  est invariant par l'action à gauche de  $H_i$ . Soit  $C$  un graphe de Cayley de  $G$ . Dans la terminologie de Scott,  $X_{e_i}$  est un ensemble  $H_i$ -presque invariant, ce qui signifie que  $X_{e_i}/H_i$  a un cobord fini dans le graphe  $C/H_i$ . Notons qu'un changement de point base ne change  $X_{e_i}/H_i$  que par un ensemble fini, ce qui sera sans importance dans les définitions qui suivent.

Scott dit que  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$  se croisent si les quatre ensembles  $X_{e_1} \cap X_{e_2}$ ,  ${}^c X_{e_1} \cap X_{e_2}$ ,  $X_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$ ,  ${}^c X_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$  ont une image infinie dans  $C/H_1$ . Il démontre que ceci arrive si et seulement si ces quatre ensembles ont aussi une image infinie dans  $C/H_2$ . Il faut remarquer que le fait que  $X_{e_1}$  croise  $X_{e_2}$  ne change pas si l'on remplace une des arêtes par l'arête ayant l'orientation opposée. De plus,  $X_{e_1}$  croise  $X_{e_2}$  si et seulement si  $X_{g.e_1}$  croise  $X_{g.e_2}$ . Enfin,  $i(T_1, T_2)$  est défini comme le nombre de doubles classes  $H_1 g H_2$  telles que  $X_{e_1}$  croise  $g.X_{e_2}$ .

**PROPOSITION 10.1.** – *Notre définition du nombre d'intersection coïncide avec celle de Scott.*

*Démonstration.* – L'ensemble des doubles classes est en bijection avec l'ensemble des orbites de couples d'arêtes non orientées dans  $T_1 \times T_2$ . En d'autres termes,  $i(T_1, T_2)$  est le nombre d'orbites de couples d'arêtes non orientées  $(e_1, e_2)$  de  $T_1 \times T_2$  telles que  $X_{e_1}$  croise  $X_{e_2}$ .

Pour montrer l'équivalence des définitions, il suffit donc de démontrer qu'un rectangle  $e_1 \times e_2$  est contenu dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $X_{e_1}$  et  $X_{e_2}$  se croisent. Soit  $Q(e_1, e_2)$  le quadrant  $\delta(e_1) \times \delta(e_2)$ .

Supposons d'abord que  $X_{e_1}$  ne croise pas  $X_{e_2}$ , et montrons que  $e_1 \times e_2$  n'est pas dans  $\mathcal{C}$ . En choisissant convenablement les orientations de  $e_1$  et  $e_2$ , l'hypothèse dit que l'image de  $X_{e_1} \cap X_{e_2}$  se projette sur un ensemble fini dans  $G/H_1$ . Ceci signifie que l'ensemble  $Z = \{g.*_1 \mid g.(*_1, *_2) \in Q(e_1, e_2)\}$  ne rencontre qu'un nombre fini de  $H_1$ -orbites. En particulier,

$Z$  est borné, donc  $Q(e_1, e_2)$  est léger. Puisque le rectangle ouvert  $e_1 \times e_2$  est contenu dans  $Q(e_1, e_2)$ , on obtient que  $e_1 \times e_2$  n'est pas dans  $\mathcal{C}$ .

Réciproquement, supposons que  $X_{e_1}$  croise  $X_{e_2}$ , et montrons que le rectangle  $e_1 \times e_2$  est dans  $\mathcal{C}$ . Considérons d'abord le cas où  $\mathcal{C}$  est non vide, et choisissons un point base  $* \in \mathcal{C}$ . Supposons par l'absurde qu'il y a un quadrant léger  $Q$  contenant  $e_1 \times e_2$ . On peut choisir les orientations de  $e_1$  et  $e_2$  de sorte que  $Q$  contienne  $Q(e_1, e_2)$ . En particulier,  $Q(e_1, e_2)$  est léger, et ne rencontre donc pas  $\mathcal{C}$ , ni l'orbite de  $*$ . Ceci contredit le fait que  $X_{e_1}$  croise  $X_{e_2}$ .

