

# FORMES NON TEMPÉRÉES POUR $U(3)$ ET CONJECTURES DE BLOCH–KATO

PAR JOËL BELLAÏCHE ET GAËTAN CHENEVIER

---

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous utilisons des familles  $p$ -adiques de formes automorphes pour un groupe unitaire à trois variables, passant par des formes non tempérées construites par Rogawski, pour montrer certains cas des conjectures de Bloch et Kato.

© 2004 Elsevier SAS

ABSTRACT. – In this paper, we use  $p$ -adic families of automorphic forms for a unitary group in three variables, containing some non-tempered forms constructed by Rogawski, to prove some cases of the Bloch–Kato conjectures.

© 2004 Elsevier SAS

## 1. Introduction

### 1.1. Énoncé du théorème principal

Soit  $E/F$  une extension  $CM$ ,  $(\rho, V)$  une représentation de  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  sur une extension finie  $L$  de  $\mathbb{Q}_p$ , continue, irréductible, et géométrique (cf. [32, p. 650]). On note  $\tau$  l'élément nontrivial de  $\text{Gal}(E/F)$  et  $\rho^\perp$  la représentation sur  $V^*$  donnée par  $g \mapsto {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$ . On suppose que la représentation  $\rho$  vérifie<sup>1</sup>

$$(1) \quad \rho^\perp = \rho(-1),$$

où  $\rho(-1)$  est un twist à la Tate de  $\rho$ .

Il est conjecturé que la fonction  $L$  de  $\rho$ , notée  $L(\rho, s)$ , admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en zéro si  $\rho$  n'est pas le caractère cyclotomique, ce que nous supposons. Sous l'hypothèse (1), la fonction  $\Lambda(\rho, s)$  déduite de  $L$  admet une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(\rho, -s) = \epsilon(\rho, s)\Lambda(\rho, s), \quad \text{avec } \epsilon(\rho, 0) = \pm 1.$$

En particulier, l'examen des facteurs  $\Gamma$  à l'infini montre que  $\epsilon(\rho, 0) = -1$  si et seulement si la fonction  $L(\rho, s)$  s'annule en 0 à l'ordre impair.

---

<sup>1</sup> Notons par exemple que si  $\rho_F$  est une représentation de  $\text{Gal}(\overline{F}/F)$  vérifiant  $\rho_F^* \simeq \rho_F(-1)$ , sa restriction  $\rho$  à  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  vérifie 1. C'est le cas par exemple d'un twist convenable des représentations attachées aux formes modulaires.

À la suite de Janssen, Bloch–Kato, Fontaine–Perrin-Riou, notons  $H_f^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$  le sous-groupe de  $H^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$  paramétrant les extensions  $U$  de la représentation triviale 1 (sur  $L$ ) par  $\rho$

$$0 \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

qui ont bonne réduction en toute place, ce qui signifie que les suites

$$0 \rightarrow V^{I_w} \rightarrow U^{I_w} \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

sont exactes pour toute place  $w$  de  $E$  ne divisant pas  $p$ ,  $I_w$  désignant un sous-groupe d’inertie en  $w$ , et que les suites

$$0 \rightarrow D_{\text{cris},w}(V) \rightarrow D_{\text{cris},w}(U) \rightarrow D_{\text{cris}}(1) \rightarrow 0$$

sont exactes pour toute place  $w$  divisant  $p$ . La conjecture de Bloch et Kato (cf. [32, 3.4.5]) implique que

CONJECTURE 1.1. – *Si  $\epsilon(\rho, 0) = -1$ , alors  $\dim H_f^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \rho) \geq 1$ .*

Cet article propose une nouvelle méthode pour aborder cette conjecture, basée sur des congruences entre formes automorphes non tempérées et tempérées. Son but est d’en démontrer le cas particulier suivant :

THÉORÈME 1.1. – *Supposons que  $E$  est un corps quadratique imaginaire. Soit  $\chi$  un caractère de Hecke algébrique sur  $E$ , qui vérifie*

$$\chi^\perp = \chi | \cdot |^{-1}$$

*et dont le type à l’infini est de la forme*

$$z \mapsto z^a \bar{z}^{1-a},$$

*avec  $a \geq 2$ . Soit  $p$  un nombre premier décomposé dans  $E$  et non ramifié pour  $\chi$ , et  $\chi_p : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow L^*$  une réalisation  $p$ -adique de  $\chi$  sur un corps  $L$ . Alors, si  $\epsilon(\chi, 0) = -1$ , on a*

$$\dim H_f^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \chi_p) \geq 1.$$

*Autrement dit, il existe une extension non triviale, ayant bonne réduction partout, de la forme*

$$(2) \quad 0 \rightarrow \chi_p \rightarrow U \rightarrow 1 \rightarrow 0.$$

Notons que ce théorème peut se démontrer facilement à partir de la conjecture d’Iwasawa pour les corps quadratiques imaginaires, prouvée par Rubin [54]. Cependant, notre méthode est différente (Rubin utilise des systèmes d’Euler et non des formes automorphes), susceptible de généralisations ultérieures (voir plus bas) et donne une information supplémentaire : elle prouve que les réductions modulo  $m^n$ , ( $m$  idéal maximal de  $\mathcal{O}_L$ ,  $n$  entier arbitraire) de l’extension (2) dont le théorème affirme l’existence apparaissent comme sous-quotient de la cohomologie étale de variétés algébriques sur  $E$ . Cet énoncé est prédit par la conjecture de Fontaine–Mazur et ne découle pas de la preuve de Rubin.

## 1.2. La méthode

**1.2.1.** Le Théorème 1.1 est une généralisation du théorème principal de la thèse d'un des auteurs (cf. [3], Théorème VIII.1.7.2), où il est prouvé, sous les mêmes hypothèses, l'existence d'une extension non triviale ayant bonne réduction partout sur  $\mathcal{O}_L/m$  de la forme

$$0 \rightarrow \bar{\chi}_p \rightarrow U \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

et ce pour un ensemble de densité non nulle de  $p$ . La méthode utilisée ici est similaire à celle de cette thèse, à une variante près (l'emploi de familles  $p$ -adiques combinées avec un résultat de Kisin, au lieu d'augmentation du niveau) dont l'idée est due à Urban et Skinner. Ils ont en effet récemment annoncé (cf. [60]) un analogue du Théorème 1.1 pour des formes modulaires ordinaires de niveau 1, par une méthode semblable. Il nous a semblé bon de reprendre cette idée dans notre cas, notamment parce qu'elle permet de se passer d'hypothèses sur  $p$ , que les familles  $p$ -adiques pour  $U(n)$  ont été construites pour tout  $n$  par l'un des auteurs [22,23], et qu'elle est plus simplement généralisable (voir 1.3).

**1.2.2.** Expliquons le principe de la méthode employée. La première idée est d'utiliser les formules de multiplicités, données par des conjectures d'Arthur, des représentations automorphes dans le spectre discret. Pour certaines représentations non tempérées, ces formules font apparaître le signe de certains facteurs  $\epsilon$ . Plus précisément, dans le cas du groupe unitaire  $U(3)$  compact à l'infini attaché au corps quadratique imaginaire  $E$ , ces formules sont démontrées par Rogawski et affirment que pour  $\chi$  un caractère de Hecke comme dans l'énoncé du théorème, il existe dans le spectre discret de  $E$  une représentation  $\pi(\chi)$ , minimalement ramifiée,<sup>2</sup> dont la représentation galoisienne associée  $\rho : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}_3(L)$  est de la forme  $\rho = \chi_p \oplus 1 \oplus \chi_p(-1)$  si, et seulement si,  $\epsilon(\chi, 0) = -1$ .

**1.2.3.** Plaçons-nous sous cette hypothèse. On dispose donc de  $\pi(\chi)$  et de sa représentation galoisienne associée  $\rho$ . L'étape suivante est d'obtenir une déformation génériquement irréductible  $\rho'$  de  $\rho$ , i.e. une représentation  $\rho'$  de  $\text{Gal}(\bar{E}/E)$  sur un anneau de valuation discrète  $R$  de corps résiduel  $L$  avec  $(\rho' \otimes_R L)^{ss} = \rho$ , et  $\rho' \otimes_R \text{Frac}(R)$  irréductible; il faut également contrôler la ramification de  $\rho'$  ainsi que son comportement aux places divisant  $p$ . La méthode<sup>3</sup> utilisée pour construire  $\rho'$  consiste à placer  $\Pi(\chi)$  dans une famille  $p$ -adique de formes automorphes<sup>4</sup>.

Pour contrôler la ramification de  $\rho'$  aux places  $w$  de  $E$  ne divisant pas  $p$ , en particulier aux places où  $\chi$  est ramifié, on est obligé d'imposer aux formes de la famille  $p$ -adique construite de contenir certains types de Bushnell et Kutzko. Pour traduire l'existence de ces types en termes de la ramification de  $\rho'$ , on bute sur la difficulté suivante : il ne semble pas connu<sup>5</sup> que la construction de la représentation galoisienne  $\rho$  attachée à une forme automorphe pour  $U(3)$  est compatible, en chaque place, avec la correspondance de Langlands locale. Nous montrons

<sup>2</sup> Voir la Proposition 4.1 pour plus de détails.

<sup>3</sup> Mentionnons ici que l'utilisation systématique des formes automorphes sur les groupes compacts à l'infini dans les questions de congruences semble due à R. Taylor.

<sup>4</sup> C'est là la principale différence avec [3] où l'on ne construisait qu'une déformation de  $\bar{\rho} \simeq \bar{\chi}_p \oplus 1 \oplus \bar{\chi}_p(1)$  à l'aide d'un théorème d'augmentation du niveau. Notons cependant que l'on pourrait aussi prouver le Théorème 1.1 à l'aide de cette méthode, en construisant des déformations de  $\bar{\rho}$  qui sont congrues à  $\rho$  modulo  $m^n$ , à l'aide de théorèmes d'augmentation du niveau modulo  $m^n$  comme dans [6]. On obtiendrait ainsi des extensions modulo  $m^n$ , puis on passerait à la limite sur  $n$ . Cette méthode fera l'objet d'un travail ultérieur, dans un cadre un peu différent.

<sup>5</sup> On ne peut appliquer à nos formes le résultat principal de [35] car elles n'en vérifient pas l'hypothèse, à savoir d'être de carré intégrable en au moins une place finie.

comment contourner cette difficulté. Pour contrôler le comportement de  $\rho'$  aux places  $w$  divisant  $p$ , on utilise une forme convenable d'un résultat récent de Kisin.

**1.2.4.** La dernière étape consiste à appliquer une vieille idée de Ribet (cf. [48]) : l'existence d'une déformation de  $\rho$  comme ci-dessus implique l'existence d'extensions non triviales entre les facteurs de  $\rho$ . Dans le cas de Ribet,  $\rho$  n'avait que deux facteurs et Ribet montrait qu'on pouvait obtenir les extensions d'un facteur par l'autre, dans les deux sens. Mais c'est un fait incontournable (cf. [5]) que quand  $\rho$  a plus de deux facteurs irréductibles, on ne peut assurer l'existence de toutes les extensions entre ces facteurs. On obtient seulement une disjonction d'assertions d'existence. Autrement dit, pour montrer l'existence de l'extension cherchée, on est ramené à montrer la non-existence de certaines autres extensions, non-existence qui a une signification arithmétique globale, étant aussi un cas des conjectures de Bloch–Kato. Dans [3] ainsi que dans la méthode décrite dans [60] (voir loc. cit. dernier paragraphe), la preuve de ces cas de non-existence repose sur des résultats récents et difficiles de Rubin [54] et de Kato ( *$p$ -adic Hodge theory and values of Zeta functions of modular forms*, prépublication) respectivement. Dans cet article, le seul cas de non-existence que nous avons à vérifier est celui d'une extension ayant bonne réduction partout du caractère trivial par le caractère cyclotomique, qui est une application élémentaire de la théorie de Kummer.

### 1.3. Généralisations

Tout d'abord, l'hypothèse sur  $p$  dans le Théorème 1.1 est inessentielle, et devrait être supprimée lorsque les familles  $p$ -adiques seront disponibles aux places non décomposées et en niveau sauvage (travail en cours d'un des auteurs avec K. Buzzard).

La méthode que nous avons esquissée ci-dessus se prête à des généralisations aux groupes unitaires  $U(n)$  compact à l'infini associé à un corps quadratique imaginaire  $E$ . Cependant, on ne dispose pas pour l'instant pour ces groupes, si  $n \geq 4$ , de la construction d'une représentation galoisienne attachée à chaque forme automorphe et vérifiant les propriétés attendues en presque toute place, pas plus que l'on ne dispose des cas nécessaires des formules de multiplicités d'Arthur (cependant des progrès ont été faits récemment dans le cas  $n = 4$ ). Nous avons néanmoins pris garde d'énoncer et de démontrer la plupart des lemmes que nous utilisons sous une forme générale, en vue de leur utilisation pour le cas de  $U(n)$ . Nous comptons revenir sur ce cas dans un avenir proche.

Enfin, il semble par contre plus délicat de généraliser cette méthode au cas où  $E$  est un corps  $CM$  quelconque, et non quadratique imaginaire (voir à ce propos la Remarque 9.1).

### 1.4. Plan de l'article

Indiquons brièvement le contenu des différentes parties de cet article. Dans la partie 2, nous fixons les conventions (concernant essentiellement les normalisations de la théorie du corps de classes et de la correspondance de Langlands locales) et les principales notations que nous utiliserons. La partie 3 décrit la construction par Blasius et Rogawski du système de représentations  $l$ -adiques attaché aux formes automorphes pour  $U(3)$ . Nous démontrons quelques résultats concernant la compatibilité de cette construction avec la correspondance de Langlands locale. La partie 4 construit et décrit la représentation non tempérée  $\pi(\chi)$  discutée plus haut.

Les parties 5, 6 et 7 sont rédigées dans une plus grande généralité. La partie 5 fait, pour  $GL(n)$ , la théorie des différents choix possibles d'une forme propre ancienne de niveau iwahorique en  $p$ , attachée à une forme non ramifiée en  $p$ . La partie 6 traite des raffinements des représentations  $p$ -adiques cristallines, contrepartie galoisienne de la théorie précédente, et des familles de telles

représentations raffinées. On y énonce en particulier, sous une forme adaptée à notre usage, un résultat récent de Kisin. La partie 7 contient les résultats nécessaires sur les pseudo-caractères et les représentations galoisiennes, ainsi que la généralisation adéquate du lemme de Ribet.

Dans la partie 8 nous revenons aux groupes unitaires à trois variables, et construisons des familles  $p$ -adiques passant par  $\pi(\chi)$ . Enfin, la partie 9 montre le théorème principal.

## 2. Notations et conventions

### 2.1. Corps et groupes de Galois

Dans tout cet article, on note  $E \subset \mathbb{C}$  un corps quadratique imaginaire,  $\overline{E}$  la clôture algébrique de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}_E$  l'anneau des adèles de  $E$ ,  $W_E$  et  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  les groupes de Weil et de Galois de  $\overline{E}$  sur  $E$ . Pour  $v$  place de  $E$  on notera  $D_v$  un sous-groupe de décomposition de  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  en  $v$ ,  $I_v$  le sous-groupe d'inertie de  $D_v$ , et  $\text{Frob}_v \in D_v$  un Frobenius géométrique. On note  $\tau \in \text{Gal}(\overline{E}/\mathbb{Q})$  la conjugaison complexe,  $\tau^2 = 1$ .

### 2.2. Représentation antiduale

Soit  $\rho$  une représentation de  $W_E$  ou de  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  dans  $\text{GL}_n(A)$ , où  $A$  est un anneau commutatif. On notera  $\rho^\perp$  la représentation *antiduale* de  $\rho$  définie par

$$\rho^\perp(g) = {}^t \rho(\tau g \tau)^{-1}.$$

### 2.3. Représentations algébriques

Soit  $w = (k_1 \geq \dots \geq k_n) \in \mathbb{Z}^n$ ; on note  $V_w$  la représentation algébrique de  $\text{GL}_n/\mathbb{Q}$  de plus haut poids  $w$  relativement au Borel supérieur de  $\text{GL}_n$ . C'est l'unique représentation algébrique irréductible de  $\text{GL}_n/\mathbb{Q}$  telle que le tore diagonal de  $\text{GL}_n$  agisse sur la droite stable par le Borel supérieur par  $\text{diag}(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}$ . On note

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{n,+} &:= \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 \geq \dots \geq k_n\}, \\ \mathbb{Z}^{n,-} &:= \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 < k_2 < \dots < k_n\}. \end{aligned}$$

Si  $w = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ , on pose

$$-w = (-k_n, \dots, -k_1) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{et} \quad \delta(w) = \text{Min}_{i=1}^{n-1} (k_i - k_{i+1}) \in \mathbb{Z}.$$

Si  $w \in \mathbb{Z}^{n,+}$ ,  $-w \in \mathbb{Z}^{n,+}$  et  $\delta(w) \in \mathbb{N}$ . Le dual de  $V_w$  est alors  $V_{-w}$ . Si  $F$  est un corps de caractéristique 0, on notera  $V_w(F)$  la représentation de  $\text{GL}_n/F$  extension des scalaires à  $F$  de  $V_w$ .

### 2.4. Correspondance de Langlands locale

Nous précisons dans ce paragraphe les conventions choisies pour fixer l'isomorphisme de réciprocity de la théorie du corps de classes ainsi que la correspondance de Langlands locale pour  $\text{GL}_n$ . Soit  $F$  un corps de nombres, on normalise l'isomorphisme d'Artin de la théorie du corps de classes globale

$$\text{rec}_F : \mathbb{A}_F^* / \overline{F^*(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{*,0}} \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)^{ab}$$

en demandant qu'il envoie toute uniformisante locale  $\pi_v$  en une place finie  $v$  sur le Frobenius géométrique de  $D_v/I_v$ , avec l'abus de langage évident. Pour toute place  $v$  de  $F$ , on dispose alors par restriction de  $\text{rec}_F$ , d'un isomorphisme du corps de classes local

$$\text{rec}_{F_v} : F_v^* \longrightarrow W_F^{ab}$$

compatible à l'isomorphisme global.

Supposons maintenant que  $F$  est un corps local non archimédien. On choisit la normalisation à la Langlands pour la correspondance de Langlands locale pour  $\text{GL}_n(F)$ , notée  $L$  (voir par exemple [34, p. 2]). Ainsi, pour  $\pi$  une représentation irréductible lisse de  $\text{GL}_n(F)$ ,  $L(\pi)$  est une représentation complexe  $\Phi$ -semi-simple de dimension  $n$  du groupe de Weil–Deligne  $WD_F$  (cf. [61, 4.1]). Pour  $n = 1$ ,  $\pi$  est un caractère de  $\text{GL}_1(F) = F^*$  et  $L(\pi)$  est le caractère de  $W_F$  qui s'en déduit via l'isomorphisme  $\text{rec}_{F_v}$  ci-dessus. Par exemple,  $L$  envoie le quotient de Langlands de l'induite parabolique attachée à deux représentations lisses irréductibles  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sur la somme directe  $L(\pi_1) \oplus L(\pi_2)$ .

Soit  $l$  un nombre premier; on fixe  $\iota_l : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$  un isomorphisme de corps. Pour  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $\text{GL}_n(F)$ ,  $F$  un corps local non archimédien, on peut voir  $L(\pi)$ , par transport de structure via  $\iota_l$  comme une représentation sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  en fait définie sur une extension finie de  $\mathbb{Q}_l$ , et on peut donc lui associer une représentation notée  $L_l(\pi)$  du groupe de Weil ordinaire  $W_F$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , comme en [61, 4.2.1].

**2.5. Caractères de Hecke**

Soit  $\chi : E^* \backslash \mathbb{A}_E^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  un caractère de Hecke de  $E$ ; pour toute place  $v$  de  $E$ , on note  $\chi_v$  la restriction de  $\chi$  à  $E_v^*$  et  $\chi_f$  sa restriction aux idéles finies  $\mathbb{A}_{f,E}^*$ . On identifie  $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$  via l'inclusion  $E \subset \mathbb{C}$ . On suppose dans ce qui suit que  $\chi$  est algébrique, i.e  $\chi_{\infty}(z) = z^a \bar{z}^b$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ , et on fixe encore  $l$  et  $\iota_l$  comme dans la section précédente en supposant de plus  $l = v_1 v_2$  totalement décomposé dans  $E$ ,  $v_1$  étant la place définie par  $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ . À  $(\chi, \iota_l)$  on peut alors associer un caractère continu  $\overline{E}^* \backslash \mathbb{A}_{f,E}^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^*$  défini par la formule :

$$x \mapsto \iota_l(\chi_f(x)) x_{v_1}^a x_{v_2}^b.$$

Par composition avec  $\text{rec}_E$ , on en déduit un caractère  $l$ -adique de  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  que nous noterons  $\chi_l$  (à ne pas confondre avec une composante locale de  $\chi$ , mais c'est sans ambiguïté).

**2.6. Poids de Hodge**

Dans ce paragraphe,  $p$  est un nombre premier fixé,  $\mu_{p^n}$  désigne le  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ -module des racines  $p^n$ -ièmes de l'unité de  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . On note  $\omega$  le caractère cyclotomique

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_p} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{p^n} \right) = \mathbb{Z}_p^*.$$

On note  $\mathbb{Q}_p(1)$  le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension 1 muni d'une action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  par le caractère cyclotomique. Notre convention est que cette représentation est de Hodge–Tate de poids de Hodge–Tate  $-1$  (cf. [57]). Si  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\mathbb{Q}_p(n) := \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes n}$ , et si  $V$  est un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel représentation de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ,  $V(n) := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(n)$ .

Si  $F$  est un corps local et  $V$  un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie qui est une représentation continue de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ , nous noterons  $D_{\text{cris}}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}})^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$  (cf. [30], §2.3,

3.1). Il hérite de  $B_{\text{cris}}$  d'un endomorphisme  $F$ -linéaire  $\varphi$ , le Frobenius cristallin, et lorsque nous parlerons des valeurs propres de ce dernier, ce sera toujours vu comme  $F$ -endomorphisme. On rappelle que  $V$  est dite cristalline si  $\dim_F D_{\text{cris}}(V) = \dim_F(V)$  (cf. [31], 5.4). On parlera parfois, par abus, du Frobenius cristallin de  $V$  pour celui de  $D_{\text{cris}}(V)$ .

## 2.7. Géométrie rigide

Si  $X/F$  est un affinoïde sur un corps local  $F$ , on notera  $A(X)$  la  $F$ -algèbre affinoïde de  $X$ . Si  $X$  est réduit, la norme sup. sur  $X$  fait de  $A(X)$  une  $F$ -algèbre de Banach commutative. On notera  $A(X)^0$  les éléments de  $A(X)$  de norme sup.  $\leq 1$ .  $\mathbb{A}^n$  désigne l'espace affine rigide analytique de dimension  $n$  sur  $\mathbb{Q}_p$ .

## 3. Rappel sur la classification de Rogawski

### 3.1. Les groupes unitaires considérés

Soit  $f$  la forme hermitienne sur  $E^3$  de matrice

$$\begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}.$$

Comme Rogawski ([49], pp. 66, 67), on note  $U(2, 1)$  le groupe unitaire sur  $\mathbb{Z}$  défini par cette forme ; il est quasi-déployé. On fixe  $U(3)$  une forme intérieure de  $U(2, 1)$  compacte à l'infini, inchangée aux places finies [25, Lemme 2.1].

### 3.2. Classification de Rogawski

**3.2.1.** Suivant Rogawski, et comme prédit par les conjectures d'Arthur, les représentations automorphes discrètes des groupes  $U(2, 1)$  et  $U(3)$  sont regroupées en  $A$ -paquets de 5 types [49, 2.9]. Chaque  $A$ -paquet  $\Pi$  possède un changement de base  $\pi_E$  qui est une représentation automorphe de  $GL(3)/E$  [49, 2.8].

**3.2.2.** Étant donné un nombre premier  $l$  et un isomorphisme de corps  $\iota_l : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ , on peut associer, grâce aux travaux de Rogawski, à un  $A$ -paquet  $\Pi$  de  $U(3)$  (resp. de  $U(2, 1)$  s'il est cohomologique à l'infini) une représentation  $l$ -adique continue, semi-simple, découpée dans la cohomologie  $l$ -adique des surfaces de Picard :

$$\rho_l(\Pi) : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow \text{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_l),$$

caractérisée par la propriété suivante, pour toute place finie  $w$  de  $E$  :

(3) Si  $w$  ne divise pas  $l$   $\text{disc}(E)$  et si  $(\pi_E)_w$  est non ramifiée,  $(\rho_l(\Pi)|_{D_w})^{\text{ss}} \simeq L_l((\pi_E)_w)$ .

Autrement dit,  $\rho_l$  est non ramifiée en  $w$ , et le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique  $\text{Frob}_w$  est égal à celui de la matrice de Hecke de  $(\pi_E)_w$ . En conséquence,  $\rho_l \simeq \rho_l^\perp$ . Lorsque  $\Pi$  est sous-entendu, on notera  $\rho_l$  pour  $\rho_l(\Pi)$ . Bien que le choix de  $\iota_l$  n'est pas apparent dans la notation  $\rho_l$ , il sera toujours sous-entendu.