Il reste à vérifier que si  $\mathcal{C}$  est vide, alors le nombre d'intersection de Scott est nul. On veut prouver que pour toute paire d'arêtes non orientées  $(e_1, e_2)$ ,  $X_{e_1}$  ne croise pas  $X_{e_2}$ . C'est facile pour deux actions homothétiques sur une droite. Sinon, la remarque 3.7 montre qu'il y a un bon choix d'orientations de  $(e_1, e_2)$ , et un choix de point base  $*$  tels que l'orbite de  $*$  ne rencontre pas  $Q(e_1, e_2)$ ; ceci implique que  $X_{e_1}$  ne croise pas  $X_{e_2}$ .  $\square$

## 11. Nombre d'intersection forte, et cœur asymétrique

### 11.1. Cœur asymétrique

On introduit ici un *cœur asymétrique* (ou plutôt deux cœurs asymétriques  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ ), pour deux actions de  $G$  sur des arbres simpliciaux. La construction est celle de Fujiwara et Papasoglu [10]. Notons qu'il n'y a pas de généralisation évidente de  $\mathcal{A}_1$  quand  $T_1$  est un arbre réel.

Dans tout ce qui suit, étant donnée une action de  $G$  sur un arbre  $T$ , on notera  $G_x$  le stabilisateur d'un point ou d'une arête  $x$ .

**DÉFINITION 11.1** (*Cœur asymétrique* [10]). – Considérons deux actions minimales d'un groupe  $G$  sur deux arbres simpliciaux  $T_1, T_2$ , et supposons que le stabilisateur de chaque arête de  $T_1$  agisse non trivialement sur  $T_2$ . Alors le cœur asymétrique gauche  $\mathcal{A}_1(T_1 \times T_2)$  est défini par

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{x_1 \in T_1} \{x_1\} \times \text{Min}_{T_2}(G_{x_1}).$$

Le cœur asymétrique droit  $\mathcal{A}_2(T_1 \times T_2)$  est défini de manière symétrique sous les hypothèses symétriques.

*Remarque 11.2.* – Il est clair que  $\mathcal{A}_1$  est le plus petit sous-ensemble invariant de  $T_1 \times T_2$  dont les  $p_1$ -fibres sont connexes et non vides. Les hypothèses de la définition impliquent que le cœur symétrique  $\mathcal{C}$  est non vide et connexe. En particulier,  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont contenus dans  $\mathcal{C}$  d'après la proposition 5.2. De plus,  $\mathcal{A}_1$  est contractile puisqu'il s'envoie continûment sur un arbre avec fibres contractiles.

Plus généralement, si l'on suppose seulement que les stabilisateurs d'arêtes ou de sommets de  $T_1$  agissent soit non trivialement, soit avec un point fixe dans  $T_2$ , on peut faire une construction similaire mais non canonique : pour chaque sommet ou arête  $x_1 \in T_1$  tel que  $G_{x_1}$  agisse non trivialement sur  $T_2$ , on impose toujours que  $\mathcal{A}_1 \cap p_1^{-1}(x_1) = \{x_1\} \times \text{Min}_{T_2}(G_{x_1})$ ; pour  $x_1 \in V(T_1)$  tel que  $G_{x_1}$  fixe un point de  $T_2$ , on choisit un tel point fixe  $x_2$ , et on impose que  $\mathcal{A}_1 \cap p_1^{-1}(x_1) = \{(x_1, x_2)\}$ ; pour chaque arête  $e_1 \in E(T_1)$  d'extrémité  $a_1, b_1$  telle que  $G_{e_1}$  soit elliptique dans  $T_2$ , on choisit un segment  $I$  dans  $p_1^{-1}(e_1)$  joignant un point fixe de  $G_{e_1}$  dans  $p_1^{-1}(a_1)$  à un point fixe de  $G_{e_1}$  dans  $p_1^{-1}(b_1)$  (ce segment peut être oblique, et donc  $\mathcal{A}_1$  n'est pas, en général, un sous-complexe de  $T_1 \times T_2$ ). Dans cette situation plus générale, il reste vrai que  $\mathcal{A}_1$  est contractile, mais  $\mathcal{A}_1$  dépend de choix. Notons cependant que les 2-cellules de  $\mathcal{A}_1$  sont indépendantes des choix.

## 11.2. Nombre d'intersection forte

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux actions d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres simpliciaux avec une seule orbite d'arêtes. Scott et Swarup ont défini un nombre d'intersection forte, dont on peut reformuler la définition ainsi.

Rappelons quelques notations : étant donnée une arête orientée  $e_i \in T_i$ , on note  $\delta(e_i)$  la direction basée à l'origine de  $e_i$  et contenant  $e_i$ ,  $X_{e_i} = \{g \in G \mid g.*_i \in \delta(e_i)\}$ , et  $\partial X_{e_i}$  le cobord de  $X_{e_i}$  dans un graphe de Cayley  $C$  de  $G$  relativement à une partie génératrice finie  $S$  i.e.

$$\partial X_{e_i} = \{g \in X_{e_i} \mid \exists s \in S \cup S^{-1} \text{ } gs \notin X_{e_i}\}.$$

Scott et Swarup disent que  $X_{e_1}$  *croise fortement*  $X_{e_2}$  si les deux ensembles  $\partial X_{e_1} \cap X_{e_2}$  et  $\partial X_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$  ont des projections infinies dans  $C/G_{e_2}$ . Cette notion est indépendante du choix de  $S$ .

LEMME 11.3. – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres simpliciaux munis d'une action de  $G$  ayant une seule orbite d'arête. Soient  $e_1, e_2$  deux arêtes de  $T_1$  et  $T_2$ .

Alors  $X_{e_1}$  *croise fortement*  $X_{e_2}$  si et seulement si  $G_{e_1}$  agit non trivialement sur  $T_2$  et  $e_2 \subset \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$ .

*Démonstration.* – Puisque l'action de  $G$  sur  $T_1$  induit une décomposition de  $G$  comme amalgame ou extension HNN,  $G$  est engendré par des éléments envoyant  $e_1$  sur une arête ayant (au moins) un sommet commun avec  $e_1$ . On peut donc choisir  $S$  parmi ces éléments. Pour ce choix de  $S$ , on a  $G_{e_1} = \partial X_{e_1}$  : en effet, tout  $g \in G_{e_1}$  appartient à  $\partial X_{e_1}$  car on peut choisir  $s \in S \cup S^{-1}$  envoyant  $e_1$  dans  ${}^c \delta(e_1)$ , ce qui implique que  $gs \notin X_{e_1}$  ; pour l'autre inclusion, si  $g.e_1 \in \delta(e_1)$  et  $gs.e_1 \in {}^c \delta(e_1)$ , puisque  $g.e_1$  et  $gs.e_1$  sont adjacentes, on a nécessairement  $g.e_1 = e_1$ .

On en déduit que  $X_{e_1}$  *croise fortement*  $X_{e_2}$  si et seulement si  $G_{e_1} \cap X_{e_2}$  et  $G_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$  ont une projection infinie dans  $G/G_{e_2}$ . Puisqu'il y a une bijection naturelle entre  $G/G_{e_2}$  et  $G.e_2$ , ceci revient à dire que  $G_{e_1}.e_2 \cap \delta(e_2)$  et  $G_{e_1}.e_2 \cap {}^c \delta(e_2)$  sont tous deux infinis.

Ceci ne peut clairement pas arriver si  $G_{e_1}$  fixe un point de  $T_2$  car une isométrie fixant un point  $x \in T_2$  ne peut pas envoyer  $e_2$  dans la composante connexe de  $T \setminus \{e_2\}$  qui ne contient pas  $x$ . Si  $G_{e_1}$  ne fixe pas de point de  $T_2$ , mais que chacun de ses éléments est elliptique, alors  $G_{e_1}$  fixe un bout  $\omega$  de  $T_2$ , et un argument similaire s'applique : toute isométrie elliptique fixant  $\omega$  ne peut envoyer  $e_2$  dans la composante de  $T \setminus \{e_2\}$  ne contenant pas  $\omega$  dans son bord à l'infini. Enfin, si  $G_{e_1}$  agit non trivialement sur  $T_2$ , et si  $e_2 \notin \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$ , on a de même qu'aucun élément de  $G_{e_1}$  ne peut envoyer  $e_2$  dans la composante de  $T_2 \setminus \{e_2\}$  ne contenant pas  $\text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$ . On a donc montré que si  $X_{e_1}$  *croise fortement*  $X_{e_2}$ , alors  $G_{e_1}$  agit non trivialement sur  $T_2$  et  $e_2 \in \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$ .

Réciproquement, supposons que  $e_2 \in \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$ . Considérons alors un élément  $h \in G_{e_1}$  dont l'axe dans  $T_2$  contient  $e_2$ . Alors clairement,  $\{h^k.e_2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  rencontre  $\delta(e_2)$  et  ${}^c \delta(e_2)$  un nombre infini de fois.  $\square$

Comme corollaire, on obtient immédiatement l'interprétation suivante du nombre d'intersection forte. Ceci généralise le corollaire 3.16 de [20] qui demande que le nombre d'intersection forte coïncide avec le nombre d'intersection usuel.