**3.2.3.** Nous nommons et décrivons ci-dessous les 5 types de  $A$ -paquets, ainsi que les propriétés des représentations galoisiennes associées quand elles existent. Quand le  $A$ -paramètre  $a$  et le  $L$ -paramètre  $\phi$  du changement de base  $\pi_E$  du paquet considéré ont un sens non conjectural (i.e. se factorisent par le quotient  $W_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  du groupe conjectural  $L_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ), nous les donnons.

L'existence de  $\rho_l$  satisfaisant (3) résulte, dans les cas non triviaux, du Théorème 1.9.1 de [9] (voir aussi [49], §4.4), mais le lecteur prendra garde que la définition de  $\rho_l$  que nous prenons (motivée par la vérification de (3) §3.2.2) ne coïncide pas avec la représentation appelée  $\rho_l$ , loc. cit., que nous noterons  $\rho_{l,\mathrm{rog}}$  ci-dessous (qui d'ailleurs n'est pas toujours de dimension 3).

- Cas stable tempéré; l'existence de  $\rho_l$  résulte de [9, Théorème 1.9.1(a)]. Notre  $\rho_l$  est  $\rho_{l,\mathrm{rog}}(1)$  avec les notations de loc. cit. La représentation  $\rho_l$  est irréductible<sup>6</sup> et satisfait  $\rho_l \simeq \rho_l^\perp$ .
- Cas endoscopique tempéré de type  $(2, 1)$ ; l'existence de  $\rho_l$  résulte de [9, Théorème 1.9.1(b)] (on définit  $\rho_l$  comme  $\rho_{l,\mathrm{rog}}(1) \otimes \chi_l^{-1} \oplus \chi_l(1)$  avec les notations de loc. cit.).  
On a  $\rho_l \simeq \tau_l \oplus \chi_l$ , avec  $\tau_l$  irréductible de dimension 2,  $\tau_l \simeq \tau_l^\perp$ ,  $\chi_l = \chi_l^\perp$ .
- Cas endoscopique tempéré de type  $(1, 1, 1)$ ; le  $A$ -paramètre  $a$  est trivial sur le facteur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , et l'on a

$$a|_{L_E} = \phi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3,$$

$\psi_i : W_E \rightarrow \mathbb{C}^*$  vérifiant  $\psi_i = \psi_i^\perp$ . Les  $A$ -paquets de ce type sont cohomologiques quand les caractères de Hecke  $\psi_i$  sont algébriques; on définit  $\rho_l$  par  $(\psi_1)_l \oplus (\psi_2)_l \oplus (\psi_3)_l$ .

- Cas endoscopique non tempéré; le  $A$ -paramètre  $a$  vérifie

$$\forall w \in W_E, \quad a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix}$$

où  $\chi$  et  $\psi$  sont des caractères de Hecke de  $E$  vérifiant  $\chi = \chi^\perp$ ,  $\psi = \psi^\perp$ , et

$$a|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Nous noterons le  $A$ -paquet correspondant  $\Pi(\chi, \psi)$ . Le  $L$ -paramètre  $\phi$  vérifie donc

$$\forall w \in W_E, \quad \phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|w|^{1/2} & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w)|w|^{-1/2} \end{pmatrix},$$

et l'on pose, si  $|\chi|^{1/2}$  et  $\psi$  sont algébriques, auquel cas  $\phi$  est cohomologique à l'infini

$$\rho_l = (\chi|\cdot|^{1/2})_l \oplus \psi_l \oplus (\chi|\cdot|^{-1/2})_l.$$

Nous analyserons les  $A$ -paquets de ce type de manière beaucoup plus détaillée dans la section suivante.

<sup>6</sup> Nous ne nous servons pas de ce fait. Voir la remarque suivant la Proposition 9.1.



– Cas stable non tempéré; le  $A$ -paramètre  $a$  vérifie

$$\forall w \in W_E, \quad a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix},$$

où  $\chi$  est un caractère de Hecke de  $E$  vérifiant  $\chi = \chi^\perp$  et  $a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$  est la représentation irréductible de dimension 3. On a donc pour  $L$ -paramètre

$$\phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|\cdot|^{-1} & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w)|\cdot| \end{pmatrix},$$

où  $\chi = \chi^\perp$ . Les  $A$ -paquets correspondants sont des singletons, composés des représentations automorphes de dimension 1.

### 3.3. Propriétés de $\rho_l$

On conjecture naturellement que la construction  $\Pi \mapsto \rho_l$  est compatible avec la correspondance de Langlands locale. Plus précisément, on s’attend à ce que l’énoncé suivant soit vérifié :

COMP. – *Si  $\Pi$  est un  $A$ -paquet, de changement de base  $\pi_E$ , alors pour tout  $l$ , et pour toute place finie  $v$  de  $E$  ne divisant pas  $l$ , le Frobenius-semi-simplifié de la représentation galoisienne  $(\rho_l)|_{D_v}$  est isomorphe à  $L_l((\pi_E)_v)$ .*

Il est vrai pour les places finies  $v$  ne divisant pas  $\mathrm{disc}(E)$  et où le  $A$ -paquet local  $\Pi_v$  est non ramifié (c’est la propriété (3), §3.2.2). De plus, les travaux de Harris–Taylor [35, Théorème C] montrent qu’il est vrai pour tout  $v$  si  $\pi_E$  est de carré intégrable à au moins une place finie.<sup>7</sup> Malheureusement, cette hypothèse ne sera jamais vérifiée dans les cas que nous aurons à traiter.

Nous allons démontrer dans ce qui suit les cas particuliers de (COMP) dont nous aurons besoin. La propriété suivante est une extension de la propriété (3) aux places divisant  $\mathrm{disc}(E)$ . Il sera utile de nous placer dans un contexte un peu plus général : soit  $F$  un corps totalement réel,  $U(3)/F$  le groupe unitaire à trois variables associé à l’extension  $EF/F$ , compact à toutes les places à l’infini. Pour  $\Pi$  un  $A$ -paquet de  $U(3)/F$ , les travaux de Rogawski définissent encore, tout comme dans le cas  $F = \mathbb{Q}$ , un changement de base  $\pi_{EF}$  à  $GL(3)/EF$ , et des représentations galoisiennes  $\rho_l$  de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/EF)$ , vérifiant l’analogie de (3) §3.2.2.

PROPOSITION 3.1. – *Si  $\Pi$  est un  $A$ -paquet de  $U(3)_F$ , de changement de base  $\pi_{EF}$ , alors pour tout  $l$ , et pour toute place finie  $v$  de  $EF$  ne divisant pas  $l$  où  $\pi_{EF}$  est non ramifiée,  $\rho_l|_{D_v}$  est non ramifiée.*

Preuve. – Soit  $v$  une place finie de  $EF$  ne divisant pas  $l$  et telle que  $(\pi_{EF})_v$  est non ramifiée, on veut montrer que  $\rho_l$  est non ramifiée en  $v$ . On note  $w$  la place de  $F$  que divise  $v$ . Montrons d’abord le résultat si  $w$  ne divise pas le discriminant relatif de  $EF/F$ .

Soit  $G'_F$  une forme intérieure de  $U(3)_F$  quasi-déployée à toutes les places finies de  $F$  et à une seule place infinie. Par [49, Théorème 2.6.1], le  $A$ -paquet  $\Pi$  se transfère en un  $A$ -paquet  $\Pi'$  cohomologique du groupe  $G'_F$ . Le groupe  $G'_F$  satisfait les hypothèses de [49], §4, et d’après loc. cit. §4.4,  $\rho_l(-1)$  est construite dans la cohomologie à coefficients de la variété de Shimura associée à  $G'_F$ . Comme  $(EF)_v/F_w$  est non ramifiée, ainsi que  $\Pi'_w = \Pi_w$ , le choix d’un membre

<sup>7</sup> Plus exactement, qu’il est vrai à semi-simplification de l’opérateur de monodromie près.

non ramifié en  $w$  du  $A$ -paquet  $\Pi'$  assure que  $\rho_l(-1)$  est construite dans la cohomologie à coefficients d'une surface de Picard de niveau fini hyperspécial en  $w$ . Or cette variété de Shimura a bonne réduction en  $v$  : cela résulte d'un simple calcul de déformation du problème de modules dont elle est l'espace de module, comme celui fait en [3, Proposition II.2.1.5]. Cela conclut.

Nous n'allons traiter en détail le cas restant que quand  $\Pi$  est stable, les cas endoscopiques se ramenant à des cas stables<sup>8</sup> pour le groupe  $U(2) \times U(1)$  par la classification de Rogawski du §3.2. On suppose donc  $\Pi$  stable. D'après [52, Théorème 13.3.3(b)], soit  $\pi_{EF}$  est cuspidale, soit  $\Pi$  est le  $A$ -paquet d'une représentation de dimension 1. Dans ce dernier cas, la proposition découle de la théorie du corps de classes, on supposera donc que  $\pi_{EF}$  est cuspidale dans ce qui suit.

Supposons que  $v$  divise le discriminant de  $EF/F$ , en particulier  $v$  divise un premier  $p \in \mathbb{Z}$  ramifié dans  $E$ ,  $p \neq l$ . Soit  $F'$  un corps quadratique réel ramifié en  $p$  et tel que  $EF'/F'$  est décomposé en l'unique place de  $F'$  au-dessus de  $p$ . Il est aisé de voir qu'un tel corps existe toujours. Par exemple si  $p \neq 2$ ,  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{pD})$  avec  $-D \in \mathbb{N}$  sans facteur carré, alors il existe  $D' \in \mathbb{N}$  premier à  $p$  et sans facteur carré tel que  $DD'$  est un carré modulo  $p$ ,  $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{pD'})$  convient. Alors  $EF$  ne contient pas  $F'$ ,  $FF'$  est totalement réel et ramifié au-dessus de  $w$ , en une place que l'on note  $w'$ , et  $EFF'/FF'$  est alors décomposé au-dessus de  $w'$ .

Notons  $\pi_{EFF'}$  le changement de base d'Arthur–Clozel ([1, Théorème III.4.2]) de  $\pi_{EF}$  à  $EFF'$ . La représentation  $\pi_{EFF'}$  est cuspidale par le Théorème 4.2(a) loc. cit., car  $EFF'/EF$  est quadratique et  $n = 3$ . De plus,  $\pi_{EFF'}$  est anti-autoduale car c'est déjà le cas de  $\pi_{EF}$ , et par multiplicité 1 forte dans le spectre cuspidal de  $GL(3)_{EFF'}$ . D'après Rogawski [52, Théorème 13.3(a)],  $\pi_{EFF'}$  descend en un  $A$ -paquet stable  $\Pi_{FF'}$  du groupe unitaire à trois variables quasi-déployé  $U(2, 1)_{FF'}$  sur  $FF'$ , et même à  $U(3)_{FF'}$  par la propriété de relèvement fort à l'infini du changement de base d'Arthur–Clozel ([1, Théorème III.5.1]) et [49], Théorème 2.6.1. Mais si l'on suit les constructions précédentes, un groupe de décomposition en  $v$  de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}/EF)$  s'identifie à un groupe de décomposition en  $w'$  de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}/EFF')$ , et  $\pi_{EFF'}$  est toujours non ramifiée en  $w'$ . On applique alors le premier paragraphe à  $FF'$  et  $\Pi_{FF'}$ , ce qui conclut.  $\square$

**PROPOSITION 3.2.** – *Soit  $\Pi$  un  $A$ -paquet de  $U(3)$ ,  $l$  un nombre premier,  $v$  une place finie de  $E$  ne divisant pas  $l$ , telle que  $L((\pi_E)_v) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3$ , où les  $\phi_i$  sont des caractères continus  $E_v^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Soit  $I' := \text{rec}_v(\text{Ker}((\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3)|_{\mathcal{O}_{E_v}^*}))$ , alors  $\rho_l(I') = 1$ .*

*Preuve.* – Tout comme dans la Proposition 3.1 §3, nous n'allons traiter en détail que le cas où  $\pi_E$  est cuspidale, ce que l'on suppose donc. Nous allons appliquer le changement de base d'Arthur–Clozel à  $\pi_E$ . On rappelle, d'après [1, Théorème III.4.2(a)], que si  $k'/k$  est une extension cyclique de degré premier et  $\pi$  est une représentation automorphe cuspidale de  $GL(n)/k$ , alors  $\pi$  admet un changement de base faible à  $GL(n)/k'$ , qui est cuspidale si  $\pi$  n'est pas isomorphe à  $\pi \otimes \chi$ ,  $\chi$  étant un caractère non trivial de  $\mathbb{A}_k^*/k^*$  attaché à  $k'/k$ . Notons que, dans notre cas ( $n = 3$ ), cette dernière condition est donc automatiquement satisfaite si  $[k' : k] \neq 3$ , ou encore si  $k'/k$  est ramifié en une place où  $\pi$  ne l'est pas.

Soit  $p \in \mathbb{Z}$  premier au-dessous de  $v$  ; considérons l'extension abélienne finie de  $E_v$  définie par

$$M := \overline{E}_v^{\text{rec}_{E_v}(\text{Ker}(\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3))}.$$

<sup>8</sup> Strictement, il aurait fallu aussi traiter en parallèle, dans le second paragraphe de la preuve de la proposition, le cas du groupe  $U(2) \times U(1)$ , mais celui-ci est plus facile. De manière générale, nous ne traiterons en détail dans cette section que le cas stable tempéré, car c'est le seul dont nous ayons réellement besoin dans les applications au §9. Par exemple, utilisant la Proposition 9.1, il est aisé de vérifier que les  $\rho_z$ ,  $z \in Z$ , de la Proposition 8.3(ii) sont attachées à des représentations automorphes de  $U(3)$  qui sont stables tempérées.

Supposons que l'on sache trouver un corps de nombres  $F/\mathbb{Q}$  ayant les propriétés suivantes :

- (i)  $F$  est totalement réel.
- (ii) Il existe une tour d'extensions  $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_r = F$ , telle que  $F_{i+1}/F_i$  soit cyclique d'ordre premier et telle que le changement de base de  $\pi_{EF_i}$  à  $EF_{i+1}$ , noté  $\pi_{EF_{i+1}}$ , soit cuspidal.
- (iii)  $EF$  admet une place  $w$  divisant  $v$  telle que  $(EF)_w/E_v$  soit isomorphe à  $M/E_v$ .

En particulier, on dispose d'un changement de base cuspidale  $\pi_{EF}$  de  $\pi_E$  à  $EF$ , qui est en fait fort, i.e. compatible au changement de base local en toutes les places, d'après [1, Théorème III.5.1]. Appliquant ceci à l'extension  $(EF)_w/E_v$ , l'hypothèse (iii). assure que  $(\pi_{EF})_w$  est non ramifiée. La représentation  $\pi_E$  étant anti-auto-duale, le théorème de multiplicité 1 forte dans le spectre cuspidal de  $GL(3)_{EF}$  entraîne qu'il en va de même pour  $\pi_{EF}$ . D'après [52, Théorème 13.3.3(a)],  $\pi_{EF}$  descend donc en un  $A$ -paquet (stable) du groupe  $U(2,1)_F$ , puis à  $U(3)_F$  par la propriété de relèvement fort à l'infini du changement de base d'Arthur-Clozel. La Proposition 3.1 appliquée à ce paquet conclut.

Il reste à trouver un corps de nombres  $F$  comme plus haut. Fixons  $F_1/\mathbb{Q}$  un corps quadratique réel ayant une place  $v'$  divisant  $p$  tel que  $(F_1)_{v'} \simeq E_v$ . L'extension  $EF_1/E$  étant quadratique, une remarque faite plus haut assure que  $\pi_{EF_1}$  est cuspidal. Considérons une tour  $G_1 = (F_1)_{v'} = E_v \subset G_2 \subset \dots \subset G_r = M$  avec des  $G_{i+1}/G_i$  cycliques d'ordre premier noté  $q_i$ . Nous allons construire les  $F_i$  satisfaisant (ii) récursivement tels que  $F_{i+1}$  admette une place  $w_{i+1}$  divisant  $w_i$ ,  $(F_i)_{w_i} \simeq G_i$ , et  $w_1 = v'$ . Supposons un tel  $F_i$  construit. Fixons une place finie  $u$  de  $EF_i$  telle que  $(\pi_{EF_i})_u$  est non ramifiée, que  $u$  ne divise pas  $\text{disc}(E)$ , et telle que  $(F_i)_u$  admette une extension ramifiée (par exemple modérément) de degré  $q_i$ . Appliquons Artin-Tate [2, Théorème 5, p. 103] à  $F_i$  et l'ensemble fini de places  $S$  composé de  $w_i, u$  et des places infinies. On en déduit l'existence d'une extension abélienne  $k/F_i$ , finie de degré  $q_i$  ou  $2q_i$ , totalement réelle, ayant une place  $w'$  (resp.  $u'$ ) divisant  $w_i$  (resp.  $u$ ) telle que  $k_{w'}/(F_i)_{w_i} \simeq G_{i+1}/G_i$  (resp.  $k_{u'}/(F_i)_u$  est ramifiée de degré  $q_i$ ). Si  $q_i$  est impair, il est clair que l'on peut supposer que  $[k : F_i] = q_i$ . Dans ce cas,  $F_{i+1} := k$  et  $w_{i+1} := w'$  conviennent car  $EF_{i+1}/EF_i$  est ramifié en une place où  $\pi_{EF_i}$  ne l'est pas. Si  $q_i = 2$ , alors on prend pour  $F_{i+1}/F_i$  une sous-extension quadratique de  $k/F_i$  telle que  $(F_{i+1})_{w'} = G_{i+1}$ ,  $w_{i+1} := w'|_{F_{i+1}}$ . Comme  $EF_{i+1}/EF_i$  est quadratique,  $F_{i+1}$  satisfait aussi (ii).  $\square$

**PROPOSITION 3.3.** – *Soit  $l$  un nombre premier décomposé dans  $E$ ,  $\iota_l$  comme plus haut,  $\Pi$  un  $A$ -paquet pour  $U(3)$  de changement de base  $\pi_E$ ,  $v$  une place de  $E$  divisant  $l$  telle que  $(\pi_E)_v$  est non ramifiée, alors :*

- (1)  $(\rho_l(\Pi))|_{D_v}$  est cristalline en  $v$ .
- (2) Le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin de  $(\rho_l(\Pi))|_{D_v}$  est l'image par  $\iota_l$  de celui de  $L((\pi_E)_v)(\text{Frob}_v)$ ,  $\text{Frob}_v$  étant un Frobenius géométrique de  $W_{E_v}$ .
- (3) Si le  $L$ -paramètre de  $\Pi_\infty$  a sa restriction à  $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$  de la forme  $(z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}$  avec  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$ ,  $a_1 > a_2 > a_3$ , alors les poids de Hodge-Tate de  $(\rho_l(\Pi))|_{D_v}$  sont les  $-a_i$  si  $v$  est la place de  $E$  induite par  $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ , les  $a_i$  sinon.

*Preuve.* – La proposition est immédiate si le  $L$ -paramètre de  $\Pi$  est somme de trois caractères ; il ne reste donc qu'à traiter les cas où  $\Pi$  est stable tempéré ou endoscopique tempéré de type  $(2,1)$  (cf. §3.2). Nous nous placerons par exemple dans le premier cas, le second se traitant de manière identique.

Soit  $F$  un corps quadratique réel. Un argument déjà donné dans la preuve de la Proposition 3.1 montre que le changement de base d'Arthur-Clozel de  $\pi_E$  à  $EF$  est une représentation automorphe cuspidale qui descend en un  $A$ -paquet stable  $\Pi_F$  de  $U(3)_F$ . D'après [49, Théorème 2.6.1], ce paquet se transfère en un  $A$ -paquet  $\Pi'_F$  cohomologique stable du groupe  $G'/F$  suivant :  $G'/F$  est une forme intérieure du groupe quasi-déployé sur  $U(2,1)/F$ , non

quasi-déployé uniquement à l’une des deux places infinies. Notons que les variétés de Shimura attachées à  $G'/F$ ,<sup>9</sup> les *surfaces de Picard*, ont des modèles canoniques qui sont des variétés quasiprojectives lisses sur  $EF$  (cf. [33], §6), et même projectives car  $G'/F$  est anisotrope. On fixe un élément  $\pi \in \Pi'_F$ , ainsi qu’un ouvert compact net  $U \subset G'(\mathbb{A}_{F,f})$  tel que  $\pi^U \neq \{0\}$ . D’après [49], §4.3, §4.4 (“Case 2” dans le cas stable tempéré), la représentation

$$\rho'_l := \rho_l(\pi)(-1)_{|\text{Gal}(\overline{EF}/EF)}$$

apparaît dans la cohomologie  $l$ -adique en degré 2 d’un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse, noté  $\mathcal{F}$  loc. cit.,<sup>10</sup> sur la surface de Picard de niveau fini  $U$ , que l’on note  $X_U/EF$ . Afin de construire un motif de Grothendieck dont  $\rho'_l$  est une réalisation  $l$ -adique, il nous faut tout d’abord nous débarrasser du coefficient  $\mathcal{F}$ . Nous réalisons ce motif dans la cohomologie  $l$ -adique à coefficients constants d’une variété de Kuga sur  $X_U$ . Soit  $\mathcal{A} \rightarrow X_U$  le schéma abélien universel sur  $X_U$ , on note  $\mathcal{A}^m$  le produit fibré  $m$ -fois de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $X_U$ ;  $\mathcal{A}^m$  est en particulier propre et lisse sur  $EF$ . Le  $\overline{\mathbb{Q}}_l[\text{Gal}(\overline{EF}/EF)]$ -module  $H_{\text{ét}}^2(X_U \times \overline{EF}, \mathcal{F})$  est alors un facteur direct découpé par une correspondance algébrique idempotente de

$$H_{\text{ét}}^{2+m_{\mathcal{F}}}(\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}} \times \overline{EF}, \overline{\mathbb{Q}}_l)(t_{\mathcal{F}}),$$

pour des entiers  $m_{\mathcal{F}}$  et  $t_{\mathcal{F}}$  bien choisis. Ceci est expliqué en détail dans [35, Chapitre III.2, p. 98]. Notons pour finir que d’après [49], §4.3 (fin du paragraphe), la multiplicité 1 dans le spectre discret de  $G'$  assure même que l’on peut découper exactement  $\rho'_l$  par des correspondances de Hecke, plutôt que simplement un de ses multiples.

On supposera par la suite que  $l = uu'$  est décomposé dans  $F$ , et on note  $v \times u$  le plongement  $EF \rightarrow \mathbb{Q}_l$  déduit de  $v$  et  $u$ . Ces données nous permettent en particulier de fixer un isomorphisme  $G'(F_u) \rightarrow \text{GL}(3)(\mathbb{Q}_l)$ , d’identifier  $\Pi_l$  avec  $(\Pi'_F)_u$ , et  $D_v$  au groupe de décomposition en  $v \times u$  de  $\text{Gal}(\overline{EF}/EF)$ . Par hypothèse de l’énoncé,  $(\Pi'_F)_u$  est non ramifié et on peut donc choisir un compact ouvert net  $U$  égal à  $\text{GL}_3(\mathbb{Z}_l)$  en  $u$ , ainsi que  $\pi \in \Pi'_F$  tel que  $\pi^U \neq \{0\}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{A}_U \rightarrow X_U$  a un modèle propre et lisse sur  $\mathcal{O}_{(EF)_{v \times u}}$  (cf. par exemple [40], §5), ainsi donc que  $\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}}$ . L’assertion 1 découle de ce que la cohomologie  $l$ -adique à coefficients dans  $\mathbb{Q}_l$  d’un schéma propre et lisse sur  $\mathbb{Z}_l$  est cristalline (cf. [31], Théorème 6.1.4, [29]).

La propriété 2 découle de manière standard de la construction motivique de  $\rho'_l$  explicitée ci-dessus et d’un théorème de Katz–Messing [37, Théorème 2.2], combinés à (3) §3.2.2 et [59, Corollaire 2.2]. Prouvons la propriété 3. La construction motivique ci-dessus et le théorème de comparaison *De Rham-étale* de Faltings (cf. [29],<sup>11</sup> [31, §6.1]) appliqué à  $H_{\text{ét}}^{2+m_{\mathcal{F}}}(\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}} \times \overline{EF}, \overline{\mathbb{Q}}_l)(t_{\mathcal{F}})$ , entraînent que les poids de Hodge–Tate de  $(\rho'_l)_{|D_v}$  sont les poids de Hodge de la réalisation de De Rham de  $\rho'_l$  associée au plongement complexe  $\iota_l^{-1}(v \times u)$ . L’identification de ces derniers en terme des  $a_i$  est une conséquence de [35], Proposition III.2.1 (6), la preuve étant détaillée loc. cit. dans les pages 99 à 104. Précisons que les arguments du §III.2 loc. cit. sont aussi valables pour notre groupe unitaire  $G'/F$  (qui ne diffère des leurs qu’en des places finies), à l’unique “modification” près suivante : la référence à Kottwitz en bas de la page 103 (au sujet de la formule de Matsushima) doit être remplacée par un appel à Rogawski [49], §4.3 page 89. □

<sup>9</sup> Plus précisément, celles attachées au groupe de similitudes unitaires contenant  $G'/F$  ([33], §6), cf. [49], §2.5 pour le lien entre  $A$ -paquets de  $G'$  et du groupe de similitudes.