COROLLAIRE 11.4. – Soient  $T_1, T_2$  deux arbres simpliciaux avec une action de  $G$  ayant une seule orbite d'arête.

Alors le nombre (asymétrique) d'intersection forte de Scott et Swarup  $si(T_1, T_2)$  est le nombre de 2-cellules de  $\mathcal{A}_1(T_1 \times T_2)/G$ . Ce nombre peut aussi être vu comme le nombre d'arêtes de  $\text{Min}_{T_2}(G_{e_1})/G_{e_1}$  (où  $e_1 \in E(T_1)$  est une arête quelconque).

## 12. Groupes d'enfermement de Fujiwara et Papasoglu

PROPOSITION 12.1 [10]. – Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux actions minimales d'un groupe de type fini  $G$  sur des arbres simpliciaux telles que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,

- le stabilisateur de toute arête de  $T_i$  agisse non trivialement sur l'autre arbre,
- $G$  ne se scinde pas sur un sous-groupe d'indice infini du stabilisateur d'une arête de  $T_i$ .

Alors  $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ .

De plus, si pour chaque arête  $e_i$  de  $T_i$ , le sous-arbre minimal de  $G_{e_i}$  dans l'autre arbre est une droite (si  $G_{e_i}$  est svelte par exemple), alors  $\mathcal{C} \setminus V(\mathcal{C})$  est une surface.

*Démonstration.* – La preuve suit celle de Fujiwara et Papasoglu.

Considérons le cœur asymétrique  $\mathcal{A}_1 = \bigcup_{x_1 \in T_1} \{x_1\} \times \min_{T_2}(G_{x_1})$  défini ci-dessus. On a vu que  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{C}$  et que  $\mathcal{A}_1$  est contractile. Les fibres verticales de  $\mathcal{A}_1$  sont connexes par définition.

Montrons que la fibre horizontale d'une arête de  $T_2$  est connexe. Supposons donc par l'absurde que pour une arête  $e_2$  de  $T_2$ ,  $F = p_2^{-1}(e_2) \cap \mathcal{A}_1$  n'est pas connexe. Il y a au plus une composante de  $F$  qui soit  $G_{e_2}$ -invariante puisqu'une telle composante contient  $\min_{T_1}(G_{e_2}) \times \{e_2\}$ . Considérons donc une autre composante  $F_0 = K_0 \times \{e_2\}$  de  $F$ . Son stabilisateur  $H$  est d'indice infini dans  $G_{e_2}$  car si  $H$  était d'indice fini, il aurait le même sous-arbre minimal que  $G_{e_2}$ . Puisque  $\mathcal{A}_1$  est simplement connexe et que  $F_0$  disconnecte localement  $\mathcal{A}_1$ ,  $F_0$  disconnecte  $\mathcal{A}_1$  en deux composantes. Cela signifie qu'il y a un arbre  $T_{F_0}$  dual à  $G.F_0$  dont les arêtes sont les composantes connexes de  $G.F_0$  et les sommets sont les composantes connexes de  $\mathcal{A}_1 \setminus G.F_0$ . Ceci définit un scindement de  $G$  au-dessus de  $H$ . Ce scindement est non trivial car on voit facilement qu'un élément  $h \in G_{e_1}$  dont l'axe passe par  $e_2$  est hyperbolique dans  $T_{F_0}$ . On a donc un scindement non trivial au-dessus de  $H$ , en contradiction avec les hypothèses.

Déduisons-en que la fibre horizontale d'un sommet  $x_2 \in T_2$  est connexe. Considérons deux sommets  $a, b \in p_2^{-1}(x_2)$ , et considérons un chemin linéaire par morceaux  $c: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_1$  joignant  $a$  à  $b$ . Soit  $c_2 = p_2 \circ c$ . Si  $c_2$  est constant, on a terminé. Sinon, considérons une composante connexe  $]s, t[$  de  $[0, 1] \setminus c_2^{-1}(v_2)$ . Alors  $c_2(]s, s + \varepsilon[)$  et  $c_2(]t - \varepsilon, t[)$  sont contenus dans la même arête  $e_2$ . Puisque  $p_2^{-1}(e_2)$  est connexe, on peut connecter  $c(s + \varepsilon)$  à  $c(t - \varepsilon)$  par un chemin dans  $p_2^{-1}(e_2)$ , et on peut le pousser dans  $p_2^{-1}(x_2)$  pour obtenir un chemin de  $c(s)$  à  $c(t)$  dans  $p_2^{-1}(x_2)$ . En remplaçant  $c_{]s, t[}$  par un tel chemin et en effectuant cette opération pour toute composante connexe de  $[0, 1] \setminus c_2^{-1}(x_2)$ , on obtient un chemin dans  $p_2^{-1}(x_2)$  joignant  $a$  à  $b$ .

Puisque  $\mathcal{A}_1$  est connexe et à fibres convexes, on a  $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{C}$ , et donc  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}$ . De même,  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{C}$ .

Il est maintenant facile de montrer que  $\mathcal{C} \setminus V(\mathcal{C})$  est une surface sous l'hypothèse supplémentaire car le link de chaque point dans une arête horizontale  $e_1 \times \{x_2\}$  de  $\mathcal{A}_1$  est un cercle car  $\min_{T_2}(G_{x_1})$  est une droite, et le même argument s'applique pour un point dans une arête verticale.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] BESTVINA M., FEIGN M., HANDEL M., Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups, *Geom. Funct. Anal.* **7** (2) (1997) 215–244.
- [2] BESTVINA M., FEIGN M., HANDEL M., Erratum to: Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups [Geom. Funct. Anal. 7 (2) (1997) 215–244; MR 98c:20045], *Geom. Funct. Anal.* **7** (6) (1997) 1143.
- [3] BESTVINA M., HANDEL M., Train tracks and automorphisms of free groups, *Ann. of Math. (2)* **135** (1) (1992) 1–51.
- [4] BRIDSON M.R., HAEFLIGER A., Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. **319**, Springer, Berlin, 1999.

- [5] BONAHOFF F., Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, *Ann. of Math. (2)* **124** (1) (1986) 71–158.
- [6] CHISWELL I., Introduction to  $\Lambda$ -Trees, World Scientific, River Edge, NJ, 2001.
- [7] CULLER, M., LEVITT, G., SHALEN, P., manuscrit non publié.
- [8] FREEDMAN M., HASS J., SCOTT P., Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, *Invent. Math.* **71** (3) (1983) 609–642.
- [9] FATHI A., LAUDENBACH F., POÉNARU V., Travaux de Thurston sur les surfaces, Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay.
- [10] FUJIWARA K., PAPASOGLU P., JSJ decomposition of finitely presented groups and complexes of groups, <http://topo.math.u-psud.fr/~papazog/preprints.html>, 1998.
- [11] GUIARDEL V., Core and intersection number for group actions on  $\mathbb{R}$ -trees, <http://arxiv.org/abs/math.GR/0407206>.
- [12] HANDEL M., MOSHER L., Parageometric outer automorphisms of free groups, <http://arxiv.org/abs/math.GR/0410018>.
- [13] LEVITT G.,  $\mathbb{R}$ -Trees and the Bieri–Neumann–Strebel Invariant, *Publ. Mat.* **38** (1) (1994) 195–202.
- [14] LEVITT, G., LUSTIG, M., Asymptotic periodicity for automorphisms of free groups and hyperbolic groups, en préparation.
- [15] LEVITT G., PAULIN F., Geometric group actions on trees, *Amer. J. Math.* **119** (1) (1997) 83–102.
- [16] Lustig, M., A discrete action on the product of two non-simplicial  $\mathbb{R}$ -trees, manuscrit non publié.
- [17] NIBLO G., SAGEEV M., SCOTT P., SWARUP G., Minimal cubings, <http://arxiv.org/abs/math.GR/0401133>.
- [18] SAGEEV M., Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes, *Proc. London Math. Soc.* (3) **71** (3) (1995) 585–617.
- [19] SCOTT P., The symmetry of intersection numbers in group theory, *Geom. Topology* **2** (1998) 11–29.
- [20] SCOTT P., SWARUP G.A., Splittings of groups and intersection numbers, *Geom. Topology* **4** (2000) 179–218.
- [21] SCOTT P., SWARUP G.A., Regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups, *Astérisque* **289** (2003) vi+233.
- [22] SERRE J.-P., Arbres, amalgames,  $SL_2$ , *Astérisque*, vol. **46**, Société Mathématique de France, Paris, 1977.

(Manuscrit reçu le 24 septembre 2004 ;  
 accepté le 4 novembre 2005.)

Vincent GUIARDEL  
 Laboratoire Émile Picard,  
 UFR MIG,  
 Université Paul Sabatier,  
 31062 Toulouse cedex 9,  
 France  
 E-mail : [guirardel@math.ups-tlse.fr](mailto:guirardel@math.ups-tlse.fr)