<sup>10</sup> Il ne dépend que de  $\Pi_{\infty}$  ; sa construction est expliquée en détail dans [35], Chapitre III.2.

<sup>11</sup> Nous n’utilisons ici les résultats de loc. cit. que dans le cas de la cohomologie  $l$ -adique à coefficients constants d’un schéma propre et lisse sur  $\mathbb{Z}_l$ .

## 4. Représentation non tempérée attachée à un caractère de Hecke

### 4.1. Hypothèses sur le caractère de Hecke

Soit  $\chi_0$  un caractère de Hecke de  $E$ , vérifiant

$$\chi_0(z\bar{z}) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{A}_E^*, \quad \text{et} \quad \chi_{0,\infty}(z_\infty) = z_\infty^k / |z_\infty|_{\mathbb{C}}^{k/2}, \quad k \text{ est un entier impair positif.}$$

Par la première hypothèse, sa fonction  $L$  complète  $L(\chi_0, s)$  a pour équation fonctionnelle ([61], 3.6.8 et 3.6.1)

$$L(\chi_0, 1-s) = \varepsilon(\chi_0, s)L(\chi_0, s), \quad \varepsilon(\chi_0, 1/2) = \pm 1.$$

On utilisera de plus le caractère algébrique  $\chi := \chi_0 | \cdot |^{1/2}$ , dont on note  $\chi_v$  la composante locale en une place  $v$  de  $E$ . On a  $\chi^\pm = \chi | \cdot |^{\pm 1}$ , et si  $\infty$  désigne  $E \subset \mathbb{C}$ ,  $\chi_\infty(z) = z^{(k+1)/2} \bar{z}^{(1-k)/2}$ . On notera  $\text{cond}(\chi_0)$  le conducteur de  $\chi_0$ , qui est aussi celui de  $\chi$ , et  $\text{disc}(E)$  le discriminant de  $E$ .

Dans les sous-parties qui suivent, nous décrivons, suivant Rogawski, les composantes locales du  $A$ -paquet endoscopique non tempéré  $\Pi(\chi, 1)$ .

### 4.2. Composantes locales en $p$ décomposé

**4.2.1.** Soit  $p = v_1 v_2$  un nombre premier décomposé dans  $E$ , la donnée des  $v_i$  nous fournit un isomorphisme  $U(3)(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_3(E_{v_i}) = \text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ . Ces deux isomorphismes diffèrent d'un automorphisme extérieur de  $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ . Fixons celui avec  $v_1$  par exemple.

**4.2.2.** Soit  $P = MN$  le parabolique standard de  $U(3)(\mathbb{Q}_p) = \text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$  de type  $(2, 1)$ ; considérons le caractère complexe lisse  $\lambda_p$  de  $M = \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$  défini par  $\lambda_p(x, y) = \chi_{0, v_1}(\det(x))$ . L'induite parabolique normalisée de  $\lambda_p$  est irréductible ([50], p. 196), on la note  $\pi_p^n(\chi_0)$ .

**4.2.3.** Si  $\chi$  est non ramifié en  $p$  (décomposé),  $\pi_p^n(\chi_0)$  est non ramifiée, et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal. On en choisit un, noté  $K_p$ , égal à  $U(3)(\mathbb{Z}_p)$  pour  $p$  assez grand [63, 3.9.1].

### 4.3. Composantes locales en $p$ inerte ou ramifié

**4.3.1.** Suivant Rogawski ([50], p. 396), définissons pour  $p$  un nombre premier inerte ou ramifié dans  $F$ , une représentation lisse irréductible  $\pi_p^n(\chi_0)$  de  $U(2, 1)(\mathbb{Q}_p) = U(3)(\mathbb{Q}_p)$  de la manière suivante :

On voit  $\chi_{0,p}$  comme caractère du tore diagonal de  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$  par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_p(\alpha).$$

L'induite parabolique normalisée de  $\chi_{0,p}$  a deux facteurs de Jordan-Hölder, dont l'un est non tempéré, qu'on note  $\pi_p^n(\chi_0)$  (ou bien  $\pi^n(\chi_{0,p})$ ), l'autre de carré intégrable  $\pi_p^2(\chi_0)$  (ou bien  $\pi^2(\chi_{0,p})$ ). ([52], p. 173, [38], p. 126.) La représentation  $\pi^n(\chi_{0,p})$  appartient à un unique  $A$ -paquet  $\{\pi^n(\chi_{0,p}), \pi^s(\chi_{0,p})\}$  où la représentation  $\pi^s(\chi_{0,p})$  est définie dans [52, p. 295].

**4.3.2.** Si  $p$  est inerte et  $\chi$  non ramifié en  $p$ ,  $\pi_p^n(\chi_0)$  est non ramifiée et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal hyperspécial. Là encore, on en choisit un  $K_p$ , que l'on prend égal à  $U(3)(\mathbb{Z}_p)$  quand on le peut (pour presque tout  $p$ , cf. [63, 3.9.1]).

**4.3.3.** Si  $p$  est ramifié, le groupe  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$  est un groupe unitaire ramifié. Il a deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux, mais aucune d'entre elles n'est hyperspéciale. D'après [24, Proposition 2.4.7], l'une de ces deux classes, dont on fixe un représentant  $K_p$ , est telle que pour tout caractère non ramifié  $\eta$  du tore diagonal (i.e. trivial sur le compact maximal de ce tore), la représentation  $\pi_p^n(\eta)$  définie en 4.3.1 admet un vecteur non nul fixé par  $K_p$ , mais n'admet pas de vecteur non nul fixé par l'autre classe de conjugaison.<sup>12</sup> Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4.1. – Soit  $\pi$  une représentation automorphe irréductible de  $U(3)$  telle que  $\pi_p^{K_p} \neq 0$ . Alors le changement de base  $\pi_E$  de  $\pi$  est non ramifié en la place de  $E$  au-dessus de  $p$ .

*Preuve.* – Comme  $\pi_p$  a un vecteur invariant non nul par  $K_p$ , elle a un vecteur invariant non nul par un sous-groupe d'Iwahori. D'après [21, Proposition 2.6], c'est donc une sous-représentation d'une induite parabolique normalisée  $I(\eta)$ , pour un certain caractère non ramifié  $\eta$  du tore diagonal de  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$  (i.e. trivial sur le compact maximal de ce tore). Rappelons, suivant [38, p. 126] et [24, Théorème 2.4.6 et Proposition 2.4.7], la structure de ces induites  $I(\eta)$ . Quand elles ne sont pas irréductibles, les représentations  $I(\eta)$  sont de longueur 2, et ont comme facteurs de Jordan–Hölder soit la représentation triviale et la Steinberg, soit deux représentations que l'on note (comme dans [38, 52])  $\pi^n(\eta)$  et  $\pi^2(\eta)$ . De plus, d'après [24, Proposition 2.4.7],  $\pi^n(\eta)$  a un vecteur invariant non nul par  $K_p$ , et  $\pi^2(\eta)$  n'en a pas. Enfin, la représentation de Steinberg n'a pas de vecteur non nul invariant par un compact maximal.

Soit  $v$  la place de  $E$  au-dessus de  $p$ . Le changement de base  $\pi_E$  de l'unique  $A$ -paquet global  $\Pi$  auquel  $\pi$  appartient est (par définition, cf. [52, p. 201], juste avant le Théorème 13.3.3) tel que  $(\pi_E)_v$  est le changement de base local (défini [52, p. 200]) du  $A$ -paquet local  $\Pi_p$ , composante en  $p$  de  $\Pi$ . Le paragraphe précédent assure que  $\pi_p$  est soit la triviale, soit une induite irréductible d'un caractère non ramifié, soit de la forme  $\pi^n(\eta)$ . Le changement de base  $(\pi_E)_v$  de  $\Pi_p$  est donc non ramifié par définition sauf peut-être si  $\Pi_p$  est le  $A$ -paquet  $\Pi_p = \{\pi^n(\eta), \pi^2(\eta)\}$ , avec  $\pi_p = \pi^n(\eta)$ . Mais dans ce cas,  $(\pi_E)_v$  est non ramifié par [52, Proposition 13.2.2(d)].  $\square$

#### 4.4. Composantes locales à l'infini

Tout  $L$ -paramètre “relevant” de  $U(3)(\mathbb{R})$  a sa restriction à  $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$  de la forme :

$$z \mapsto (z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}, \quad a_1 > a_2 > a_3 \in \mathbb{Z}^3.$$

Si  $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \in \mathbb{Z}^3$ , on note  $\pi_{1,\infty}(k_1, k_2, k_3)$  la représentation de  $U(3)(\mathbb{R})$  sur  $V_{k_1, k_2, k_3}(\mathbb{C})$  (cf. 2.3), déduite de l'inclusion  $U(3)(\mathbb{R}) \subset U(3)(\mathbb{C}) \simeq GL_3(\mathbb{C})$  donnée par  $E \subset \mathbb{C}$ . Son  $L$ -paramètre a pour changement de base à  $\mathbb{C}^*$  le morphisme plus haut avec  $(a_1, a_2, a_3) := (k_1 + 1, k_2, k_3 - 1)$  ([49], §3.1).

#### 4.5. Existence de $\pi(\chi_0)$

PROPOSITION 4.1. – Supposons que  $k > 1$ , et que  $\varepsilon(\chi_0, 1/2) = -1$ ; alors il existe une unique représentation automorphe  $\pi(\chi_0)$  de  $U(3)$  dont le changement de base à  $E$  a pour

<sup>12</sup> On peut voir, à l'aide de [41, Proposition 3.6.2] que  $K_p$  est très spécial, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait.

$L$ -paramètre le morphisme  $W_E \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$  défini par

$$\begin{pmatrix} \chi_0 \cdot |\cdot|^{-1/2} & & \\ & 1 & \\ & & \chi_0 \cdot |\cdot|^{1/2} \end{pmatrix}$$

et telle que

- pour tout nombre premier  $p$ ,  $\pi(\chi_0)_p = \pi_p^n(\chi_0)$ ,
- $\pi(\chi_0)_\infty = \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$ .

*Preuve.* – D’après [50], p. 397, le  $A$ -paquet  $\Pi(\chi, 1)$  existe pour  $U(3)$ , car  $k > 1$ . D’après [50], p. 395 et 396, les  $A$ -paquets locaux correspondants sont les singletons  $\{\pi_p^n(\chi_0)\}$  quand  $p$  est décomposé (cf. 4.2.2) et des paires  $\{\pi_p^n(\chi_0), \pi_p^s(\chi_0)\}$  quand  $p$  est inerte ou ramifié (où  $\pi_p^n$  a été définie en 4.3.1). Enfin, d’après [50], p. 397, le  $A$ -paquet local à l’infini est un singleton  $\{\pi(\chi_0)_\infty\}$  avec  $\pi(\chi_0)_\infty := \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$ .

Considérons la représentation de  $U(3)(\mathbb{A})$  :

$$\pi(\chi_0) = \left( \bigotimes_p \pi_p^n(\chi_0) \right) \otimes \pi(\chi_0)_\infty.$$

D’après [50], Théorème 1.2, la multiplicité de  $\pi$  dans le spectre automorphe de  $U(3)$  est  $(1 + \varepsilon(\chi_0, 1/2)(-1)^N)/2$ , où  $N$ , défini dans [52], p. 243, est le nombre de places à l’infini de  $\mathbb{Q}$  où  $U(3)$  est compact ; on a donc  $N = 1$ , et la multiplicité de  $\pi(\chi_0)$  est donc 1.  $\square$

### 4.6. Types

PROPOSITION 4.2. – Pour  $p$  un nombre premier divisant  $\text{disc}(\chi_0)$ , il existe un groupe  $K_J = K_J(p)$  de  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$ , et une représentation irréductible  $J = J(p)$  de  $K_J$  tels que

- $\text{Hom}_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det)) \neq 0$ .
- Pour toute représentation lisse irréductible  $\pi$  de  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$  vérifiant  $\text{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0$ , pour toute place  $v$  de  $E$  au-dessus de  $p$ , notant  $\pi_{E_v}$  le changement de base de  $\pi$  à  $E_v$ , il existe trois caractères lisses non ramifiés  $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : E_v^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , tels que

$$L(\pi_{E,v}) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3 \chi_0^{-1}.$$

En particulier, si  $l \neq p$ ,  $I' := \ker(\chi_l)|_{I_v}$ , et si  $\pi$  est la composante en  $p$  d’une représentation automorphe irréductible  $\pi'$  de  $U(3)$ , alors  $\rho_l(\pi')(I') = 1$ .

*Preuve.* – Supposons d’abord que  $p = v_1 v_2$  est décomposé dans  $E$ . On note  $G = GL_3(\mathbb{Q}_p) = U(3)(\mathbb{Q}_p)$  (l’isomorphisme dépendant de la place  $v_1$ , comme en 4.2.1),  $P$  le parabolique standard de type  $(2, 1)$ ,  $M = GL_2(\mathbb{Q}_p) \times GL_1(\mathbb{Q}_p)$  son Levi (comme en 4.2.2),  $N$  son radical unipotent,  $\chi_0 = \chi_{0,v_1}$  et  $m$  la  $p$ -valuation du conducteur de  $\chi_0$ .

Notons  $K_J$  le sous-groupe de  $G$  des matrices dont la réduction modulo  $p^m$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

et notons  $J$  le caractère complexe lisse de ce groupe qui à une matrice comme ci-dessus associe  $\chi_0(y)^{-1}$ .

Par définition (cf. 4.2.2 pour la définition de  $\lambda_p$ ),  $\pi_p^n(\chi_0) \otimes \chi_0^{-1} \circ \det$  est la représentation de  $G$  sur l'espace

$$V := \{f: G \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ lisse}, \forall b \in P, \forall g \in G, f(bg) = \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))f(g)\}$$

donnée par  $(g.f)(x) = f(xg)$ . Définissons  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\begin{aligned} f(bk) &= \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))\chi_0(k) \quad \forall b \in P, k \in K_J, \\ f(g) &= 0 \quad \forall g \in G \setminus PK_J. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que  $f$  est bien définie, et qu'elle définit un élément non nul de

$$\text{Hom}_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det)).$$

Inversement, soit  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$ , et supposons que

$$\text{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0.$$

Notons  $B_J \subset K_J$  l'ensemble des matrices de  $K_J$  qui sont triangulaires supérieures modulo  $p$ . On a alors  $B_J \cap M = B \times \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$  où  $B$  est le sous-groupe d'Iwahori standard (constitué des matrices triangulaires supérieures modulo  $p$ ) de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ . La restriction de  $J$  à  $B_J \cap M$  étant simplement le caractère  $\chi_0^{-1}$  sur le second facteur  $\text{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ , le couple  $(B_J \cap M, J|_{B_J \cap M})$  est un  $\mathfrak{s}_M$ -type de  $B_J$ , où  $\mathfrak{s}_M \in \mathcal{B}(M)$  (le spectre de Bernstein de  $M$ , cf. [16, p. 772]) est la classe d'équivalence inertielle de  $(T, \chi_0^{-1})$ ,  $T$  désigne le tore maximal standard de  $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$  et  $\chi_0^{-1}$  le caractère de  $T$  envoyant  $\text{diag}(x, y, z)$  sur  $\chi_0^{-1}(z)$ .

Il résulte immédiatement de la définition de *recouvrement (cover)* [17, 8.1] que  $(B_J, J|_{B_J})$  est un  $G$ -recouvrement de  $(B_J \cap M, J|_{B_J \cap M})$ . Le corollaire [17, 8.4] (ou bien [18, p. 55]) assure alors que  $(B_J, J|_{B_J})$  est un  $\mathfrak{s}$ -type pour  $G$ , où  $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$  est la classe d'équivalence inertielle de  $(T, \chi_0^{-1})$ . Comme  $\pi$  contient  $(K_J, J)$ , elle contient aussi  $(B_J, J)$ , et son support cuspidal est donc de la forme  $(\phi_1, \phi_2, \chi_0^{-1}\phi_3)$ , où les  $\phi_i$  sont des caractères lisses non ramifiés de  $\mathbb{Q}_p^*$ . Autrement dit, d'après les propriétés de la correspondance de Langlands locale,  $L(\pi)$  a pour semi-simplification  $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$ . Nous voulons maintenant montrer que  $L(\pi)$  est semi-simple. Comme  $\chi_0^{-1}\phi_3$  est ramifié, mais pas  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , on peut en tous cas écrire  $L(\pi) = r \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$ , où  $r^{ss} = \chi_1 \oplus \chi_2$ , et nous voulons montrer que  $r$  est semi-simple.

D'après ce qui précède et les propriétés de  $L$ , il existe une représentation lisse irréductible  $(\rho, W)$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  de support cuspidal  $(\phi_1, \phi_2)$  telle que

$$\pi \simeq \text{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1})), \quad L(\rho) = r,$$

où  $\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1})$  désigne la représentation du parabolique standard sur  $W$  qui à  $(x, y) \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M$  associe  $\phi_3(y)\chi_0(y)^{-1}\rho(x) \in \text{End}(W)$ . L'espace de cette induite est l'ensemble des fonctions  $f: G \rightarrow W$ , lisses, vérifiant

$$\begin{aligned} \forall m &= (x, y) \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M, \forall u \in N, \forall g \in G, \\ (4) \quad f(mug) &= \delta_P^{1/2}(m)\chi_0^{-1}(y)\phi_3(y)\rho(x)f(g). \end{aligned}$$

Comme  $\text{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0$ , il existe une fonction non nulle  $f: G \rightarrow W$  dans l'espace de  $\text{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1}))$  qui vérifie

$$(5) \quad (k.f)(g) = f(gk) = f(g)J_K(k) = f(g)\chi_0(k)^{-1}.$$



Choisissons  $v = f(g) \in W$  non nul. Combinant les Éqs. (4) et (5), il vient

$$\forall x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \quad \rho(x)v = v.$$

La représentation  $\rho$  est donc non ramifiée si bien que  $r = L(\rho)$  est semi-simple, et finalement  $L(\pi) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3 \chi_0^{-1}$ .

Le “en particulier” découle alors de la Proposition 3.2.

Le cas où  $p$  est inerte ou ramifié dans  $E$  est plus simple, grâce aux travaux de L. Blasco [8] :  $\pi_p^n(\chi_0)$  appartient à la série principale, et son type défini en [8, partie 7, p. 181] fait l’affaire.  $\square$

## 5. $I$ -invariants et algèbre d’Atkin–Lehner

### 5.1. Notations

**5.1.1.** Dans toute cette section,  $p$  est un nombre premier fixé.  $T$  désigne le tore diagonale de  $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ,  $B$  son Borel supérieur,  $K := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ ,  $W \simeq \mathfrak{S}_n \subset K$ ,  $I \subset K$  le sous-groupe d’Iwahori composé des éléments triangulaires supérieurs modulo  $p$ ,  $\Delta$  le sous-groupe de  $T$  des éléments à coefficients dans  $p^{\mathbb{Z}}$ ,  $\Delta^+$  le sous-monoïde de  $\Delta$  des éléments de la forme  $\mathrm{diag}(p^{a_1}, \dots, p^{a_n})$  avec  $a_1 \leq \dots \leq a_n \in \mathbb{Z}$ . Si  $X$  est un groupe topologique localement compact,  $\delta_X$  désigne le caractère module de  $X$ .

**5.1.2.** Si  $U$  est un sous-groupe compact ouvert de  $G$ , l’algèbre de Hecke de  $G$  relativement à  $U$ ,  $\mathcal{C}^\infty(U \backslash G / U)$ , est l’algèbre de convolution des fonctions complexes lisses à support compact sur  $G$  invariantes à droite et à gauche par  $U$ . Si  $g \in G$ , on note  $[UgU] \in \mathcal{C}^\infty(U \backslash G / U)$  la fonction caractéristique de  $UgU \subset G$ , on prend la convention que  $[U]^2 = [U]$ .  $\mathcal{C}^\infty(I \backslash G / I)$  est l’algèbre de Hecke–Iwahori, on note  $\mathcal{A}(p)$ <sup>13</sup> son sous-anneau engendré par  $\mathbb{Z}$  et les fonctions caractéristiques  $[IuI]$ ,  $u \in \Delta^+$ . Il est connu (par exemple [51], §1) que  $\mathcal{A}(p)$  est commutative, et que pour chaque  $u, u' \in \Delta^+$ ,  $[IuI]$  est inversible dans  $\mathcal{C}^\infty(I \backslash G / I)$ ,  $[IuI][Iu'I] = [Iuu'I]$  et  $IuIu'I = Iuu'I$ . On pose

$$u_i := \mathrm{diag}(1, \dots, 1, p, \dots, p) \in \Delta^+, \quad \text{où } p \text{ apparaît } i \text{ fois, } 0 \leq i \leq n.$$

### 5.2. $I$ -invariants des représentations non ramifiées

**5.2.1.** Soit  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : (\mathbb{Q}_p^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$  un caractère lisse et non ramifié,  $X(\psi)$  la représentation complexe lisse irréductible non ramifiée de  $G$  de  $L$ -paramètre valant sur le Frobenius géométrique :

$$\left( \begin{array}{ccc} \psi_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_n(p) \end{array} \right).$$

Voyant  $\psi$  comme un caractère complexe lisse de  $B$  trivial sur les unipotents supérieurs, on pose

$$\mathrm{Ind}_B(\psi) := \{ f : G \rightarrow \mathbb{C}, \text{ lisses, } f(bg) = \delta_B^{1/2}(b)\psi(b)f(g) \forall b \in B \}$$

<sup>13</sup>  $\mathbb{C}$  est cette algèbre que nous appelons *algèbre d’Atkin–Lehner*, reprenant la terminologie de X. Lazarus (thèse, Orsay, 2000). Ses générateurs  $[IuI]$ ,  $u \in \Delta^+$ , sont la généralisation naturelle à  $\mathrm{GL}_n$  de l’opérateur  $U_p$  d’Atkin–Lehner dans la théorie classique des formes modulaires.

vue comme représentation lisse de  $G$  par translation à droite des fonctions. On sait alors que  $X(\psi)$  est l'unique sous-quotient irréductible non ramifié de  $\text{Ind}_B(\psi)$ . Le caractère de l'algèbre de Hecke non ramifiée de  $G$  sur la droite des  $K$ -invariants de  $X(\psi)$  (ou encore de  $\text{Ind}_B(\psi)$ , ce qui est la même chose) est bien connu : si  $t_{p,i}$  est la valeur propre de l'opérateur de Hecke  $T_{p,i} := [Ku_iK] \det(u_i)^{(n-1)/2}$  comme plus haut, on a

$$\prod_{i=0}^n (1 - \psi_i(p)T) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p^{i(i-1)/2} t_{p,i} T^i.$$

**5.2.2.** Nous allons commencer par décrire la représentation de  $\mathcal{A}(p)$  sur les  $I$ -invariants de  $\text{Ind}_B(\psi)$ . On verra les caractères de  $T$  par restriction comme des caractères de  $\Delta^+$ , puis de  $\mathcal{A}(p)$ . Pour tout caractère  $\theta : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $\sigma \in W$ , on dispose d'un caractère  $\theta^\sigma$  défini par  $\theta^\sigma(t) = \theta(\sigma^{-1}t\sigma)$  ; ainsi  $(\psi_1, \dots, \psi_n)^\sigma = (\psi_{\sigma(1)}, \dots, \psi_{\sigma(n)})$ .

LEMME 5.1 (cf. [22, Lemme 4.8.4]). – *La semi-simplification de  $\text{Ind}_B(\psi)^I$  comme  $\mathcal{A}(p)$ -module est*

$$\bigoplus_{\sigma \in W} \delta_B^{1/2} \psi^\sigma.$$

*Remarques.* – Le calcul ci-dessus et la formule pour le polynôme de Hecke de  $X$  montrent que si  $\sigma \in W$ ,  $\psi^\sigma(U_i)$  (noter la disparition du  $\delta_B^{1/2}$ ) est un produit de  $i$  valeurs propres “distinctes” du Frobenius géométrique dans la représentation de  $W_{\mathbb{Q}_p}$  attachée à  $X$  par la correspondance de Langlands locale non ramifiée.

En particulier, supposons  $\text{Ind}_B(\psi)$  irréductible, dans ce cas  $\text{Ind}_B(\psi) = X(\psi)$ . La décomposition de Bruhat–Iwahori montre que  $\dim_{\mathbb{C}}(X(\psi)^I) = n!$  et l'action de  $\mathcal{A}(p)$  sur les  $I$ -invariants de  $X$  est calculée par le lemme. Ceci se produit en particulier quand  $\psi$  est essentiellement tempérée (i.e.  $|\psi_i(p)|$  indépendant de  $i$ , [64], 4.2) mais pas pour la représentation  $\pi_p^n(\chi_0)$  introduite en §4.2.2 ( $p$  décomposé dans  $E$  et ne divisant pas  $\text{cond}(\chi_0)$ ). Pour traiter ce cas-là, nous aurons besoin du résultat général suivant, impliquant par ailleurs le lemme précédent.

**5.2.3.** Soit  $P = MN \subset G$  un parabolique de Levi  $M$ ,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}^*$  un caractère non ramifié,  $\text{Ind}_P(\psi)$  l'induite parabolique lisse normalisée :

$$\text{Ind}_P(\psi) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C}, \text{lisses}, f(pg) = \delta_P^{1/2}(p)\psi(p)f(g) \forall p \in B\}.$$

Soit  $W_P \subset W$  le sous-groupe de Coxeter correspondant à  $P \subset G$  ; pour chaque  $\sigma \in W$  on choisit l'unique élément dans  $W_P \cdot \sigma$  de longueur minimale ([36], Proposition 1.10c), et on note  $W(P)$  l'ensemble des représentants de  $W_P \backslash W$  obtenu. On pose  $z := \delta_P / \delta_B = \delta_{B \cap M}$ .

LEMME 5.2. – *La semi-simplification de  $\text{Ind}_P(\psi)^I$  comme  $\mathcal{A}(p)$ -module est*

$$\bigoplus_{\sigma \in W(P)} \delta_B^{1/2} (z^{1/2}\psi)^\sigma.$$

*Remarques.* – Le lemme montre que l'unique sous-quotient non ramifié de  $\text{Ind}_P(\psi)$  est isomorphe à  $X(\psi \cdot z^{1/2})$ . Si  $\text{Ind}_P(\psi)$  est irréductible (voir [64], 3.2, 4.2), il coïncide donc avec  $X(\psi \cdot z^{1/2})$  dans ce cas.

*Preuve.* – On pose  $X' = \text{Ind}_P(\psi)^I$ , c'est un module sous l'algèbre de Hecke–Iwahori de  $G$ , en particulier sous  $\mathcal{A}(p)$ . La décomposition de Bruhat–Iwahori  $G = \coprod_{\sigma \in W(P)} P\sigma I$  montre que  $\dim_{\mathbb{C}}(X') = |W|/|W_P|$ . On considère la  $\mathbb{C}$ -base de  $X'$  suivante : si  $\sigma \in W(P)$ ,  $e_{\sigma}$  est l'élément de  $X'$  nul hors de  $P\sigma I$  et tel que  $e_{\sigma}(\sigma) = 1$ .  $e_{\sigma}(\sigma') = 0$  ou  $1$  selon que  $\sigma' \in W_P \cdot \sigma$  ou non. Si  $\sigma' \in W$ , on commence par calculer  $[I\sigma'I](e_1)$ . La décomposition de Bruhat–Iwahori, ainsi que la multiplication des cellules, montrent que  $(I\sigma'I) \cap (\sigma^{-1}PI) = \emptyset$  à moins que  $\sigma \in W_P\sigma'^{-1}$ . En particulier,  $[I\sigma'I](e_1) = a_{\sigma'}e_{\sigma'^{-1}}$  où  $a_{\sigma'} \in \mathbb{C}^*$  (car  $[I\sigma'I]$  est inversible dans l'algèbre de Hecke–Iwahori).

La décomposition de Bruhat–Iwahori montre que si  $u \in \Delta^+$ ,  $(IuI) \cap \sigma^{-1}PI$  est vide à moins que  $\sigma \in W_P$ , ce qui implique que  $e_1$  est propre sous l'action de  $\mathcal{A}(p)$ , de caractère  $[IuI] \mapsto (\delta^{1/2}\psi)(u)|(IuI \cap PI)/I$ . Quand  $u_i = u$ , on peut calculer  $|(IuI \cap PI)/I| = |(I^u \cap PI)/(I^u \cap I)|$ ,  $I^u := u^{-1}Iu$  ; on vérifie qu'il vaut  $z^{1/2}(u)$ .

Par les relations de Bernstein ([51], §1, §5), on en déduit que si l'on ordonne la base des  $e_{\sigma}$ ,  $\sigma \in W(P)$ , par ordre croissant avec la longueur de  $\sigma$ , l'action de  $\mathcal{A}(p)$  est triangulaire supérieure. Toujours par les relations de Bernstein, on trouve alors les caractères de l'énoncé (voir par exemple §4.8.3 [22] pour des détails supplémentaires ; noter que ce que nous avons appelé  $u_i$  dans ce paragraphe y est noté  $u_{n-1+i}$ ).  $\square$

**5.2.4.** L'exemple qui nous intéresse est le cas de la représentation non ramifiée  $X(\psi) := \pi_p^n(\chi_0)$  définie en 4.2.2,  $\pi_p^n(\chi_0)$  est l'induite du parabolique standard  $P$  de type  $(2, 1)$  du caractère  $\chi_0(\det(\cdot)) \times 1$ . On trouve  $W(P) = \{1, (3, 2), (3, 2, 1)\}$ . Si  $\sigma \in W(P)$ , le triplet  $(\psi^{\sigma}(u_1), \psi^{\sigma}(u_2/u_1), \psi^{\sigma}(u_3/u_2))$  associé à  $\sigma$  est alors explicitement donné par :

$$\begin{aligned}\sigma = 1, & \quad (1, \chi_{v_1}^{\perp}(p), \chi_{v_1}(p)), \\ \sigma = (3, 2), & \quad (\chi_{v_1}^{\perp}(p), 1, \chi_{v_1}(p)), \\ \sigma = (3, 2, 1), & \quad (\chi_{v_1}^{\perp}(p), \chi_{v_1}(p), 1).\end{aligned}$$

## 6. Déformations des représentations cristallines raffinées

### 6.1. Raffinement d'une représentation cristalline

**6.1.1.** Soit  $F/\mathbb{Q}_p$  un corps local,  $V$  un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une représentation continue de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ . Nous supposons que  $V$  est cristalline, que ses poids de Hodge–Tate  $k_1 < \dots < k_n$  sont tous distincts et que les valeurs propres du Frobenius de  $D_{\text{cris}}(V)$  sont dans  $F$  (cf. §2.6 pour les conventions). Imitant Mazur [44], on appellera *raffinement* de  $V$  la donnée d'un ordre  $\mathcal{R} := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in F^n$  sur les valeurs propres du Frobenius de  $D_{\text{cris}}(V)$ . On notera  $(V, \mathcal{R})$  la représentation  $V$  munie de son raffinement  $\mathcal{R}$ .

**6.1.2.** La donnée d'un raffinement  $\mathcal{R}$  de  $V$  nous permet de définir des  $F_i(\mathcal{R}) := \varphi_i/p^{k_i} \in F^*$  et des  $U_i(\mathcal{R}) := \prod_{j=1}^i F_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La donnée de tous les  $F_i(\mathcal{R})$ , ou encore celle des  $U_i(\mathcal{R})$ , est bien sûr équivalente à celle de  $\mathcal{R}$ . Notons que  $F_i(\mathcal{R})$  est une valeur propre du Frobenius de  $D_{\text{cris}}(V(k_i))$ , et  $U_i(\mathcal{R})$  en est une de celui de  $\Lambda^i(D_{\text{cris}}(V)) \simeq D_{\text{cris}}(\Lambda^i(V))$ . On rappelle que la formation de  $D_{\text{cris}}$  commute aux opérations tensorielles sur les représentations cristallines ([31], 1.5.2, 5.1.2).

### 6.1.3.

*Remarques.* – (i) Si le polynôme caractéristique du Frobenius de  $D_{\text{cris}}(V)$  a  $n = \dim_F(V)$  racines distinctes, alors  $V$  admet exactement  $n!$  raffinements. C'est le cas par exemple si  $V$

est ordinaire (cf. [47]). Dans ce cas, on dispose de plus d'un raffinement canonique donné par  $|\varphi_i| = p^{-k_i}$ , appelé raffinement "ordinaire" (il ne nous sera pas utile dans la suite).

(ii) Un des intérêts essentiels de la notion de raffinement dans ce texte vient de ce que la théorie des familles  $p$ -adiques de formes automorphes produit des déformations de représentations cristallines raffinées de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ . Il faut bien noter que de telles déformations d'une même représentation  $V$  mais partant de raffinements distincts sont en général très différentes (par exemple l'une peut être génériquement irréductible, l'autre non).

**6.2. Raffinements et algèbre d'Atkin–Lehner**

**6.2.1.** Par commodité d'exposition, nous nous restreignons à  $U(3)$  plutôt qu'à un groupe unitaire quelconque, c'est de toutes façons suffisant pour les objectifs de ce texte. Soit  $p$  un nombre premier décomposé dans  $E$ ,  $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  un isomorphisme de corps,  $v_1$  la place de  $E$  au-dessus de  $p$  donnée par  $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{Q}_p}$ ,  $v_2$  l'autre place,  $p = v_1 v_2$ . La donnée de  $v_1$  nous permet de plus d'identifier  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$  à  $GL_3(\mathbb{Q}_p)$  comme en 4.2.2. Fixons  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible de  $U(3)$  telle que  $\Pi_p$  est non ramifiée et  $\Pi_\infty = \pi(k_1 \geq k_2 \geq k_3)$ . Comme dans 5.2.1,  $\Pi_p = X(\psi)$  pour un certain caractère non ramifié  $\psi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

**6.2.2.** On a vu dans 3.2.2 que la donnée de  $\iota$  permet d'associer à  $\Pi$  une représentation semi-simple continue  $\rho_p : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow GL_3(F) = GL_F(V)$ ,  $V$  étant un espace vectoriel de dimension 3 sur un certain corps local  $F$ . On rappelle que  $D_{v_i}$  est un groupe de décomposition dans  $\text{Gal}(\overline{E}/E)$  associé à la place  $v_i$  de  $E$ , et on note  $V_i$  la représentation continue de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  sur  $V$  obtenue par restriction de  $V$  à  $D_{v_i}$ . Puisque  $\rho_p^\perp \simeq \rho_p$ , on sait que  $V_2 \simeq V_1^\perp$ . De plus, par la Proposition 3.3 §3.2,  $V_1$  est cristalline de poids de Hodge–Tate  $-k_1 - 1 < -k_2 < -k_3 + 1$ , et son Frobenius cristallin a même polynôme caractéristique (modulo  $\iota$ ) que l'image du Frobenius géométrique de  $W_p^{nr}$  dans le  $L$ -paramètre de  $X(\psi)$ , i.e.  $\prod_{i=1}^3 (X - \iota(\psi_i(p)))$ . Nous allons donner une interprétation automorphe de certains raffinements de  $V_1$  en terme de  $\Pi_p$ .

**6.2.3.** La semi-simplification de  $\mathcal{A}(p)$  agissant sur  $\Pi_p^I$  a été calculée en 5.2.2, c'est une somme de caractères de  $\mathcal{A}(p)$  de la forme  $\delta_B^{1/2} \psi^\sigma$ , pour certains  $\sigma \in W$ . On dira que  $\sigma$  est *accessible* pour  $\Pi$  si  $\delta_B^{1/2} \psi^\sigma$  apparaît; cela ne dépend que de  $\Pi_p$ , et il est équivalent de demander qu'il existe un vecteur  $v \in \Pi^I$  sur lequel  $\mathcal{A}(p)$  agisse par  $\delta_B^{1/2} \psi^\sigma$ . Pour tout  $\sigma \in W$ , le Lemme 5.1 §5.2.2 montre que l'on construit un raffinement  $\mathcal{R}(\sigma)$  de  $V_1$  en posant

$$\mathcal{R}(\sigma) := (\psi_{\sigma(3)}(p), \psi_{\sigma(2)}(p), \psi_{\sigma(1)}(p)).$$

Un raffinement de  $V_1$  sera dit *accessible* s'il est de la forme  $\mathcal{R}(\sigma)$  avec  $\sigma$  accessible pour  $\Pi$ . Si  $\Pi_p$  est irréductible, on a vu en 5.1 que tous les raffinements de  $V_1$  sont alors accessibles. Cela se produit en particulier quand  $\Pi_p$  est tempérée. Par contre, si  $\Pi = \pi(\chi_0)$ , les raffinements accessibles sont ceux donnés dans 5.2.4. Dans ce cas précis, on remarque par exemple que  $V_1$  est ordinaire mais que le raffinement ordinaire n'est pas accessible.

**6.2.4.** Soit  $s = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$ ; notons  $\nu_s$  le caractère  $\Delta \rightarrow p^{\mathbb{Z}}$  sur le vecteur de plus haut poids de  $V_s^*(\mathbb{Q}) = V_{-s}(\mathbb{Q})$ . D'après 6.2.2 et 2.3, si  $1 \leq i \leq 3$ ,  $(\delta_B^{-1/2} \nu_s)(u_i/u_{i-1})$  est une puissance de  $p$  d'exposant le  $i^{\text{ième}}$  poids de Hodge–Tate (ceux-ci étant rangés par ordre croissant) de  $V_1$ . On pose

$$U_i^s := \frac{[Iu_iI]}{\nu_s(u_i)} \in \mathcal{A}(p)[1/p].$$

Avec ces notations,  $\mathcal{R}(\sigma)$  est encore le raffinement de  $V_1$  défini par ses  $U_i(\mathcal{R}(\sigma))$  avec la formule  $U_i(\mathcal{R}(\sigma)) := (\delta_B^{1/2} \psi^\sigma)(U_i^s)$ .

**6.3. Variation de représentations cristallines raffinées, d’après M. Kisin**

**6.3.1.** Soit  $F \subset \mathbb{C}_p$  un corps local,  $X$  un  $F$ -affinoïde réduit d’anneau  $A(X)$ , la norme réduite de  $A(X)$  en fait une algèbre de Banach. Soit  $M := A(X)^n$ ,  $G$  un groupe topologique,  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(M)$  une représentation continue. Si  $F \subset E \subset \mathbb{C}_p$  est un sous-corps complet,  $x \in X(E)$ , on note  $M_x := M \otimes_{A(X)} E$ ,  $A(X) \rightarrow E$  étant l’évaluation en  $x$ , et  $\rho_x : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(E) = \mathrm{GL}_E(M_x)$ .

**6.3.2.** Soit  $X$  un  $F$ -affinoïde réduit d’anneau  $A(X)$  ; on se donne

- (a)  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ , un  $F$ -morphisme analytique,
- (b)  $Z \subset X(F)$  un sous-ensemble Zariski-dense tel que  $\kappa(Z) \subset \mathbb{Z}^n$ ,
- (c)  $M := A(X)^n$ , et  $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}_{A(X)}(M)$  une représentation continue,
- (d)  $F_1, \dots, F_n$  des éléments inversibles de  $A(X)$ .

On suppose de plus que :

- (i) Pour tout réel  $C > 0$ ,  $\{z \in Z, \kappa_{i+1}(z) > C + \kappa_i(z) \forall i \in \{1, \dots, n - 1\}\}$  est Zariski-dense dans  $X(F)$ .
- (ii) Pour tout  $x \in X(F)$ ,  $\kappa(x) \in F^n$  est l’ensemble des poids de Hodge–Tate–Sen de  $M_x$ , rangés par ordre strictement croissant si  $x \in Z$ , i.e.  $\kappa_1(x) < \kappa_2(x) < \dots < \kappa_n(x) \forall x \in Z$ .
- (iii) Pour tout  $z \in Z$ ,  $M_z$  est cristalline.
- (iv) Si  $z \in Z$ ,  $(p^{\kappa_1(z)} F_1(z), \dots, p^{\kappa_n(z)} F_n(z))$  est un raffinement de  $M_z$ .
- (v) Pour tout  $i$ , il existe  $\lambda_i \in F^*$  tel que  $|F_i/\lambda_i - 1| < 1$ .
- (vi) Deux éléments de  $\kappa(Z)$  diffèrent d’un élément de  $(p - 1)\mathbb{Z}^n$ .

Faisons quelques remarques sur ces hypothèses. L’existence de  $\kappa$  satisfaisant (ii) n’est pas directement conséquence des travaux de Sen [57,58], à cause de l’hypothèse “rangés par ordre croissant sur  $Z$ ”. Nous ne savons pas dans quelle mesure l’existence de  $F_i$  satisfaisant (iv) est automatique (condition sur  $\kappa$  ?), cf. [39] à ce sujet. Nous ne savons pas non plus si (vi) est automatique. Dans la pratique (cf. §8), ces hypothèses seront satisfaites et  $\kappa$  sera un morphisme fini sur son image, dominant restreint à chaque composante irréductible de  $X$ . La condition (v) est de nature technique, et intervient dans les travaux de Kisin (elle implique en ses termes que  $X$  est “ $F_i$ -small”).

**6.3.3.** On se place sous les hypothèses (a), (b), (c), (ii), (iii) et (iv) de 6.3.2. On notera  $A(X)(\kappa_i)$  le  $A(X)$ -module  $A(X)$  sur lequel on fait agir continûment  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  par le composé du caractère cyclotomique par le caractère suivant de  $\mathbb{Z}_p^*$  :

$$x \rightarrow (x/\tau(x))^{\kappa_i} \tau(x)^{n_i} \in A(X)^*$$

où  $n_i = \kappa_i(z)$  est un entier bien défini modulo  $(p - 1)\mathbb{Z}$  indépendamment de  $z \in Z$  par l’hypothèse (vi), et  $\tau : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$  la réduction modulo  $p$  composée par le caractère de Teichmüller. Si  $z \in Z$ ,  $A(X)(\kappa_i)_z$  est l’élévation à la puissance  $\kappa_i(z)$  du caractère cyclotomique, en particulier c’est un caractère cristallin de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ .

Si  $N$  est un  $A(X)$ -module de libre type fini muni d’une représentation continue de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ , on notera

$$N(\kappa_i) := N \otimes_{A(X)} A(X)(\kappa_i)$$

vue comme représentation de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ . On a donc défini les  $M(\kappa_i)$ , leurs évaluations en  $z \in Z$  sont cristallines de poids  $(\kappa_1(z) - \kappa_i(z), \dots, \kappa_n(z) - \kappa_i(z)) \in \mathbb{Z}^{n,-}$ .

**6.3.4.** On se place dans les hypothèses de 6.3.2 :

PROPOSITION 6.1. – Soient  $x \in X(F)$ ,  $\kappa(x) = (k_1, \dots, k_n)$  alors

$$D_{\text{cris}}((\Lambda^i V_x)(k_1 + \dots + k_i))^{\varphi = F_1(x) \cdots F_i(x)} \text{ est non nul.}$$

Si de plus les  $k_i$  sont entiers, alors

$$D_{\text{cris}}(\Lambda^i(V_x))^{\varphi = \prod_{j=1}^i p^{k_j} F_j(x)} \text{ est non nul.}$$

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 6.1.

**6.3.5.** La seconde assertion découle de la première. On se ramène dans ce paragraphe au cas  $i = 1$  et  $\kappa_1 = 0$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  fixé ; on pose  $N := \Lambda^i(M)(\kappa_1) \cdots (\kappa_i)$ . Si  $J = (m_1 < \dots < m_i)$  est une partie à  $i$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ , on pose  $\kappa_J := \sum_{j=1}^i (\kappa_{m_j} - \kappa_j)$  et  $F_J := \prod_{j=1}^i F_{m_j}$ . On ordonne de plus les  $r := \binom{n}{i}$  telles parties  $J = (m_1 < \dots < m_i)$  par l'ordre lexicographique. Rappelons que, comme dit plus haut (6.1.2), la formation de  $D_{\text{cris}}(V)$  commute aux opérations tensorielles sur la catégorie des représentations cristallines. Ainsi, si  $x \in Z$ , on en déduit que  $N_x$  est cristalline, que ses poids de Hodge–Tate sont les  $\kappa_{J_i}$ , et que les racines de son Frobenius cristallin sont les  $F_{J_i}(x)$ . Cela montre que les conditions (a), (b), (c), (d), (iii), (iv), (v) et (vi) de 6.3.2 sont satisfaites pour la donnée de  $N$ , des  $\kappa_{J_i}$ , et des  $F_{J_i}$  respectivement à la place de  $M$ , des  $\kappa_i$  et des  $F_i$ . L'hypothèse (ii) entraîne que  $\kappa_{J_i}(z) > 0$  si  $i > 1$  et  $z \in Z$ . Enfin, l'hypothèse (i) entraîne que pour tout réel  $C > 0$ ,  $\{z \in Z, \forall i > 1, \kappa_{J_i}(z) > C\}$  est Zariski-dense dans  $X(F)$ .

Il suffit donc de prouver la proposition pour  $M$ ,  $i = 1$ , et  $\kappa_1 = 0$ , sous les hypothèses suivantes :

- (i') Pour tout réel  $C > 0$ ,  $\{z \in Z, \forall i > 1, \kappa_i(z) > C\}$  est Zariski-dense dans  $X$ .
- (ii') Pour tout  $x \in X(F)$ ,  $\kappa(x) \in F^n$  est l'ensemble des poids de Hodge–Tate–Sen de  $M_x$ , et satisfont  $\kappa_i(x) > 0$  pour tout  $i > 0$  et  $x \in Z$ .
- (iii') Pour tout  $z \in Z$ ,  $M_z$  est cristalline et  $D_{\text{cris}}(M_z)^{\varphi = F_1(x)} \neq 0$ .
- (v') Il existe  $\lambda \in F^*$ ,  $|F_1/\lambda - 1| < 1$ .

**6.3.6.** Nous allons déduire cela de deux résultats démontrés par Kisin [39], à la manière de la preuve de son Théorème 6.3 loc. cit. On fixe une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde  $\mathcal{R}$ , ainsi qu'un  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang fini et équipé d'une représentation continue  $\mathcal{R}$ -linéaire de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ . Soit  $P_\phi \in \mathcal{R}[T]$  le polynôme de Sen de  $\mathcal{M}$  (cf. loc. cit. §2.2), on suppose que  $P_\phi = TQ(T) \in \mathcal{R}[T]$  et pour tout entier  $k$  on pose  $P(k) = \prod_{j=0}^{k-1} Q(-j)$ . Soit  $Y \in \mathcal{R}$  un élément inversible ; on suppose qu'il existe un corps local  $F'/\mathbb{Q}_p$  et  $\lambda \in F'$  avec la propriété que  $Y\lambda^{-1} - 1$  est topologiquement nilpotent dans  $\mathcal{R} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} F'$  (dans la terminologie de loc. cit.,  $\mathcal{R}$  est “ $Y$ -small”).

LEMME 6.1 (Kisin [39, Corollaire 5.15]). – Soit  $\{\mathcal{R}_x\}_{x \in I}$  un ensemble de  $\mathcal{R}$ -algèbres affinoïdes. Supposons que pour tout entier  $k > 0$ , il existe un sous-ensemble  $I_k \subset I$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (1) Pour tout  $x \in I_k$ , toute application  $\mathcal{R}_x$ -linéaire  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ -équivariante

$$\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_x \longrightarrow (B_{dR}^+ / t^k B_{dR}^+) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{R}_x$$

se factorise à travers  $(B_{\text{cris}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{R}_x)^{\varphi=Y}$ . (Ici  $Y$  désigne par abus l'image de  $Y$  dans  $\mathcal{R}_x$ , et  $\mathcal{M}^*$  le  $\mathcal{R}$ -dual de  $\mathcal{M}$ .)

(2) Pour tout  $x \in I_k$ , l'image de  $P(k)$  dans  $\mathcal{R}_x$  est inversible.

(3) Pour tout  $k$ , l'application  $\mathcal{R} \rightarrow \prod_{x \in I_k} \mathcal{R}_x$  est injective.

Alors si  $E \subset \mathbb{C}_p$  est un sous-corps fermé,  $f: \mathcal{R} \rightarrow E$  un  $\mathbb{Q}_p$ -morphisme d'algèbre continu, il existe une application  $E$ -linéaire non nulle et  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{R}} E \rightarrow (B_{\text{cris}}^+ \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} E)^{\varphi=f(Y)}.$$

Le second résultat dont nous aurons besoin est le suivant. Soient  $\mathcal{R}'$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Banach noethérienne, et  $\mathcal{M}'$  un  $\mathcal{R}'$ -module libre de rang fini muni d'une représentation continue  $\mathcal{R}'$ -linéaire de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ . On fait encore l'hypothèse que le polynôme de Sen  $P_\phi(T)$  de  $\mathcal{M}'$  est de la forme  $TQ(T) \in \mathcal{R}'[T]$ , et on définit  $P(k)$  comme plus haut.

LEMME 6.2 [39, Corollaire 2.6.(1)]. – Soit  $k > 0$  un entier, alors

$$\left( (B_{dR}^+ / t^i B_{dR}^+) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{M}' \right)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \left[ \frac{1}{P(k)} \right]$$

est un  $\mathcal{R}'[\frac{1}{P(k)}]$ -module projectif de rang 1.

**6.3.7.** Terminons la preuve de la proposition 6.1. On pose  $\mathcal{R} := A(X)$ , vue comme  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre,  $\mathcal{M} := M$ , et  $Y := F_1$ . Vérifions que nous sommes dans les hypothèses du paragraphe précédent, l'énoncé du Lemme 6.1. Soit  $P_\phi \in A(X)[T]$  le polynôme de Sen de  $M$ . Avec notre convention que le poids de Hodge–Tate de  $\mathbb{Q}_p(1)$  est  $-1$ , l'évaluation en  $x \in Z$  de  $P_\phi$  a pour racines les opposés des poids de Hodge–Tate de  $\rho_x$ , i.e. les  $-\kappa_i(x)$  par l'hypothèse (ii'). Comme  $Z$  est Zariski-dense dans  $X$  qui est réduit, il vient que

$$P_\phi(T) = \prod_{i=1}^n (T + \kappa_i) \in A(X).$$

De plus,  $\kappa_1 = 0$  par hypothèse, de sorte que  $P_\phi(T) = TQ(T) \in A(X)[T]$ , ce que l'on voulait. Enfin, l'hypothèse (v') nous assure que  $X$  est " $F_1$ -small". Cela conclut.

On pose  $I := Z$ , et si  $x \in I = Z \subset X(F)$ , on pose  $\mathcal{R}_x := F$ , vue comme  $\mathcal{R}$ -algèbre par le morphisme d'évaluation en  $x$ . Si  $k > 0$  est un entier, on définit  $I_k$  comme étant l'ensemble des points  $x$  de  $Z$  tels que  $\kappa_i(z) > k$  si  $i > 1$ , et tels que  $v(F_1(x)) \leq k$ . Vérifions que nous sommes bien dans les hypothèses du Lemme 6.1. L'assertion (3) vient de ce que  $I_k$  est Zariski-dense dans  $X$  par l'hypothèse (i') appliquée à  $C = k$ , et de ce que  $X$  est réduit. Soit  $x \in I$ ; par l'hypothèse (ii') l'image  $P(k)(x)$  de  $P(k)$  dans  $\mathcal{R}_x = F$  est

$$(6) \quad \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{i=2}^n (\kappa_i(x) - j),$$

c'est un entier strictement positif si  $x \in I_k$ . Cela prouve (2). Pour vérifier (1), fixons  $x \in I_k$ . Rappelons que  $M_x$  a pour plus petit poids de Hodge–Tate 0, car  $\kappa_1 = 0$  et par l'hypothèse (ii'). D'après l'hypothèse (iii'),  $D_{\text{cris}}(M_x)^{\varphi=F_1(x)}$  est non nul. Écrivant que  $M_x$  est égal à son

bidual  $F$ -linéaire, cela signifie encore qu'il existe une application  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -équivariante non nulle

$$\psi_x : M_x^* \rightarrow (\text{Fil}^0(B_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi=F_1(x)}.$$

Il se trouve que l'on peut remplacer  $\text{Fil}^0(B_{\text{cris}})$  par  $B_{\text{cris}}^+$  dans la formule ci-dessus. En effet, pour tout entier  $n \geq 0$ , comme  $F_1(x) \in F^*$  par 6.3.2(d),  $\varphi^n(\text{Im}(\psi_x)) = F_1(x)^n \text{Im}(\psi_x) = \text{Im}(\psi_x) \subset \text{Fil}^0(B_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ , et donc  $\text{Im}(\psi_x) = \varphi(\text{Im}(\psi_x))$  est inclus dans

$$\varphi \left( \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{-n}(\text{Fil}^0(B_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F) \right) = \left( \varphi \left( \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{-n}(\text{Fil}^0(B_{\text{cris}})) \right) \right) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F.$$

Mais  $\varphi(\bigcap_{n \geq 0} \varphi^{-n}(\text{Fil}^0(B_{\text{cris}}))) \subset B_{\text{cris}}^+$  d'après [30], 5.3.7(i); cela conclut.

Vérifions maintenant que  $\psi_x$  ne se factorise pas par  $\text{Fil}^k(B_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ . Par faible-admissibilité de  $D_{\text{cris}}(M_x)$  ([31], Proposition 5.4.2.(i)), le sous- $\varphi$ -module filtré

$$\text{Fil}^k(D_{\text{cris}}(M_x))^{\varphi=F_1(x)}$$

a son polygone de Newton au-dessus de son polygone de Hodge. Mais le premier n'a qu'une pente  $v(F_1(x)) < k$  par l'hypothèse  $x \in I_k$ , et le second n'a que des pentes  $\geq k$  par construction. Ainsi,  $\text{Fil}^k(B_{\text{cris}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F = \{0\}$  et ne contient donc pas  $\psi_x$ , ce que l'on voulait.

Considérons enfin le  $F$ -espace vectoriel des applications :

$$(7) \quad M_x^* \longrightarrow (B_{dR}^+ / t^k B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F.$$

Il est non nul car nous avons montré que la réduction modulo  $t^k B_{dR}^+ \cap B_{\text{cris}}$  de  $\psi_x$  en fait partie. Le Lemme 6.2 s'applique à  $\mathcal{R}' := \mathcal{R}_x = F$ ,  $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_x = M_x$ , et montre que l'espace des applications ci-dessus est un  $F$ -espace vectoriel de dimension 1, car si  $x \in I_k$ , (6) assure que  $P(k)(x) \in F^*$ . Ainsi, toute application du type (7) est  $F$ -proportionnelle à  $\psi_x$ , et se factorise donc par  $(B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi=F_1(x)}$ . Cela montre que (1) est vérifiée.<sup>14</sup>

Soit  $x \in X(F)$ ; l'évaluation en  $x$  détermine un  $\mathbb{Q}_p$ -morphisme d'algèbre continu  $\mathcal{R} \rightarrow F$ . Si  $M_x^* := \text{Hom}_F(M_x, F)$ , le  $F$ -espace vectoriel

$$D_{\text{cris}}(M_x)^{\varphi=F_1(x)} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(M_x^*, B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi=F_1(x)}$$

est donc non nul par le Lemme 6.1.  $\square$

**6.3.8.**

*Remarques.* – En général, il est bien sûr faux que sous les hypothèses de la Proposition 6.1,  $D_{\text{cris}}(V(k_i))^{\varphi=F_i(x)}$  est non nul si  $i > 1$ . La considération d'une famille  $p$ -adique de formes modulaires passant par une forme modulaire parabolique propre de niveau  $\Gamma_0(p)$  qui est  $p$ -nouvelle en donne un contre-exemple. De plus, ce que l'on a fait pour les  $\Lambda^i$  vaut de même aussi naturellement pour n'importe quel foncteur de Schur de  $\text{GL}(n)$ . Si  $n = 3$ , l'isomorphisme canonique  $V^* \otimes \det(V) \simeq \Lambda^2(V)$  permet de reformuler la proposition pour  $i = 2$  en terme de  $V^*$ . Elle montre alors que  $D_{\text{cris}}(V(k_1))^{\varphi=F_1(x)}$  et  $D_{\text{cris}}(V^*(-k_3))^{\varphi=F_3(x)^{-1}}$  sont non nuls.

<sup>14</sup>Noter que si  $W$  et  $U$  sont des  $\mathbb{Q}_p$ -espaces de Banach, avec  $U$  de dimension finie, l'application canonique  $W \otimes_{\mathbb{Q}_p} U \rightarrow W \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} U$  est un isomorphisme.



### 7. Extensions et pseudo-représentations

#### 7.1. Existences de réseaux stables

**7.1.1.** Soient  $K$  un corps de caractéristique 0,  $V = K^r$ ,  $G$  un groupe,  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation semi-simple. Soit  $(\rho = \bigoplus_{i=1}^n \rho_i, V = \bigoplus_{i=1}^n W_i)$  la décomposition isotypique de  $(\rho, V)$  : pour chaque  $i$ ,  $(W_i, \rho_i)$  est somme directe de  $n_i$  copies d'une représentation irréductible  $(V_i, \rho'_i)$ , et  $\rho'_i \not\cong \rho'_j$  si  $i \neq j$ . On dira que  $V$  satisfait la condition (ABS) si les  $\rho'_i$  sont absolument irréductibles.

On suppose dès maintenant et dans tout §7.1 que  $V$  satisfait (ABS). On fixe de plus  $A$  un sous-anneau intègre noethérien de  $K$  tel que  $K = \text{Frac}(A)$  et  $\text{tr}(\rho(G)) \subset A$ .

**7.1.2.** Si  $B$  est un sous-anneau de  $K$ , on appelle  $B$ -réseau de  $V$  un sous- $B$ -module libre  $\Lambda$  tel que  $K.\Lambda = V$ . Si  $V$  est une représentation de  $G$ , on dit qu'un  $B$ -réseau est stable s'il est stable sous l'action de  $G$ .

LEMME 7.1. –

- (i) L'image de  $A[G]$  dans  $\text{End}_K(V)$  est de type fini sur  $A$ .
- (ii) Si  $A$  est normal,  $\text{tr}(\rho'_i(G)) \subset A$ .
- (iii) Si  $A$  est principal,  $(V_i, \rho'_i)$  admet un  $A$ -réseau stable.
- (iv) Plus généralement, si  $P \in \text{Spec}(A)$  est tel que  $A_P$  est de valuation discrète, il existe  $g \in A \setminus P$  tel que  $V_i$  admet un  $A_g$ -réseau stable.
- (v) Supposons de plus que  $A$  est soit une algèbre affinoïde, soit local complet,  $G$  un groupe topologique, si  $T : G \rightarrow A$  est continue, alors les  $g \rightarrow \text{tr}(\rho'_i(g))$  sont continus. De plus, tout  $A$ -réseau stable est une représentation continue de  $G$ .

*Preuve.* – Par la théorie des modules semi-simples, l'image de  $K[G]$  dans  $\text{End}(V)$  est somme directe de ses images dans les  $\text{End}(W_i)$ . De plus, l'image de  $K[G]$  dans  $\text{End}(W_i)$  est l'action diagonale de  $\text{End}(V_i)$  dans  $\text{End}(W_i)$ . En particulier, on dispose d'un  $e_i \in K[G]$  tel que  $\rho(e_i)$  est le projecteur  $G$ -équivariant sur  $W_i$ . Aussi,

$$\exists f \in K^*, \forall g \in G, \quad \text{tr}(\rho_i(g)) = \text{tr}(\rho(e_i g)) \in fA.$$

On déduit la même assertion pour  $\rho'_i$ , en remplaçant  $f$  par  $f/n_i$ .

Soit  $i$  fixé,  $d = \dim(V_i)$  ; on fixe une base de  $V_i$  nous permettant de l'identifier à  $K^d$ . La représentation  $\rho'_i$  étant absolument irréductible, un théorème de Wedderburn assure l'existence de  $g_1, \dots, g_{d^2} \in G$ , tels que les  $\rho'_i(g_k)$  engendrent  $\text{End}(V_i)$  comme  $K$ -espace vectoriel. Ainsi,

$$M := \left( (\text{tr}(\rho'_i(g_k g_l)))_{1 \leq k, l \leq d^2} \right) \in \text{GL}_{d^2}(K).$$

Soit  $f' \in K^*$  tel que  $M^{-1}$  et les  $\rho'_i(g_k)$  soient à coefficients dans  $f'A$  ; alors pour tout  $g \in G$  on a  $\rho'_i(g) \in f f' / n_i M_d(A)$ . Autrement dit,

$$(8) \quad A^d \subset \rho'_i(G).A^d \subset f f' / n_i A^d.$$

En particulier,  $A[\rho'_i(G)]$  s'injecte dans  $\text{Hom}_A(A^d, (f f' / n_i)A^d)$ . Comme  $A$  est noethérien, cela prouve (i). De plus, si  $A$  est principal, (8) montre que  $A[\rho'_i(G)].A^d$  est un réseau stable, cela montre (iii). On en déduit (ii) car un anneau normal noethérien est intersection, dans son corps de fractions, de ses localisés en ses idéaux premiers de hauteur 1, qui sont de valuation discrète ([43], Théorèmes 11.4 et 11.5).

Montrons l’assertion (iv). Par (iii),  $V_i$  admet un  $A_P$ -réseau stable, disons  $\Lambda_i$ . Fixons  $e_1, \dots, e_{r_i}$  une  $A_P$ -base de  $\Lambda_i$ , ainsi que des éléments  $g_1, \dots, g_s$  de  $G$  tels que les  $\rho(g_j)$  engendrent comme  $A$ -module l’image de  $A[G]$  dans  $\text{End}_K(V)$ , ce qui est loisible par (i). Chaque  $\rho(g_j)(e_k)$  étant une  $A_P$ -combinaison linéaire finie des  $e_l$ , on peut trouver un dénominateur commun  $g \in A \setminus P$  tel que le  $A_g$ -réseau  $\sum_k A_g e_i$  soit stable par  $G$ ; cela permet de conclure.

La première assertion de (v) découle de  $n_i \text{tr}(\rho'_i(g)) = \text{tr}(\rho(e_i g))$ , prouvons la seconde. Si  $\Lambda$  est un réseau stable de  $V$ , il suffit de vérifier que  $\psi : G \rightarrow \text{End}_A(\Lambda)$  est continue, car alors  $g \mapsto \psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$  le sera aussi. On rappelle que si  $A$  est affinoïde ([15], 3.7.3) ou local complet, tout  $A$ -module de type fini a une topologie canonique de  $A$ -module complet, et que toute application  $A$ -linéaire entre deux tels modules est continue et fermée. Par (i), on peut trouver  $g_1, \dots, g_s \in G$  engendrant  $M := A[\rho(G)]$ ; on munit  $M$  de la topologie discutée ci-dessus. Il suffit de montrer que  $\psi^* : G \rightarrow M$  est continue. Par semi-simplicité de  $V$  comme  $G$ -représentation, l’application  $\psi^{**} : G \rightarrow A^s, g \rightarrow (\text{tr}(g_i g))$ , induit une injection  $A$ -linéaire  $M \rightarrow A^s$ , nécessairement continue et fermée. La continuité de  $\psi^{**}$  permet de conclure.  $\square$

**7.2. Représentations attachées aux pseudo-caractères**

**7.2.1.** Soit  $G$  un groupe,  $A$  un anneau commutatif; on rappelle qu’une fonction  $T : G \rightarrow A$  est un pseudo-caractère sur  $G$ , de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , à coefficients dans  $A$  si

$$\forall g, h \in G, \quad T(gh) = T(hg),$$

$$\forall g = (g_1, \dots, g_{n+1}) \in G^{n+1}, \quad \sum_{\sigma = c_1 \dots c_r \in \mathfrak{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^r f(c_i(g)) = 0$$

$n$  est le plus petit entier ayant la propriété ci-dessus.

Ici  $\sigma = c_1 \dots c_r$  est la décomposition en cycles de  $\sigma$ , et si  $c = (j_1, \dots, j_s)$  est un cycle,  $c(g) = \prod_{i=1}^s g_{j_i}$ , cf. [62], §1, [53], §2.

La trace d’une représentation  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(A)$  est en particulier un pseudo-caractère sur  $G$ , à coefficients dans  $A$  (cf. loc. cit.); il est de dimension  $n$  si  $A$  est intègre de caractéristique 0 (cf. [53], 2.4). On discute de l’assertion réciproque dans les paragraphes qui suivent.

**7.2.2.** Si  $A = F$  est un corps, il est connu que quitte à faire une extension séparable finie de  $F$ ,  $T$  est la trace d’une représentation semi-simple  $G \rightarrow \text{GL}_n(F)$ , unique à isomorphisme près, satisfaisant la propriété (ABS) de 7.1.1 (voir [62], §1, Théorème 1, [53], 4.2 dans cette généralité). On dira que  $T$  est absolument irréductible si cette représentation l’est.

Soient  $F$  un corps,  $B \subset F$  un sous-anneau,  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(F)$  une représentation de  $G$ ; on suppose de plus que  $\text{tr}(\rho(G)) \subset B$ , la discussion ci-dessus implique immédiatement que si  $m$  est un idéal maximal de  $B$  de corps résiduel  $k$  de caractéristique 0, alors la réduction modulo  $m$  de  $\text{tr}(\rho)$  est la trace d’une représentation semi-simple

$$\rho_m^{ss} : G \rightarrow \text{GL}_n(\bar{k}).$$

$\rho_m^{ss}$  est unique à isomorphisme près, définie sur une extension finie de  $k$ . Notons qu’il est clair que si  $\rho(G) \subset \text{GL}_n(B)$ , cela a un sens de réduire  $\rho$  modulo  $m$ , et qu’alors  $\rho_m^{ss}$  est la semi-simplification de cette réduction. Dans le cas où  $B = A(X)$  est une algèbre affinoïde,  $x \in X$ ,  $m$  l’idéal maximal de  $B$  défini par  $x$ , on notera aussi  $\rho_x^{ss}$  pour  $\rho_m^{ss}$ .

**7.2.3.** Supposons  $A$  quelconque, mais que pour tout  $m \in \text{Specmax}(A)$ , la réduction modulo  $m$  de  $T, T_m : G \rightarrow A/m$  soit absolument irréductible. Quitte à remplacer  $A$  par une extension

étale finie, il est encore vrai que  $T$  est la trace d'une unique représentation  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(A)$  ([53], 5.1).

Supposons finalement que  $A$  est intègre, que  $T : G \rightarrow \mathrm{Frac}(A)$  déduit de  $T$  soit absolument irréductible, mais que les  $T_m$  ne soient pas tous absolument irréductibles. On ne peut plus alors attacher canoniquement de représentation à  $T$  mais, au moins sous certaines hypothèses développées plus bas, un ensemble de représentations non toutes isomorphes en général. Pour nos applications, le cas intéressant sera celui où  $A$  est une algèbre affinoïde intègre de dimension 1.

LEMME 7.2. – Soient  $F$  un corps local,  $X$  un  $F$ -affinoïde intègre de dimension 1, et  $T : G \rightarrow A(X)$  un pseudo-caractère de dimension  $n$ , il existe :

- (i) Un  $F$ -affinoïde  $Y$  régulier intègre, de dimension 1, fini et surjectif sur  $X$ .
- (ii) Une représentation semi-simple  $\rho_{K(Y)} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K(Y))$  de trace  $T$ , satisfaisant (ABS).

Preuve. – En considérant la composée  $T : G \rightarrow A(X) \rightarrow K(X)$ , §7.2.2 assure que  $T$  est la trace d'une représentation semi-simple  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(L)$  satisfaisant (ABS) (cf. 7.1.1), pour une extension finie  $L/K(X)$ . Soit  $A'$  la normalisation de  $A$  dans  $L$ , c'est un anneau de Dedekind car  $A$  est intègre noethérien de dimension 1. D'après [15], 6.1.2, Proposition 4,  $A'$  est une  $F$ -algèbre affinoïde finie sur  $A$ , on l'écrit  $A(Y)$ , en particulier  $L = K(Y)$ . Ceci prouve (i) et (ii).  $\square$

**7.2.4.** Soient  $Y$  un  $F$ -affinoïde intègre de dimension 1,  $y \in Y(F)$  un point régulier,  $G$  un groupe et  $T : G \rightarrow A(Y)$  un pseudo-caractère qui est la trace d'une représentation semi-simple  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K(Y))$  satisfaisant (ABS). D'après le lemme 7.1(iv),  $K(Y)^n$  a un  $A(Y)_y$  réseau stable  $\Lambda_0$ , pour  $g \in A(Y)$  ne s'annulant pas en  $y$ .

On note  $\mathcal{O}$  l'anneau local rigide de  $A(Y)$  en  $y$ , c'est un anneau de valuation discrète (voir [15], 7.3.2, Proposition 8), on pose  $L := \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ . Le  $\mathcal{O}$ -module  $\mathcal{O}\Lambda_0$  est un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $L^n := K(Y) \otimes_{K(Y)} L^n$  stable par  $G$ . On supposera que l'anneau local algébrique en  $y$  est principal d'idéal maximal engendré par  $z \in A(Y)$ , on peut toujours faire cette hypothèse quitte à rétrécir  $Y$ . Disons que deux  $\mathcal{O}$ -réseaux stables  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont homothétiques si il existe  $r \in \mathbb{Z}$  tel que  $z^r \Lambda_1 = \Lambda_2$ . On note  $S$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{O}$ -réseaux stables pour la relation d'homothétie, et  $[\Lambda]$  la classe dans  $S$  du  $\mathcal{O}$ -réseau stable  $\Lambda$ .

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts affinoïdes connexes de  $Y$  contenant  $y$ ,  $\Lambda_i$  un  $A(\Omega_i)$ -réseau stable de  $L^n$  pour  $i = 1, 2$ . On dira que  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont équivalents s'il existe  $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$  un ouvert affinoïde connexe de  $Y$  contenant  $y$ , et un entier  $r \in \mathbb{Z}$ , vérifiant

$$z^r A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2 \subset L^n.$$

On note  $S'$  l'ensemble des classes pour cette relation d'équivalence, et  $[\Lambda_i] \in S'$  la classe du  $A(\Omega_i)$ -réseau stable  $\Lambda_i$ .

LEMME 7.3. –

- $S$  et  $S'$  sont non vides.
- L'application naturelle  $S' \rightarrow S$ ,  $[\Lambda] \mapsto [\mathcal{O}\Lambda]$ , est une bijection.
- Si  $s = [\Lambda] \in S'$ , les représentations de  $G$  sur les  $F$ -espaces vectoriels  $\Lambda/z\Lambda$  et  $(\mathcal{O}\Lambda)/z(\mathcal{O}\Lambda)$  sont isomorphes.

Cette dernière classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de  $\Lambda$  tel que  $s = [\Lambda]$ ; on l'appelle la représentation résiduelle de  $s$ .

Preuve. – L'ensemble  $S$  est non vide car il contient  $[\mathcal{O}\Lambda_0]$ . De même, si  $\Omega$  est un ouvert affinoïde connexe de  $Y$  contenant  $y$  et tel que  $g$  ne s'annule pas sur  $Y$  (ce qui existe car  $g(y) \neq 0$ ), alors la classe de  $A(\Omega)\Lambda_0$  est un  $A(\Omega)$ -réseau stable, ce qui prouve la première assertion.

L'application de l'énoncé est clairement bien définie. Montrons l'injectivité. Avec les notations du paragraphe ci-dessus, supposons que  $\mathcal{O}\Lambda_1 = z^p\mathcal{O}\Lambda_2$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . On peut supposer  $p = 0$ . Si  $e_1^i, \dots, e_n^i$  est une  $A(\Omega_i)$ -base de  $\Lambda_i$ , on note  $M \in \text{GL}_n(\mathcal{O})$  la matrice des  $e^1$  dans la base des  $e^2$ . On peut trouver  $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$  un ouvert affinoïde connexe de  $Y$  contenant  $y$  tel que  $M \in \text{GL}_n(A(\Omega_3))$ . Alors  $A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2$ .

Pour la surjectivité, considérons  $\Lambda$  un  $\mathcal{O}$ -réseau stable par  $G$  quelconque dans  $L^n$ . On sait que l'image  $C$  de  $A(Y)[G]$  dans  $\text{End}_{K(Y)}(K(Y)^n) \subset \text{End}_L L^n$  est de type fini sur  $A(Y)$  par le Lemme 7.1(i).  $C$  est de plus trivialement un sous- $A(Y)$ -module de  $\text{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda)$ . On choisit  $m_1, \dots, m_r$  une famille  $A(Y)$ -génératrice de  $C$ , ainsi que  $e_1, \dots, e_n$  une  $\mathcal{O}$ -base du  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda$ . On peut trouver un voisinage affinoïde  $\Omega$  de  $y$  dans  $Y$  tel que l'ensemble de tous les  $m_i$  soient à coefficients dans  $A(\Omega)$  dans la base des  $e_i$ . Le  $A(\Omega)$ -réseau  $\bigoplus_{i=1}^n A(\Omega)e_i$  est alors stable, et sa classe est un antécédent de  $[\Lambda]$ .

Les autres assertions sont immédiates.  $\square$

On rappelle que pour tout affinoïde  $Y$  réduit,  $A(Y)$  est canoniquement normé par sa norme du sup. Conservant les hypothèses de tout ce paragraphe, supposant de plus que  $G$  est un groupe topologique et que  $T : G \rightarrow A(Y)$  est continue, alors pour tout  $A(\Omega)$ -réseau stable comme plus haut, le Lemme 7.1(v) montre que la représentation déduite  $G \rightarrow \text{GL}_n(A(\Omega))$  est continue. En corollaire du Lemme 7.3, on obtient alors le

**COROLLAIRE 7.1.** – *Si  $T : G \rightarrow A(Y)$  est continue, alors pour tout  $\mathcal{O}$ -réseau stable  $\Lambda$  de  $L^n$ , la représentation résiduelle de  $G$  sur  $\Lambda/z\Lambda$  est continue.*

### 7.3. Variante d'un lemme de Ribet

Soit  $A$  un anneau de valuation discrète,  $K$  son corps des fractions,  $m$  un idéal maximal de  $A$ , et  $k = A/m$ . Soit  $G$  un groupe,  $\tau$  un automorphisme de  $K$ . Pour  $\rho$  une représentation de  $G$  sur un espace  $V$  de dimension finie sur  $K$ , et  $\Lambda$  un  $A$ -réseau stable (dans la suite nous dirons simplement un *réseau stable*), on note  $\bar{\rho}_\Lambda$  la représentation sur  $\Lambda/m\Lambda \simeq k^n$ . Par le théorème de Brauer–Nesbitt [28, 30.16],  $\bar{\rho}_\Lambda^{ss}$  ne dépend pas du réseau stable  $\Lambda$  (s'il en existe un); on la note  $\bar{\rho}^{ss}$ . Pour  $\rho$  une représentation sur  $K$  ou  $k$  on note  $\rho^\perp$  la représentation  $g \mapsto \rho(\tau(g))^*$ .

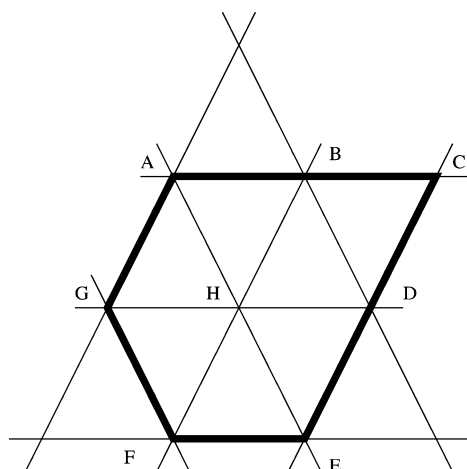
**PROPOSITION 7.1.** – *Soit  $\rho$  une représentation de  $G$  de dimension  $n$  sur  $K$  admettant un réseau stable. On suppose que  $\rho \simeq \rho^\perp$  est absolument irréductible et que  $\bar{\rho}^{ss} \simeq \phi \oplus \phi^\perp \oplus \psi$  où  $\phi, \phi^\perp$  et  $\psi$  sont trois représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.*

Alors :

- (a) *Soit il existe un réseau stable  $\Lambda$  tel que  $\bar{\rho}_\Lambda$  admette un sous-quotient  $r$  qui est une extension non triviale de  $\phi^\perp$  par  $\phi$ , et qui vérifie  $r \simeq r^\perp$ .*
- (b) *Soit il existe un réseau stable  $\Lambda$  tel que  $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}_\Lambda^\perp$ , et tel que  $\bar{\rho}_\Lambda$  admette une unique sous-représentation  $r$  de longueur 2 et un unique sous-quotient  $r'$  de longueur 2, avec  $r$  extension non triviale de  $\psi$  par  $\phi$ ,  $r'$  extension non triviale de  $\phi^\perp$  par  $\psi$ , et  $r' \simeq r^\perp$ .*

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 7.1.

**7.3.1.** Notons d'abord que l'on peut supposer que  $A$  est un anneau de valuation discrète complet, ce que l'on fait. En effet, si  $A'$  est le complété de  $A$  en  $m$ ,  $K'$  le corps des fractions de  $A'$ ,  $A'$  est de valuation discrète complet de corps résiduel  $k$ . L'extension  $\rho'$  de  $\rho$  à  $K'$  vérifie encore toutes les hypothèses du théorème. Si  $\Lambda'$  est un  $A'$ -réseau stable,  $\Lambda = \Lambda' \cap V$  est un  $A$ -réseau stable de  $V$ , et  $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}'_{\Lambda'}$ , si bien que la conclusion du théorème pour  $K'$  entraîne la conclusion pour  $K$ .

Fig. 1. Un exemple de partie  $S$ .

**7.3.2.** Nous prouverons la proposition en utilisant le dictionnaire de [4] et [5]. Rappelons quelques notions et résultats utiles de ces articles, auxquels nous renvoyons le lecteur pour de plus amples détails. Soit  $\mathcal{X}$  l'immeuble de Bruhat–Tits de  $\mathrm{PGL}_n(K)$ ,  $X$  l'ensemble de ses sommets. Soit  $S$  la partie de  $\mathcal{X}$  fixe par  $\rho(G)$ ; l'ensemble de sommets  $S := S \cap X$  est l'ensemble des classes d'homothétie de réseaux stables (cf. [4, Lemme 3.1.2]). Pour  $x \in S$  on note  $\bar{\rho}_x$  une réduction  $\bar{\rho}_\Lambda$  pour  $\Lambda$  un représentant de  $x$ , ce qui ne dépend pas du choix de  $\Lambda$ , à isomorphisme près.

LEMME 7.4. –

- (i)  $S$  est clos, i.e. convexe et réunion d'adhérence de facettes.
- (ii)  $S$  est contenu dans un sous-appartement  $\mathcal{A}$  de dimension 2, d'intérieur non vide.
- (iii)  $S$  est borné et  $S$  est fini.

*Preuve.* – D'après [4, Proposition 3.1.3],  $S$  est clos, ce qui prouve (i). La représentation  $\bar{\rho}^{ss}$  est sans multiplicité. D'après (i) et [5, Proposition 3.1.1],  $S$  est donc contenu dans un appartement de  $\mathcal{X}$ . Comme  $\bar{\rho}^{ss}$  a trois facteurs de Jordan–Hölder, [4, Proposition 2.4.1 et 3.3.2] assurent que  $S$  engendre un sous-appartement de  $\mathcal{X}$  de dimension 2, ce qui prouve (ii). Par [4, Proposition 3.2.1],  $\rho$  étant irréductible,  $S$  est borné. Comme il est dans un appartement de  $\mathcal{X}$  par (ii),  $S$  est fini.  $\square$

L'ensemble  $S$  est donc un polygone convexe d'intérieur non vide dans le sous-appartement  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{X}$ , qui est un plan. Un exemple possible est représenté par la figure ci-dessus.

L'ensemble  $S \subset \mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^2$  est l'enveloppe convexe de la ligne polygonale foncée,  $S = \{A, B, C, \dots, H\}$ , et les côtés de  $S$  sont les segments  $[AC], [CE], [EF], [FG]$  et  $[GA]$  (par exemple  $[BC]$  n'est pas considéré comme un côté). De manière générale,  $S$  a de trois à six côtés. Avant d'énoncer précisément le lemme dont nous aurons besoin, nous allons discuter de la description donnée dans [5] des extensions non triviales apparaissant comme sous-quotients des  $\bar{\rho}_x$ ,  $x \in S$ , en terme des côtés de  $S$ .

**7.3.3.** Il est prouvé loc. cit. que pour chaque côté  $\gamma$  de  $S$ , il existe une unique extension non triviale  $r_\gamma$  entre deux éléments distincts de  $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$  qui apparaît comme sous-quotient de tous les  $\bar{\rho}_x$ ,  $x \in \gamma \cap S$ . Ils montrent alors que si pour un sommet  $x$ ,  $\bar{\rho}_x$  admet  $r_\gamma$  comme sous-quotient, c'est que ce sommet est dans  $c$ . Enfin, l'application  $\gamma \mapsto r_\gamma$  est une bijection de l'ensemble des côtés de  $S$  sur l'ensemble des extensions non triviales qui apparaissent comme

sous-quotient d'un  $\bar{\rho}_x$  avec  $x \in S$ . En particulier, une remarque importante dans le cas où  $\mathcal{S}$  a strictement moins de six côtés, est qu'au moins un des six types possibles d'extensions non triviales (par exemple de  $\phi$  par  $\phi^\perp$ ) n'apparaît comme sous-quotient d'aucun des  $\bar{\rho}_x$  avec  $x \in S$ . L'énoncé correct d'existence d'extensions non triviales se traduit plutôt par la connexité d'un certain *graphe orienté des extensions non triviales*, comme l'explique le lemme suivant, dans lequel on récapitule en partie ce que l'on vient de dire.

**LEMME 7.5.** – *Il existe un graphe orienté d'ensemble de sommets  $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$ , d'ensemble d'arêtes  $A \subset (\{\phi, \phi^\perp, \psi\}^2 - \Delta)$  ( $\Delta$  est la diagonale), qui est connexe en tant que graphe orienté, muni d'une bijection  $c$  de  $A$  sur les côtés de  $\mathcal{S}$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour toute arête  $a = (u, v) \in A$ , il existe une extension  $r_{c(a)}$  de  $v$  par  $u$ , non triviale, telle que pour tout  $x$  dans  $c(a) \cap S$ ,  $r_{c(a)}$  apparaît comme sous-quotient de  $\bar{\rho}_x$ .*
- (ii) *Réciproquement, si  $x \in S$ , et si  $\bar{\rho}_x$  contient comme sous-quotient une extension non triviale de  $v$  par  $u$ , alors cette extension est isomorphe à  $r_{c((u,v))}$ , et  $x$  est sur  $c((u, v))$ .*
- (iii) *Si  $(u, v)$  et  $(v, w)$  sont deux arêtes de  $A$ , avec  $u, v, w$  deux à deux distincts, les côtés  $c((u, v))$  et  $c((v, w))$  du polygone  $\mathcal{S}$  se coupent si et seulement si  $(u, w) \notin A$ .*

*Preuve.* – Considérons le graphe orienté d'ensemble de sommets  $\{1, 2, 3\}$  attaché à la partie close  $\mathcal{S}$ , noté  $\mathcal{G}(\mathcal{S})^1$  dans [5], §2.2. On identifie  $\{1, 2, 3\}$  à  $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$  comme en loc. cit. 3.3.2. La Proposition 2.3.1 de [5] donne une bijection entre les arêtes de  $\mathcal{G}(\mathcal{S})^1$  et les côtés de  $\mathcal{S}$ , que l'on note  $c$ . Ce graphe est connexe en tant que graphe orienté parce que  $\rho$  est irréductible [5, Proposition 3.4.1]. Soit  $a = (u, v) \in A$ ,  $r_{c(a)}$  est définie comme étant l'unique extension non triviale de  $v$  par  $u$  qui est un sous-quotient d'un  $\bar{\rho}_x$ , avec  $x \in S$  (cf. Corollaire 3.3.7 loc. cit.). Les assertions (i) et (ii) résultent de la remarque suivant le Théorème 3.3.3 loc. cit. La propriété (iii) résulte de la remarque de loc. cit. §2.3.  $\square$

**7.3.4.** À partir d'ici, nous allons traduire la condition d'anti-autodualité  $\rho \simeq \rho^\perp$ . Par hypothèse, il existe un isomorphisme de  $K$ -espaces vectoriels  $\varphi$  de  $V$  dans  $V^*$  tel que

$$(9) \quad \forall g \in G, \quad \rho(\tau(g)) = \varphi^{-1} \rho^*(g) \varphi.$$

Si  $\Lambda$  est un réseau de  $V$ , on note  $\Lambda^*$  le réseau dual dans  $V^*$ . L'application  $\Lambda \mapsto \Lambda^*$  passe au quotient et définit une bijection naturelle  $b$  entre l'ensemble des sommets de l'immeuble  $X$  de  $\text{PGL}(V)$  et celui de l'immeuble  $X^*$  de  $\text{PGL}(V^*)$ , qui s'étend en un morphisme d'immeubles de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}^*$ . Il est clair que si  $S^*$  désigne la partie de  $\mathcal{X}^*$  stable par  $\rho^*$ , on a

$$S^* = b(S).$$

Par ailleurs l'application  $\varphi$  induit un isomorphisme d'immeubles  $\varphi_*$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}^*$ . On déduit immédiatement de (9) que

$$\varphi_*(S) = S^*.$$

L'isomorphisme  $t := b^{-1} \varphi_*$  de  $\mathcal{X}$  laisse donc stables  $S$  et  $S$ . Si  $x \in S$ ,  $\varphi$  induit par passage au quotient un isomorphisme

$$(10) \quad \bar{\rho}_x^\perp \simeq \bar{\rho}_{t(x)}.$$

**7.3.5.** Terminons la preuve de la Proposition 7.1. Comme le graphe du Lemme 7.5 est connexe en tant que graphe orienté, il y a un chemin qui va de  $\phi$  à  $\phi^\perp$ . Il y a donc deux possibilités :

Soit  $(\phi, \phi^\perp) \in A$ ; pour  $x \in c((\phi, \phi^\perp)) \cap S$ , le Lemme 7.5(i) assure que  $\bar{\rho}_x$  contient comme sous-quotient  $r_{c((\phi, \phi^\perp))}$  qui est une extension non triviale de  $\phi^\perp$  par  $\phi$ . Montrons que  $r_{c((\phi, \phi^\perp))}^\perp \simeq r_{c((\phi, \phi^\perp))}$ . La représentation  $r_{c((\phi, \phi^\perp))}^\perp$  est aussi une extension non triviale de  $\phi^\perp$  par  $\phi$ , qui apparaît comme sous-quotient de  $\bar{\rho}_{t(x)}$  d’après (10). L’assertion (ii) du Lemme 7.5 conclut. On est donc dans le cas (a) de la Proposition 7.1.

Soit  $(\phi, \phi^\perp) \notin A$ , auquel cas  $(\phi, \psi)$  et  $(\psi, \phi^\perp)$  sont dans  $A$ . L’assertion (iii) du Lemme 7.5 implique qu’il existe  $x \in c((\phi, \psi)) \cap c((\psi, \phi^\perp)) \cap S$ . Ainsi,  $\bar{\rho}_x$  contient une extension non triviale de  $\psi$  par  $\phi^\perp$ , et une extension non triviale de  $\phi$  par  $\psi$ . Cela entraîne que la première (resp. la seconde) est l’unique sous-extension (resp. quotient) de longueur 2 de  $\bar{\rho}_x$ . Pour conclure que l’on est bien dans le cas (b) de la Proposition 7.1, il suffit donc de voir que  $t(x) = x$  (cf. formule (10)). Mais par le Lemme 7.5(ii) et (10),  $t(c((\phi, \psi))) = c((\psi, \phi^\perp))$ , car  $\psi \simeq \psi^\perp$ . De même,  $t(c((\psi, \phi^\perp))) = c((\phi, \psi))$ . En particulier,  $t(x) = x$ .  $\square$

### 8. Déformation $p$ -adique de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^\perp$

#### 8.1. Notations pour les espaces de formes automorphes

**8.1.1.** On fixe encore  $p = v_1 v_2$  décomposé dans  $E$ ,  $N$  un entier premier à  $p$ , ainsi qu’un isomorphisme de corps  $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ ,  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ .

La donnée de  $v_1$  nous permet d’identifier canoniquement  $U(3)(\mathbb{Q}_p)$  à  $GL_3(\mathbb{Q}_p)$  comme dans 4.2.1. Soit  $K_f$  un compact ouvert de  $U(3)(\mathbb{A}_f)$ , décomposé place par place, égal à un compact maximal hyperspécial aux places ne divisant pas  $pN \text{ disc}(E)$ , et à l’Iwahori  $I$  des éléments triangulaires supérieurs modulo  $p$  de  $GL_3(\mathbb{Z}_p)$  en  $p$ . On notera de plus  $K_f^p$  le sous-groupe des éléments de  $K_f$  de  $p$ -composante égale à 1.

On fixe une représentation irréductible complexe lisse  $J$  de  $K_f$  définie sur  $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ , triviale restreinte aux places ne divisant pas  $N$ . La représentation  $J$  est de dimension finie,  $\iota$  nous permet de la voir à coefficients dans un corps local fixé  $F_0$  et de considérer  $J(F)$  pour chaque  $F_0 \subset F \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$  comme étant une  $F$ -représentation lisse de  $K_f$ . On note  $\mathcal{B}$  l’espace des fonctions complexes lisses sur  $U(3)(\mathbb{Q}) \backslash U(3)(\mathbb{A})$ , vu comme représentation de  $U(3)(\mathbb{A})$  par translation à droite.

**8.1.2.** Si  $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$ , l’espace des formes automorphes pour  $U(3)$  de “poids automorphes”  $w$  et de type  $(K_f, J)$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel

$$S_w(K_f, J, \mathbb{C}) := \text{Hom}_{U(3)(\mathbb{R}) \times K_f} (V_w(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} J, \mathcal{B}).$$

On note  $\mathcal{H}'$  l’algèbre de Hecke globale (sur  $\mathbb{Z}$ ) hors de  $pN$ , et  $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(p)$ , où  $\mathcal{A}(p)$  est l’algèbre d’Atkin–Lehner introduite en 5.1. C’est un anneau commutatif, et on notera  $\mathcal{H}_A := \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ , pour tout anneau commutatif  $A$ . Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel<sup>15</sup>  $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$  est de manière naturelle un module sur  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ . Si  $V$  est un  $A[[I\Delta^+ I]K_f]$ -module, on notera  $H^0(V)$  le  $\mathcal{H}_A$ -module des fonctions

$$U(3)(\mathbb{Q}) \backslash U(3)(\mathbb{A}_f) \rightarrow V, \quad \text{telles que } \forall x \in U(3)(\mathbb{A}_f), \forall u \in K_f, \quad u.f(xu) = f(x).$$

<sup>15</sup> La représentation  $V_w(\mathbb{C})$  de  $GL_3(\mathbb{C})$  est définie en 2.3. On la voit ici comme une représentation de  $U(3)(\mathbb{R})$  par le plongement  $U(3)(\mathbb{R}) \subset GL_3(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$ , la dernière flèche étant donnée par le plongement de  $E$  dans  $\mathbb{C}$  suivant :  $E \xrightarrow{v_1} \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\iota^{-1}} \mathbb{C}$ .

Notons que  $H^0(V)$  dépend aussi de  $K_f$ , bien que la notation ne le laisse pas apparaître. C'est une vérification classique que la donnée de  $\iota$  permet de voir  $H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$  comme une  $F_0$ -structure de  $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$ , et ce comme  $\mathcal{H}_{F_0}$ -module. On pose <sup>16</sup>

$$S_w^{cl} := H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0)).$$

**8.1.3.** Par la finitude du nombre de classes ([12], 5.1),  $U(3)(\mathbb{A}_f)$  s'écrit comme réunion finie

$$U(3)(\mathbb{A}_f) = \prod_{i=1}^h U(3)(\mathbb{Q})x_iK_f$$

de plus  $\Gamma_i := (x_iU(3)(\mathbb{Q})x_i^{-1}) \cap K_f$  est un groupe fini car compact discret. Pour un  $A[I\Delta^+I, K_f]$ -module  $V$ , l'application  $A$ -linéaire

$$\varphi_V : H^0(V) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i}, \quad f \rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_h))$$

est un isomorphisme  $A$ -linéaire fonctoriel en  $V$ . On en déduit que sur les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels, le foncteur  $V \mapsto H^0(V)$  est exact et commute à l'extension des scalaires en  $A$ .

Enfin, on en déduit aussi que  $S_w^{cl}$  est de dimension finie sur  $F_0$ . De plus, si  $V$  est normé par  $|\cdot|$ , on munit  $H^0(V)$  de la norme

$$|f| := \text{Sup}_{i=1}^h |f(x_i)|.$$

**8.2. Familles  $p$ -adiques typées pour  $U(3)$**

**8.2.1.** Soient  $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3$ ; on note  $S_w^{cl, \alpha}$  le plus grand sous- $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$ -module de  $S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}_p}$  sur lequel chaque  $U_i^w$  (cf. 6.2.4),  $1 \leq i \leq 3$ , n'a que des valeurs propres de valuation  $\alpha_i$ . On dira que  $w$  est  $\alpha$ -régulier si  $\delta(w) > \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ . On rappelle que pour tout  $w' \in \mathbb{Z}^{3,+}$ , on a défini en 6.2.4 un caractère  $\nu_{w'} : \Delta^+ \rightarrow p^{\mathbb{Z}}$ . Si  $r \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ ,  $x \in \mathbb{C}_p^3$ , on note  $B(x, r)$  la boule fermée de  $\mathbb{C}_p^3$  de centre  $x$  de rayon  $r$ .

**8.2.2.** Fixons  $f \neq 0 \in S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}_p}$  une forme propre pour  $\mathcal{H}$ .

PROPOSITION 8.1. – *Il existe un corps local  $F$ ,  $r \in |F| \cap ]0, 1[$ ,  $X$  un  $F$ -affinoïde réduit,  $\pi : X \rightarrow B(w, r)$  un  $F$ -morphisme fini, un morphisme d'anneaux  $a : \mathcal{H} \rightarrow A(X)^0$ , et  $x_f \in X(F)$  tels que :*

- (i) *Pour tout  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $a([Iu_iI])$  est un inversible de  $A(X)$  et  $x \mapsto v(a([Iu_iI])(x)) \in \mathbb{Q}$  est constante sur  $X(\mathbb{C}_p)$ , disons égale à  $\alpha_i$ . On pose  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .*
- (ii) *Si  $w' \in B(w, r) \cap (w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+})$  est  $\alpha$ -régulier, l'application  $X(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p)$ ,*

$$x \mapsto (\chi_x : [IuI] \otimes h' \in \mathcal{A}(p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}' \mapsto \nu_{w'}(u)a([IuI]h')(x))$$

*induit une bijection entre  $\pi^{-1}(w')(\mathbb{C}_p)$  et l'ensemble des caractères  $\mathbb{C}_p$ -valués de  $\mathcal{H}$  apparaissant dans  $S_{w'}^{cl, \alpha} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ , comptés sans multiplicité.*

- (iii)  $\chi_{x_f}$  est le caractère de  $\mathcal{H}$  sur  $f$ .
- (iv) *L'image de  $\mathcal{H}$  dans  $A(X)^0$  est d'adhérence compacte.*

<sup>16</sup> Noter le  $-w$  dans la définition.



- (v) La restriction de  $\pi$  à chaque composante irréductible de  $X$  est surjective sur  $B(w, r)$ . Cette propriété est de plus encore vérifiée pour le changement de base de  $\pi$  à tout fermé irréductible de  $B(w, r)$ .
- (vi)  $\pi^{-1}(B(w, r)(\mathbb{Q}_p)) \subset X(F)$ .

**8.2.3.** Un point de  $X(F)$  sera dit *classique* si  $\pi(x) \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$  et si le caractère  $\chi_x$  de  $\mathcal{H}$  qui lui correspond par le (ii) de la Proposition 8.1 est réalisé dans  $S_{\pi(x)}^{cl} \otimes_{F_0} F$ .

**COROLLAIRE 8.1.** – *Les points classiques sont Zariski-denses dans  $X(\mathbb{C}_p)$ .*

*Preuve.* – L'ensemble des points  $w' \in (w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}) \cap B(w, r)$  qui sont  $\alpha$ -réguliers est Zariski-dense dans  $\text{Spec}(A(B(w, r)))$ . Les propriétés (ii) et (v) de la Proposition 8.1, ainsi que [22, Lemme 6.2.8] concluent.  $\square$

**8.2.4.** La Proposition 8.1 est essentiellement une conséquence des techniques de [22], à ceci près que nous expliquons ici comment gérer la présence du type  $J$ , et le fait que le niveau n'est pas nécessairement net. Le reste de cette section est consacré à sa preuve. Afin de faciliter le travail du lecteur, nous reprenons en détail certaines des constructions faites loc. cit.

Le cheminement de la preuve est le suivant. On commence par rappeler au §8.2.5 les propriétés essentielles de la famille des séries principales  $p$ -adiques de l'Iwahori de  $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ , que l'on note  $M$ . Cette dernière nous permet de définir au §8.2.8 la famille  $S$  des espaces de formes automorphes  $p$ -adiques de type  $J$  et niveau  $K_f$ . La famille de formes automorphes recherchée est obtenue, à la Coleman, en découpant dans  $S$  une famille de "vecteurs propres" pour l'opérateur compact  $U_p$ , ce qui est achevé au Lemme 8.9.

**8.2.5.** Soit  $B := B(0, 1)/\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{A}^3$  d'algèbre affinoïde  $A(B) := \mathbb{Q}_p\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ . Si  $w' \in \mathbb{Z}^{3,+}$ , nous avons défini en §6.2.4 un caractère  $\nu_{w'} : \Delta^+ \rightarrow p^{\mathbb{Z}}$ . Comme  $I\Delta^+I = \coprod_{u \in \Delta^+} IuI$  (cf. [22], §2.5, ce qui est noté ici  $I, \Delta^+$  et  $I\Delta^+I$ , est respectivement noté  $\Gamma_0(p), U$  et  $\mathbb{M}$  loc. cit.), ce caractère se prolonge de manière unique en un caractère  $I\Delta^+I \rightarrow p^{\mathbb{Z}}$  trivial sur  $I$ , que l'on notera encore  $\nu_{w'}$ .

**LEMME 8.1.** – *Il existe un  $A(B)$ -module de Banach orthonormalisable  $M$ , muni d'une opération  $A(B)$ -linéaire du monoïde  $I\Delta^+I$ , tel que :*

- (i) La spécialisation  $M_{w'}$  de  $M$  en tout  $w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+} \subset B(\mathbb{Q}_p)$  contient un sous- $\mathbb{Q}_p[I\Delta^+I]$ -module  $M_{w'}^{cl}$  qui a la propriété que  $M_{w'}^{cl} \otimes \nu_{w'}$  est  $\mathbb{Q}_p[I\Delta^+I]$ -isomorphe à  $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p)$ .
- (ii) Les éléments de  $I\Delta^+I$  agissent par des endomorphismes continus de norme  $\leq 1$  de  $M$ . Si  $a < b < c \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{diag}(p^a, p^b, p^c)$  agit par un endomorphisme compact.
- (iii) Soient  $w' = (k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3) \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$  et  $s := 1 + \text{Min}(k'_1 - k'_2, k'_2 - k'_3)$ ; alors  $(\text{diag}(1, p, p^2))/p^s$  est de norme  $\leq 1$  sur  $M_{w'}/M_{w'}^{cl}$ .

*Preuve.* – Soit  $M'$  le  $A(B)$ -module noté

$$\mathcal{S}(1)_{\chi}, \quad \chi = (\tau^{-k_3}, \tau^{-k_2}, \tau^{-k_1})$$

dans [22], §3.6. On le munit de la représentation  $A(B)$ -linéaire de  $I\Delta^+I$  notée  $[\cdot]$  loc. cit. Remarquons que si  $w' = (k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3)$ , le plus haut poids de  $V_{-w'}$  est  $(k'_2 - k'_3, k'_1 - k'_2, -k'_1) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$  dans les notations loc. cit. C'est pourquoi l'on considère le  $A(B)$ -module  $M := M' \otimes_{A(B)} A(B)$ , l'application  $A(B) \rightarrow A(B)$  étant le  $\mathbb{Q}_p$ -isomorphisme  $(X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_2 - X_3, X_1 - X_2, -X_1)$ . Ainsi  $M_{(k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3)} = M'_{(k'_2 - k'_3, k'_1 - k'_2, -k'_1)}$ .

L'orthonormalisabilité de  $M$ , ainsi que l'assertion (ii), découlent de [22, Proposition 3.6.2]. L'assertion (i) est une conséquence de la combinaison du Lemme 3.3.1 loc. cit. et du cinquième

point de la Proposition 3.6.2, la présence de la torsion par  $\nu_{w'}$  étant expliquée en §3.5. Il reste à prouver (iii). Soit  $t = (k'_2 - k'_3, k'_1 - k'_2)$  ; il s'agit de démontrer, dans les notations de loc. cit. §3.3 et §3.5, que  $(\text{diag}(1, p, p^2))/p^s$  est de norme  $\leq 1$  sur  $(S^t/S_t) \otimes \nu_t$ . Il suffit de démontrer la même assertion sur le  $\mathbb{Q}_p$ -Banach  $(\mathcal{N}^t/B_t) \otimes \nu_t$ , dont c'est un quotient. Mais ce dernier admet une base orthonormale explicite propre pour  $\text{diag}(1, p, p^2)$ , formée de monômes en les  $z_{i,j}$ ,  $i > 1$ , sur lesquels l'action est donnée par le Lemme 2.5.1 loc. cit. Un calcul immédiat conclut (ce calcul est de plus explicité dans la preuve de la Proposition 4.7.4).  $\square$

**8.2.6.** Soient  $A$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre et  $V$  un  $A[(I\Delta^+I)K_f]$ -module ; on aura à considérer la suite :

$$(11) \quad H^0(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi_V} \bigoplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_V} \\ \xleftarrow{p_V} \end{array} V^h$$

où  $\varphi_V$  est l'isomorphisme  $A$ -linéaire introduit en 8.1.3,  $i_V$  l'inclusion canonique, et

$$p_V := \left( \left( \sum_{x \in \Gamma_i} x \right) / |\Gamma_i| \right)_i$$

la projection  $(\prod_i \Gamma_i)$ -équivariante canonique, bien définie car  $V$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. On a  $p_V \cdot i_V = \text{id}$ , ce qui identifie le  $A$ -module  $H^0(V)$  à un facteur direct de  $V^h$ , et ce fonctoriellement en le  $A[(I\Delta^+I)K_f]$ -module  $V$ , si  $A$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre. Le lemme qui suit donne une description (non canonique) de l'action des opérateurs de Hecke sur  $H^0(V)$  en terme de  $\varphi_V$  et d'endomorphismes de  $V^h$  :

LEMME 8.2. – Soit  $\zeta \in \text{U}(3)(\mathbb{A}_f)$  tel que  $\zeta_i = 1$  si  $l|N$  et  $\zeta_p \in IuI$ , avec  $u \in \Delta^+$ . Notons  $T(\zeta)$  l'opérateur de Hecke associé à la double classe  $K_f \zeta K_f$  ; c'est un endomorphisme  $A$ -linéaire de  $H^0(V)$ . Il existe un entier  $r$ , ainsi que des  $\sigma_j : V^h \rightarrow V^h$  et  $T_j : V \rightarrow V$ ,  $j = 1, \dots, r$ , chacun dépendant de  $\zeta$ , tels que :

- (i)  $\sigma_j$  est la composée d'une permutation des  $h$ -coordonnées sur  $V^h$  par la projection sur l'un des  $h$  facteurs  $V$ ,
- (ii)  $T_j$  est la multiplication par un élément de  $(IuI)K_f^p$ ,
- (iii)  $\sum_{j=1}^r T_j \cdot \sigma_j$  est un endomorphisme de  $V^h$  préservant  $\bigoplus_i V^{\Gamma_i}$ , dont la restriction à ce dernier est  $\varphi_V \cdot T(\zeta) \cdot \varphi_V^{-1}$ .

Preuve. – La preuve est identique à celle de [22], Lemme 4.5.2, auquel nous renvoyons donc le lecteur.  $\square$

**8.2.7.** On suppose dans ce qui suit que  $A$  est une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Banach  $A$  noethérienne commutative ultramétrique (cf. [27], A.1) dont la norme induit la norme usuelle sur  $\mathbb{Q}_p$ , et que  $V$  est un  $A$ -module de Banach normé par  $|\cdot|$ , muni d'une action de  $(I\Delta^+I)K_f$  par endomorphismes  $A$ -linéaires continus de  $V$ . La norme sup. sur  $V^h$  en fait un  $A$ -module de Banach, orthonormalisable si  $V$  l'est.

LEMME 8.3. – Sous les hypothèses ci-dessus,  $H^0(V)$  est un  $A$ -module de Banach facteur direct topologique de  $V^h$ .

Preuve. – La norme de  $V^h$  induit la norme de  $H^0(V)$  définie en 8.1.3. L'inclusion  $i_V$  est continue par définition, et  $p_V$  l'est aussi car les éléments de  $\Gamma_i \subset K_f$  le sont. On en déduit que  $H^0(V)$  est un facteur direct topologique de  $V^h$ , et donc que c'est un sous- $A$ -module de Banach de  $V^h$ .

**8.2.8.** Fixons une norme de  $F_0$ -espace vectoriel sur  $J^*(F_0)$  telle que  $|J^*(F_0)| = |F_0|$ . Notons  $A(B/F_0) := F_0\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ . On munit  $M$  (resp.  $J^*(F_0)$ ) de l'unique action de  $(I\Delta^+I)K_f$  prolongeant celle de  $I\Delta^+I$  (resp. de  $K_f$ ), triviale sur  $K_f^p$  (resp. sur  $I\Delta^+I$ ). Cela munit naturellement  $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$  d'une structure de  $(I\Delta^+I)K_f$ -module. On définit le  $A(B/F_0)$ -module normé des formes automorphes  $p$ -adiques pour  $U(3)$ , de type  $J$ , comme étant

$$S := H^0(M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)),$$

muni de la norme discutée en §8.1.3.

LEMME 8.4. –

- (i) *Le  $A(B_0/F)$ -module normé  $S$  est un  $A(B/F_0)$ -module de Banach, facteur direct topologique d'un  $A(B/F_0)$ -module de Banach orthonormalisable.*
- (ii) *Soit  $\zeta \in U(3)(\mathbb{A}_f)$  comme dans le Lemme 8.2; l'opérateur de Hecke  $T(\zeta)$  agit sur  $S$  par un endomorphisme  $A(B_0/F)$ -linéaire continu de norme  $\leq 1$ . Si  $\zeta_p = \text{diag}(p^a, p^b, p^c)$  avec  $a < b < c$ , alors  $T(\zeta)$  est compact.*

*Preuve.* – D'après le Lemme 8.1,  $M$  est  $A(B)$ -orthonormalisable. Comme  $J^*(F_0)$  est un  $F_0$ -espace vectoriel de dimension finie tel que  $|J^*(F_0)| = |F_0|$  (donc  $F_0$ -orthonormalisable), il vient que  $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0) = M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$  est aussi un  $A(B/F_0)$ -module de Banach orthonormalisable. Le Lemme 8.1(ii) assure que les éléments de  $(I\Delta^+I)K_f$  agissent par endomorphismes continus sur  $M$ , et il est évident qu'ils agissent aussi de manière continue sur  $J^*(F_0)$ . Ainsi,  $(I\Delta^+I)K_f$  agit sur  $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$  par endomorphismes continus. Le (i) découle alors du Lemme 8.3.

Soient  $\zeta$  comme dans le Lemme 8.1, et  $T(\zeta) = \sum_j T_j \sigma_j$  la décomposition donnée par le Lemme 8.2. Il est évident que les  $\sigma_j$  sont des endomorphismes continus de  $V^h$  de norme  $\leq 1$ . L'assertion (ii) du Lemme 8.1, ajoutée au fait que les éléments de  $(I\Delta^+I)K_f$  agissent sur  $J^*(F_0)$  par des automorphismes d'ordre fini et donc continus de norme 1, assurent que les  $T_j$  sont aussi continus de norme  $\leq 1$  sur  $V$ . Ainsi,  $\sum_j T_j \sigma_j$  est un endomorphisme de  $V^h$  de norme  $\leq 1$ , et c'est a fortiori encore le cas de sa restriction à  $\bigoplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i}$ , ce qui conclut par le lemme 8.2(iii). Sous l'hypothèse supplémentaire  $\zeta_p \in I \text{diag}(p^a, p^b, p^c) I$  avec  $a < b < c$ , l'assertion de compacité se déduit de la compacité des  $T_j$ , qui découle de (ii) loc. cit., du Lemme 8.1(ii), et de ce que  $J^*(F_0)$  est de dimension finie sur  $F_0$ .  $\square$

**8.2.9.** Nous aurons besoin de deux types d'extension des scalaires pour le module  $S$  : l'évaluation en un point  $x \in B(\mathbb{C}_p)$  et la restriction à un ouvert affinoïde  $\Omega \subset B$ . Le contexte général est le suivant. On se replace dans le cadre du paragraphe 8.2.7, et on fixe  $A'$  une algèbre de Banach ayant même propriété que  $A$ , munie d'un morphisme contractant  $A \rightarrow A'$ . Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$(12) \quad \begin{array}{ccccc} H^0(V) \widehat{\otimes}_{A} A' & \xrightarrow[\sim]{\varphi_V \otimes 1} & \left( \bigoplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i} \right) \widehat{\otimes}_{A} A' & \xrightarrow{i_V \otimes 1} & (V^h) \widehat{\otimes}_{A} A' \\ \text{can} \downarrow & & \text{can} \downarrow & & \text{can} \downarrow \\ H^0(V \widehat{\otimes}_{A} A') & \xrightarrow[\sim]{\varphi_V \otimes_{A} A'} & \bigoplus_{i=1}^h (V \widehat{\otimes}_{A} A')^{\Gamma_i} & \xrightarrow{i_V \otimes_{A} A'} & (V \widehat{\otimes}_{A} A')^h. \end{array}$$

LEMME 8.5. – *Les flèches verticales sont des isométries, celle de gauche est Hecke-équivariante, et  $i_V \otimes 1$  est injective.*

*Preuve.* – C’est évident pour la flèche verticale de droite. Les relations  $p_{V'}i_{V'} = \text{id}$  pour  $V' = V$  et  $V \widehat{\otimes}_A A'$  entraînent que  $i_V \otimes 1$  est injective, puis que la flèche verticale du centre est une isométrie. Comme  $\varphi_{V \widehat{\otimes}_A A'}$  et  $\varphi_V \otimes 1$  sont des isométries par définition, cela entraîne que la flèche verticale gauche est une isométrie. L’assertion de commutativité aux opérateurs de Hecke est triviale.  $\square$

**8.2.10.** Soient  $U_1, U_2$  et  $U_p \in \mathcal{A}(p) \subset \mathcal{H}$  les opérateurs de Hecke associés respectivement aux éléments de  $U(3)(\mathbb{A}_f)$  triviaux à toutes les places sauf en  $p$  où ils valent  $u_1 = \text{diag}(1, 1, p)$ ,  $u_2 = \text{diag}(1, p, p)$  et  $u_1 u_2 = \text{diag}(1, p, p^2)$ . On a  $U_p = U_1 U_2$  (cf. 5.1). Le Lemme 8.4(ii) implique en particulier le :

COROLLAIRE 8.2. –  *$U_p$  agit sur  $S$  par un endomorphisme compact.*

En particulier, si  $F_0 \subset F \subset \mathbb{C}_p$  est un corps complet et  $A(B/F_0) \rightarrow F$  est l’évaluation en un point  $x \in B(F)$ ,  $U_p$  agit sur  $S_x := S \widehat{\otimes}_{A(B/F_0)} F = H^0(M_x \otimes_{F_0} J^*(F_0))$  (cette dernière égalité découlant du Lemme 8.5) par un endomorphisme compact. Soit  $w' \in w + (p - 1)\mathbb{Z}^{3,+}$ . D’après le Lemme 8.1(ii), et par exactitude du foncteur  $V \mapsto H^0(V)$  sur les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels, nous disposons d’une inclusion  $\mathcal{H}'$ -linéaire :<sup>17</sup>

$$S_{w'}^{cl} \hookrightarrow H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)).$$

Elle commute de plus à l’action de  $[IuI]$ ,  $u \in \Delta^+$ , si l’on renormalise ce dernier agissant sur  $S_{w'}^{cl}$ , en le divisant par  $\nu_{w'}(u)$  (toujours d’après le lemme 8.1(ii)). On a alors le

LEMME 8.6. – *Soient  $s \in \mathbb{Q}$ ,  $w' = (k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3) \in w + (p - 1)\mathbb{Z}^3$  et  $S_{w'}^s$ , le plus grand sous-espace de dimension finie  $U_p$ -stable de  $H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$  sur lequel  $U_p$  n’a que des valeurs propres de valuation  $s$ . Si  $\text{Min}(k'_1 - k'_2, k'_2 - k'_3) > s - 1$ , alors  $S_{w'}^s \subset S_{w'}^{cl}$ .*

*Preuve.* – Le foncteur  $V \mapsto H^0(V)$  étant exact sur les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels, on dispose d’une suite exacte :

$$(13) \quad 0 \rightarrow S_{w'}^{cl} \rightarrow H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \rightarrow H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \rightarrow 0,$$

la flèche  $H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \rightarrow H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$  étant  $U_p$ -équivariante.<sup>18</sup> La décomposition de  $U_p$  agissant sur  $H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$  donnée par le Lemme 8.2, combinée au Lemme 8.1(iii), montre alors que

$$\frac{U_p}{p^{1+\text{Min}(k'_1 - k'_2, k'_2 - k'_3)}}$$

est de norme  $\leq 1$  sur  $H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ . En particulier, sous l’inégalité de l’énoncé,  $U_p$  ne peut admettre de valeur propre de valuation  $\leq s$  sur ce dernier. L’exactitude au centre de (13) conclut.  $\square$

<sup>17</sup> Le  $\mathbb{Q}_p$ -vectoriel  $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p)$  étant une représentation absolument irréductible de  $I$ , cette inclusion est canonique à la multiplication par un élément de  $\mathbb{Q}_p^*$  près. Cependant, le choix, pour chaque  $w'$ , d’une quelconque d’entre elles, suffit à nos besoins.

<sup>18</sup> La première l’est seulement à multiplication par  $\nu_{w'}(\text{diag}(1, p, p^2))$  près.

**8.2.11.** Maintenant que nous savons que  $U_p$  est compact sur  $S$ , nous voudrions lui appliquer le théorème spectral de Coleman, afin de “découper” dans  $S$  une famille de vecteurs propres contenant  $f$ . Un léger problème technique est que  $S$  n’est pas orthonormalisable, mais simplement facteur direct d’un tel module. La généralisation adéquate des résultats de Coleman dans ce cadre a été reprise par Buzzard dans un travail en préparation [19]. Nous nous ramenons ici de manière ad hoc au cas traité par Coleman.

Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre,  $V$  un  $A[(I\Delta^+I)K_f]$ -module et  $U$  un endomorphisme de  $H^0(V)$ . La donnée de  $\varphi_V$  nous permet de le prolonger par 0 en un endomorphisme  $\tilde{U}$  de  $V^h$  défini par

$$\tilde{U} := i_V \varphi_V U \varphi_V^{-1} p_V.$$

On se replace dans les hypothèses de §8.2.7. Si  $U$  est un endomorphisme continu (resp. compact) de  $H^0(V)$ , alors  $\tilde{U}$  a la même propriété car  $i_V$  et  $p_V$  sont continus. Fixons  $V$  orthonormalisable et  $U$  un endomorphisme compact de  $V$ , on peut alors définir la série caractéristique

$$(14) \quad \det(1 - TU|_{H^0(V)}) := \det(1 - T\tilde{U}|_{V^h}) \in 1 + TA\{\{T\}\},$$

par [27], Théorème A.2.1<sup>19</sup>.

*Remarques.* –

- (i) Dans le cas particulier où  $A$  est un corps local, on rappelle que tout  $A$ -module de Banach  $W$  tel que  $|W| = |A|$  est orthonormalisable ([56], Proposition 1). Cela vaut donc en particulier pour  $H^0(V)$  si  $|V| = |A|$ , auquel cas la notation ci-dessus est cohérente, i.e.  $\det(1 - TU|_{H^0(V)})$  est bien la série caractéristique de  $U$  sur  $H^0(V)$  (cf. [56], Lemme 2).
- (ii) Si  $A \rightarrow A'$  est un morphisme contractant d’algèbre de Banach comme en 8.2.9, alors  $V \widehat{\otimes}_A A'$  est  $A'$ -orthonormalisable si  $A$  l’est par [27], Proposition A.1.3. Le Lemme 8.5 montre alors que si  $U$  est un opérateur de Hecke agissant de manière compacte sur  $V$ , la formation de  $\det(1 - TU|_{H^0(V)}) \in 1 + TA\{\{T\}\}$  commute à l’extension des scalaires par des morphismes d’algèbre de Banach contractants. Afin de ne pas alourdir la rédaction, nous utiliserons dans ce qui suit librement ce fait, ainsi que le Lemme 8.5, sans le mentionner explicitement.

Le Corollaire 8.2 autorise à poser :

$$g := \det(1 - TU_{p|_S}) \in 1 + TA(B/F_0)\{\{T\}\}.$$

**COROLLAIRE 8.3.** –  $g$  est l’unique fonction analytique sur  $B \times \mathbb{A}_{\text{rig}}^1$  telle que pour tout  $w' \in w + (p - 1)\mathbb{Z}^{3,+}$ ,

$$g(w', T) = \det(1 - TU_{p|_{H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))}}).$$

*Preuve.* – L’égalité ci-dessus découle des deux remarques précédant le corollaire. L’unicité vient de la Zariski-densité de  $w + (p - 1)\mathbb{Z}^{3,+}$  dans  $B(\mathbb{C}_p)$ . Elle ne sera pas utilisée dans ce qui suit.  $\square$

**8.2.12.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$  les valeurs propres respectives dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  de  $U_1, U_2$  et  $U_p$  sur  $f$ . Le lemme suivant assure que  $f$  est de pente finie.

<sup>19</sup> Noter que la condition (\*) de loc. cit. est automatiquement vérifiée sous nos hypothèses car  $A^m \supset \mathbb{Q}_p^*$  qui est non borné. De plus, comme Buzzard l’a remarqué, le Théorème A.2.1 loc. cit. repose sur le Lemme A.1.6 loc. cit., qui est incorrect si l’on omet de supposer que  $A$  est noethérien.

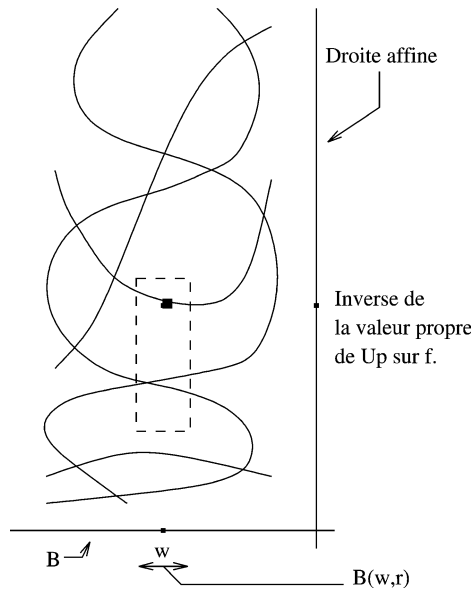


Fig. 2. L’hypersurface de Fredholm  $g(x, t) = 0$  dans  $B \times \mathbb{A}_{\text{rig}}^1$ .

LEMME 8.7. – La valeur propre  $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $U_p$  agissant sur  $f$  n’est pas nulle.

Preuve. – La forme automorphe complexe correspondant à  $f$  par  $\iota$  (cf. 8.1.1) engendre une somme finie de représentations automorphes irréductibles de  $U(3)(\mathbb{A})$ . Soit  $\pi_p$  la composante locale en  $p$  d’une quelconque de ces représentations. C’est une représentation complexe lisse irréductible de  $GL_3(\mathbb{Q}_p)$  ayant un vecteur  $I$ -invariant non nul sur lequel  $U_p$  agit par  $\iota^{-1}(\lambda)$ . Mais la représentation de  $\mathcal{A}(p)$  sur  $\pi_p^I$  se prolonge à toute l’algèbre de Hecke–Iwahori  $C^\infty(I \backslash G/I)$ . Cela conclut car les  $[IuI]$  sont inversibles dans cette dernière si  $u \in \Delta^+$  (cf. 5.1).  $\square$

Le Corollaire 8.3 appliqué à  $w' = w$  entraîne alors le :

COROLLAIRE 8.4. –  $g(w, \lambda^{-1}) = 0$ .

Le Lemme 8.7 entraîne de plus que les  $\lambda_i$  sont non nuls. On pose  $\beta_i = v(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$ ,  $\beta := \beta_1 + \beta_2 = v(\lambda) \in \mathbb{Q}$ . Dans l’exemple de la figure ci-contre,  $(w, \lambda^{-1})$  est le point marqué de l’hypersurface de Fredholm associée à  $g$ .

**8.2.13.** Nous allons montrer dans ce qui suit comment factoriser  $g$  “au voisinage de  $(w, \lambda^{-1})$ ”. Soit  $F \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$  un corps local contenant  $F_0$  et les  $\lambda_i$ .

LEMME 8.8. – Il existe une boule  $F$ -affinoïde  $B(w, r) \subset B$  ainsi qu’une factorisation  $g|_{A(B(w,r))} = PQ$  dans  $A(B(w, r))\{\{T\}\}$  telles que :

- (a)  $P \in 1 + TA(B(w, r))[T]$  est de coefficient dominant inversible,
- (b)  $(P, Q) = 1$  dans  $A(B(w, r))\{\{T\}\}$ ,
- (c)  $\forall x \in B(w, r)(\mathbb{C}_p)$ ,  $P(x, T)$  a toutes ses racines de valuation  $-\beta$ , et  $Q(x, T)$  n’en a pas.

Preuve. – On applique le Lemme 8.11 (reporté à la fin de cette section) à la donnée du  $F_0$ -affinoïde  $X = B/F_0$ , la série  $g$ ,  $x_0 = w$ , et  $s = \beta$ . Il nous fournit un ouvert  $F_0$ -affinoïde  $\Omega$  de  $B$  contenant  $x_0$ , tel que le polygone de Newton de chacune des évaluations  $g(x, T)$ ,  $x \in \Omega(\mathbb{C}_p)$ , ait même partie de pente  $\leq s$  que  $g(w, T)$ . Cette propriété vaut donc encore pour toute boule  $F_0$ -affinoïde  $B(w, r)$  assez petite incluse dans  $\Omega$  ; on fixe un tel  $r \in |F_0|$  avec cette propriété. La

Proposition 5.4.1 de [22] s'applique à  $K = F$ ,  $X = B(w, r)/F$ , à la série  $g$  et nous fournit la décomposition désirée. Il suffit en effet de prendre pour  $P$  l'unique  $P_i$  de la proposition loc. cit. admettant la pente  $\beta$ , et pour  $Q$  le produit des autres  $P_i$  avec le  $S$  loc. cit.  $\square$

Nous sommes finalement en mesure de démontrer le :

LEMME 8.9. – *Quitte à diminuer  $r$ ,  $S \widehat{\otimes}_{A(B/F_0)} A(B(w, r))$  admet un sous- $A(B(w, r))$ -module  $\mathcal{M}$  facteur direct topologique, tel que :*

- (i)  $\mathcal{M}$  est projectif de rang fini sur  $A(B(w, r))$ .
- (ii)  $\mathcal{M}$  est stable sous l'action des opérateurs de Hecke, et  $U_p$  y agit par un inversible.
- (iii) Pour tout  $x \in B(w, r)(\mathbb{C}_p)$ ,  $\mathcal{M}_x$  est le plus grand sous-espace de  $S_x$  sur lequel  $U_p$ ,  $U_1$  et  $U_2$  n'ont que des valeurs propres de valuation  $\beta$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  respectivement.

*Preuve.* – Appliquons les Théorèmes A.4.3 et A.4.5 de [27] à l'endomorphisme compact  $\widetilde{U}_p$  du  $A(B(w, r))$ -module de Banach orthonormalisable

$$\left( (M \widehat{\otimes}_{A(B/F_0)} A(B(w, r))) \otimes_{F_0} J^*(F_0) \right)^h,$$

ainsi qu'à la factorisation  $g|_{A(B(w, r))} = PQ$  donnée par les points (a) et (b) du Lemme 8.8. On en déduit qu'il existe une décomposition en somme directe de sous- $A(B(w, r))[U_p]$ -modules fermés

$$(M \widehat{\otimes}_{A(B)} A(B(w, r)) \otimes_{F_0} J^*(F_0))^h = M_1 \oplus M_2,$$

tels que :

- (a')  $M_1$  est projectif de rang fini  $\deg(P)$ ,  $\det(1 - T\widetilde{U}_{p|M_1}) = P(T)$ .
- (b') Si  $P^*(T) = T^{\deg(P)}P(1/T)$ , alors  $P^*(\widetilde{U}_p)_{|M_2}$  est inversible.

L'assertion (a') assure que  $\widetilde{U}_p$  est inversible sur  $M_1$ , et donc que  $M_1 \subset S \widehat{\otimes}_{A(B/F_0)} A(B(w, r))$  et sur ce dernier  $\widetilde{U}_p$  coïncide avec  $U_p$ . De plus, (a') et (b') montrent que  $M_1 = \text{Ker}(P^*(U_p))$ , il est donc stable par  $\mathcal{H}$ . Le  $A(B(w, r))$ -module  $M_1$  remplit donc les conditions (i) et (ii) de l'énoncé, mais pas tout à fait (iii).

Soit  $g' := \det(1 - TU_{1|M_1})$  ; il est de degré  $\deg(P)$  car  $U_1 U_2 = U_p$  est inversible restreint à  $M_1$ . En réutilisant le Lemme 8.11, il vient que quitte à diminuer  $r$ , on peut supposer que les polygones de Newton des polynômes  $g'(x, T)$ ,  $x \in B(w, r)(\mathbb{C}_p)$ , sont tous égaux. Dans ce cas, [22, Proposition 5.4.1] s'applique et nous fournit une décomposition  $g' = RR' \in A(B(w, r))[T]$ , avec  $R \in 1 + TA(B(w, r))[T]$  correspondant à la pente  $\beta_1$ , et  $(R, R') = 1$ . Une relation de Bezout entre  $R$  et  $R'$  nous donne un élément  $e \in A(B(w, r))[U_1]$  idempotent avec la propriété que  $\det(1 - TU_{1|eM_1}) = R$ . De plus,  $eM_1$  est encore  $\mathcal{H}$ -stable, et projectif de rang fini. Le  $A(B(w, r))$ -module  $\mathcal{M} := eM_1$  satisfait donc encore à (i) et (ii). Soit  $x \in B(w, r)(\mathbb{C}_p)$  ; les propriétés (a') et le Lemme 8.8(c) assurent que  $U_p$  n'admet que des valeurs propres de valuation  $\beta$  sur  $M_x \supset \mathcal{M}_x$ . De même, le choix de  $R$  montre que  $\mathcal{M}_x$  est le plus grand sous  $\mathbb{C}_p$ -espace de  $M_x$  sur lequel  $U_1$  n'admet que des valeurs propres de valuation  $\beta_1$ . L'assertion sur  $U_2$  découle de ce que  $U_p = U_1 U_2$ , ce qui conclut (iii).  $\square$

**8.2.14.** Nous en venons (enfin !) à la preuve proprement dite de la Proposition 8.1. Nous renvoyons à [22], §6.2.3 pour plus de détails. On reconsidère le  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A(B(w, r))$ -module  $\mathcal{M}$  donné par le Lemme 8.9, qui est projectif de rang fini sur  $A(B(w, r))$ .

L'image de  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A(B(w, r))$  dans  $\text{End}_{A(B(w, r))}(\mathcal{M})$ , munie de la norme induite par ce dernier, est une sous- $A(B(w, r))$ -algèbre de Banach commutative finie. Elle est donc  $F$ -affinoïde, pour un certain  $F$ -affinoïde que l'on note  $X$ . Par construction, on dispose d'un

morphisme fini  $\pi : X \rightarrow B(w, r)$ , déduit de l'inclusion  $A(B(w, r)) \subset A(X)$ , ainsi que d'une application canonique  $a : \mathcal{H} \rightarrow A(X)$ . L'image de  $a$  est constituée d'éléments de norme  $\leq 1$  d'après le Lemme 8.4(ii), et donc  $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$ .

Soit  $x \in B(w, r)(\mathbb{C}_p)$ ;  $m$  l'idéal maximal de  $A(B(w, r)) \widehat{\otimes}_F \mathbb{C}_p$  noyau de l'évaluation en  $x$ , [22, Lemme 6.2.5] assure que l'application canonique

$$(A(X) \widehat{\otimes}_F \mathbb{C}_p) / m(A(X) \widehat{\otimes}_F \mathbb{C}_p) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{M}_x)$$

est de noyau nilpotent. En particulier,

LEMME 8.10. – *L'application qui à  $z \in \pi^{-1}(\{x\})(\mathbb{C}_p)$  associe le caractère  $\chi_z : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}_p$  donné par l'évaluation en  $z$  induit une bijection sur l'ensemble des caractères  $\mathbb{C}_p$ -valués de  $\mathcal{H}$  apparaissant dans  $\mathcal{M}_x$ , comptés sans multiplicité.*

Montrons la première assertion de la propriété 8.1. Par le (ii) du Lemme 8.9,

$$a(U_p) = a(U_1)a(U_2)$$

est un inversible de  $\text{End}_{A(B(w, r))}(\mathcal{M})$ , et donc de  $A(X)$  par le théorème de Cayley–Hamilton. Cela montre que  $a([Iu_i I])$  est un inversible de  $A(X)$  si  $i = 1$  et  $2$ . C'est encore vrai pour  $i = 0$  et  $3$ , mais c'est trivial, car ils agissent sur  $S$  par l'identité. On peut en particulier définir les  $F_i$  comme dans l'énoncé. Pour conclure (i), il reste à voir que les applications  $x \in X(\mathbb{C}_p) \mapsto v(a([Iu_i](x)))$  sont constantes si  $i = 1, 2$ . Mais cela découle du Lemme 8.10 et de la propriété (iii) du Lemme 8.9. On a  $\alpha_i = \beta_i$ , si  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_3 = 0$ .

Soit  $x = w' \in w + (p - 1)\mathbb{Z}^{3,+}$ ; si  $w'$  est  $\alpha$ -régulier, on est exactement dans les hypothèses du Lemme 8.6 avec  $s = \alpha_1 + \alpha_2$ . L'assertion (iii) du Lemme 8.9 entraîne donc que

$$\mathcal{M}_x \subset S_{w'}^{cl} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{C}_p.$$

Comme on l'a vu en §8.2.10, cette inclusion commute à l'action de  $\mathcal{H}'$ , ainsi qu'à celle de  $A(p)$  si on la tord par  $\nu_{w'}$  sur  $S_{w'}^{cl} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{C}_p$ . Le Lemme 8.10 implique alors l'assertion (ii) de la Proposition 8.1.

D'après le Lemme 8.9(iii),  $f \in \mathcal{M}_w$ . Comme elle est propre pour  $\mathcal{H}$  par hypothèse, le Lemme 8.10 lui associe un unique point  $x_f \in X(\mathbb{C}_p)$ , ce qui définit ce dernier et montre l'assertion (iii).

Prouvons l'assertion (iv). Soit  $0 < r' < r \in |F|$ ; alors l'inclusion  $B(w, r') \hookrightarrow B(w, r)$  est compacte sur les algèbres affinoïdes, et a donc la propriété d'envoyer tout ensemble borné de  $A(B(w, r))$  dans un ensemble compact de  $A(B(w, r'))$ , d'après [56], Proposition 5. Le choix d'une quelconque surjection  $A(B(w, r))$ -linéaire stricte (cf. [15], 3.7.3, Corollaire 5)

$$A(B(w, r))^n \rightarrow A(X) \rightarrow 0$$

montre immédiatement que  $A(X) \rightarrow A(X) \widehat{\otimes}_{A(B(w, r))} A(B(w, r'))$  a encore la propriété énoncée ci-dessus. Notons que l'application canonique

$$A(X) \otimes_{A(B(w, r))} A(B(w, r')) \rightarrow \text{End}_{A(B(w, r'))}(\mathcal{M} \otimes_{A(B(w, r))} A(B(w, r')))$$

est injective par platitude de  $A(B(w, r)) \rightarrow A(B(w, r'))$  (cf. [15], 7.3.2, Corollaire 6). Ainsi, quitte à choisir au début du §8.2.14 un  $r$  strictement plus petit que celui choisi jusqu'à présent,



ce que l'on fait, on a montré que l'on peut supposer que  $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$  est à valeurs dans un ensemble compact de ce dernier, i.e. l'assertion (iv).

La première assertion de la propriété (v) de la Proposition 8.1 est une conséquence de [22, Lemme 6.2.10] et de ce que les algèbres affinoïdes sont des anneaux de Jacobson par [15], Chapitre 6, Proposition 3 (en particulier,  $X$  est Zariski-dense dans  $\text{Spec}(A(X))$ ). Pour la seconde assertion de (v), on applique le Lemme 6.2.5 loc. cit. à  $A = A(B(w, r))$ ,  $M = \mathcal{M}$ ,  $\mathfrak{h} = A(X)$ , et  $I$  l'idéal premier définissant le fermé de  $B(w, r)$  de l'énoncé. On en conclut que l'application canonique de  $A(X)/IA(X)$  vers son image dans  $\text{End}_{A(B(w, r))/I}(\mathcal{M}/I\mathcal{M})$  est un isomorphisme sur les spectres. L'assertion (v) s'en déduit en appliquant le Lemme 6.2.10 loc. cit. à cette  $A(B(w, r))/I$ -algèbre image.

Prouvons (vi). On rappelle (cf. 8.2.13) que  $F$  est un corps local contenant  $F_0$  et les  $\lambda_i$ , qu'il nous reste à fixer. En particulier,  $A(X)$  est défini sur  $F_0[\lambda_1, \lambda_2]$ , ainsi que  $\pi : X \rightarrow B(w, r)$ . Comme ce dernier est un morphisme fini, ses fibres sont de degré borné. Comme il n'existe qu'un nombre fini d'extensions finies de  $\mathbb{Q}_p$  de degré donné, on peut choisir le corps local  $F$  de façon à ce que  $\pi^{-1}(B(w, r)(F_0)) \subset X(F)$ , ce que l'on fait. Cela implique l'assertion (vi), et aussi que  $x_f \in X(F)$ .

Enfin, si  $X$  n'est pas réduit, on le remplace par sa nilréduction, ce qui n'affecte aucune des propriétés de l'énoncé de la Proposition 8.1.  $\square$

LEMME 8.11. – Soient  $F$  un corps local,  $X$  un  $F$ -affinoïde réduit, et  $g \in 1 + TA(X)\{\{T\}\}$  une fonction rigide-analytique sur  $X \times \mathbb{A}^1$ . On fixe  $s \in \mathbb{Q}$ ,  $x_0 \in X(F)$ , et on note  $\mathcal{P}$  la partie de pente  $\leq s$  du polygone de Newton de  $g(x_0, T) \in 1 + TF\{\{T\}\}$ .

Il existe un ouvert  $F$ -affinoïde  $\Omega \subset X$  contenant  $x_0$  tel que pour tout  $x \in \Omega(\mathbb{C}_p)$ , la partie de pente  $\leq s$  du polygone de Newton de  $g(x, T) \in 1 + TC_p\{\{T\}\}$  coïncide avec  $\mathcal{P}$ .

*Preuve.* – Soient  $s'' \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  la plus petite pente de  $g(x_0, T)$  strictement supérieure à  $s$ , et  $s' \in \mathbb{Q}$  tel que  $s' \in ]s, s''[$ . On écrit  $g = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$ ,  $a_n \in A(X)$ . Comme  $g$  converge sur  $X \times B(0, p^{-s'})$ , on a  $|a_n| p^{ns'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  dans  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall x \in X(\mathbb{C}_p)$ ,  $\forall n > N \in \mathbb{N}$ ,  $v(a_n(x)) \geq n(s + s')/2$ . Ainsi, pour tout  $x \in X(\mathbb{C}_p)$ , la partie de pente  $\leq s$  du polygone de Newton de  $g(x, T) \in 1 + TC_p\{\{T\}\}$  est de longueur  $\leq N$  (cf. figure ci-contre).

Soient  $N' > s$  un entier,  $\Omega$  l'ouvert  $F$ -affinoïde de  $X$  défini par les conditions :

- (i)  $\forall i \leq N$  tel que  $a_i(x_0) \neq 0$ ,  $|a_i/a_i(x_0) - 1| \leq 1/p$ ,
- (ii)  $\forall i \leq N$  tel que  $a_i(x_0) = 0$ ,  $|a_i| \leq p^{-iN'}$ .

Alors  $x_0 \in \Omega(F)$  et  $\Omega$  convient.  $\square$

### 8.3. Pseudo-caractères galoisiens

**8.3.1.** On se replace dans les hypothèses du paragraphe précédent. Fixons  $x \in X(F)$  un point classique, et  $f \in S_{\pi(x)}^{cl} \otimes_{F_0} F$  un vecteur de caractère  $\chi_x$  sous  $\mathcal{H}$ . On peut considérer un constituant irréductible  $\Pi$  de la représentation automorphe de  $U(3)$  engendrée par  $f$ ;  $\Pi_l$  est alors déterminée par  $\chi$  pour tout  $l$  premier ne divisant pas  $N$ . En particulier, la représentation galoisienne  $p$ -adique continue semi-simple associée à  $\Pi$  dans 3.2.2, que nous noterons disons  $V(x)$ , ne dépend que de  $x$  et pas du  $\Pi$  choisi, par le théorème de Cebotarev. Soit  $T(x) : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow F$  la trace de cette représentation; elle est continue et la détermine. Si  $v$  est une place finie décomposée de  $E$ , divisant un premier  $l \in \mathbb{Z}$ , on identifie  $G(\mathbb{Q}_l)$  avec  $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_l)$  au moyen de l'isomorphisme  $\mathbb{Q}_l \rightarrow E_l$ . D'après §3.2.2 (3) et 5.2.1, si  $l$  ne divise pas  $Np$ , on a la relation :

$$(15) \quad T(x)(\text{Frob}_v) = l^{-1} a([\text{GL}_3(\mathbb{Z}_l) \text{diag}(1, 1, l) \text{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x).$$

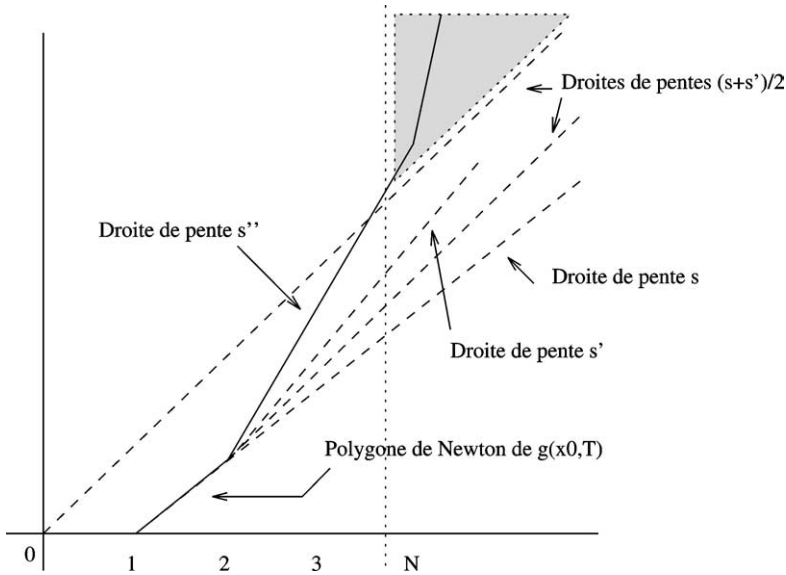


Fig. 3. Illustration de la preuve du lemme 8.11.

Si  $T : E \rightarrow A(X)$  est une application d'un ensemble  $E$  à valeurs dans  $A(X)$ ,  $x \in X(F)$ , on notera  $T_x$  la composition de  $T$  par l'évaluation en  $x$ . On renvoie en 7.2.1 pour les généralités sur les pseudo-caractères.

**COROLLAIRE 8.5.** – *Il existe un unique pseudo-caractère continu de dimension 3,*

$$T : \text{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \rightarrow A(X)$$

tel que pour tout  $x \in X(F)$  classique,  $T_x = T(x)$ . Il satisfait  $\forall g \in G, T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$ .

*Preuve.* – Nous allons appliquer [22, Proposition 7.1.1]. L'espace rigide est l'affinoïde  $X$ ,  $\Gamma := \text{Gal}(\overline{E}/E)$ ,  $S'$  est l'ensemble des places finies de  $E$  décomposées sur  $\mathbb{Q}$  ne divisant pas  $Np$ , et si  $v \in S'$  divise  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $F_v := \text{Frob}_v$  et  $a_v := l^{-1}a([\text{GL}_3(\mathbb{Z}_l) \text{diag}(1, 1, l) \text{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])$ , où l'on a identifié  $G(\mathbb{Q}_l)$  avec  $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_l)$  via l'isomorphisme  $\mathbb{Q}_l \rightarrow E_v$ .

Notons que  $X$  étant affinoïde, la topologie de  $\mathcal{O}_X^{\text{rig}}(X) = A(X)$  utilisée loc. cit. est simplement la topologie d'algèbre de Banach de  $A(X)$  (prendre  $\Omega = X$ ). La réunion des classes de conjugaison des  $F_v$  avec  $v \in S'$  est dense dans  $\Gamma$  par le théorème de Cebotarev. Soient  $n = 3$ ,  $Z$  l'ensemble des points classiques de  $X$  (cf. 8.2.3),  $\rho(z) := V(z)$  défini dans §8.3.1 ; alors le Lemme 8.1 et la formule (15) assurent que l'hypothèse (H) loc. cit. est satisfaite. On en déduit l'existence de  $T : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow A(X)$  satisfaisant la première assertion du corollaire.

Si  $g \in G$ , la relation  $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$  se vérifie sur un ensemble Zariski-dense car  $X$  est réduit. Mais si  $x \in Z$ , nous venons de montrer que  $T_x$  est la trace de  $V(x)$  qui satisfait  $V(x)^\perp \simeq V(x)$  par §3.2.2, ce qui conclut la seconde assertion du corollaire.  $\square$

**8.3.2.** Nous aurons besoin d'un dernier fait,

**PROPOSITION 8.2.** – *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in X(F)$  classique, si  $\delta(\pi(x)) > C$  alors  $V(x)$  est cristalline. En particulier ces points sont Zariski-denses.*

*Preuve.* – Soit  $x \in X(F)$  classique ; on choisit  $f \in S_{\pi(x)}^{cl} \otimes_{F_0} F$  comme en §8.3.1, ainsi que  $\Pi$ . On sait que  $\Pi_p$  est engendrée par ses  $I$ -invariants, c'est donc un sous-quotient d'une induite

complète du Borel  $\text{Ind}_B(\psi)$  pour un certain  $\psi$  comme dans 5.2.1 (cf. [21], Proposition 2.6). Pour voir que  $V(x)$  est cristalline il suffit de montrer que  $\Pi_p$  est non ramifiée d’après la proposition 3.3, ou mieux que  $\text{Ind}_B(\psi)$  est irréductible. Or on sait que ceci se produit dès que  $\forall i \neq j, \psi_i(p)/\psi_j(p) \neq p$  ([64], 4.2). Il se trouve que si  $\pi_i(x) = (k_1, k_2, k_3)$ ,  $(a_1, a_2, a_3) := (-k_1 - 1, -k_2, -k_3 + 1)$  alors §6.2.4 montre que

$$p^{a_i} \iota(\psi_i(p)) = \frac{\chi_x(U_i^{\pi(x)})}{\chi_x(U_{i-1}^{\pi(x)})}.$$

La Proposition 8.1(i) conclut l’existence de  $C$ . La seconde assertion s’en déduit à la manière du Corollaire 8.1.  $\square$

**8.4. Déformations de  $\chi \oplus 1 \oplus \chi^\perp$**

**8.4.1.** On reprend les notations de 8.2.1, avec  $N := \text{cond}(\chi_0)$ ,  $K_f = \prod K_l$  où :

- Si  $l$  est premier à  $p \text{ cond}(\chi_0)$ ,  $K_l$  est le sous-groupe défini en 4.2.3, 4.3.2, 4.3.3 selon que  $l$  est décomposé, inerte ou ramifié.
- Si  $l$  divise  $\text{cond}(\chi_0)$ ,  $K_l$  est le sous-groupe  $K_J(l)$  défini en 4.2,  $J := \otimes_{l|N} (J(l) \otimes \chi_0 \circ \det)$  où  $J(l)$  est la représentation de  $K_J(l)$  définie aussi en 4.2.

On reconsidère la représentation automorphe  $\pi(\chi_0)$  de  $U(3)$ , et on fixe dans tout ce qui suit  $\sigma \in \{1, (2, 3), (1, 3, 2)\}$  accessible pour  $\pi(\chi_0)$  (cf. §6.2.3). On pose

$$w := \left( \frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1 \right) \in \mathbb{Z}^{3,+}.$$

On peut choisir un  $f \neq 0 \in \pi(\chi_0)^I \cap (S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p)$  propre pour  $\mathcal{H}$ , de caractère sous  $\mathcal{A}(p)$  correspondant à  $\sigma$  comme dans 6.2.3. On applique alors la Proposition 8.1 à ce  $f$ , puis le Corollaire 8.5 et la Proposition 8.2 aux conclusions de la Proposition 8.1, ce qui nous fournit un corps local  $F$ , un  $F$ -affinoïde  $X$ ,  $x_f \in X(F)$ ,  $B(w, r) \subset \mathbb{A}^3$ , un morphisme  $F$ -affinoïde fini  $\pi : X \rightarrow B(w, r)$ , un pseudo-caractère  $T$ , et  $C > 0$  comme dans ces propositions. On pose :

$$F_i := a([Iu_i I]) / a([Iu_{i-1} I]) \in A(X), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Les  $F_i$  sont des inversibles de  $A(X)$  d’après la Proposition 8.1(i).

**8.4.2.** Il sera commode de raisonner en terme des poids de Hodge–Tate des  $V(x)$  plutôt que de leurs “poids automorphes”  $\pi(x)$ . On définit à cet effet (cf. §6.2)  $\kappa : X \rightarrow B(\kappa(w), r)$  comme étant la composée de  $\pi$  avec  $(x, y, z) \rightarrow (-x - 1, -y, -z + 1)$ . Ainsi, si  $x \in X(F)$  est classique,  $V(x)$  est de Hodge–Tate de poids  $\kappa(x)$ . On pose

$$\kappa_0 := \kappa(w) = \left( -\frac{k+1}{2}, -\frac{k-1}{2}, 0 \right).$$

**8.4.3.** Quitte à prendre une extension finie de  $F$ , comme le précisera sa preuve, on a la

PROPOSITION 8.3. – *Il existe :*

- (a) *Un  $F$ -affinoïde  $Y$  intègre régulier de dimension 1,  $y_0 \in Y(F)$ .*
- (b) *Une représentation continue semi-simple*

$$\rho_{K(Y)} : \text{Gal}(\overline{E}/E)_{N_p} \rightarrow \text{GL}_3(K(Y))$$

*satisfaisant (ABS),  $\rho_{K(Y)}^\perp \simeq \rho_{K(Y)}$  et  $\text{tr}(\rho_{K(Y)}(\text{Gal}(\overline{E}/E))) \subset A(Y)$ .*

(c) *Un  $F$ -morphisme*

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) : Y \rightarrow \mathbb{A}^3, \kappa_3 := 0, \kappa(y_0) = \kappa_0.$$

(d) *Une partie  $Z \subset Y(F)$  telle que  $\kappa(Z) \subset \kappa_0 + (p - 1)\mathbb{Z}^{3,--}$ .*

(e) *Des fonctions  $F_1, F_2$  et  $F_3$  dans  $A(Y)$ , chacune de valuation constante sur  $X$ .*

(f) *Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_i \in F^*$  tel que  $|F_i/\lambda_i - 1| < 1$ .*

*Le tout satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout ouvert affinoïde  $\Omega$  de  $Y$  contenant  $y_0$ , la fonction*

$$x \in Z \mapsto \text{Min}(\kappa_2(x) - \kappa_1(x), \kappa_3(x) - \kappa_2(x)) \in \mathbb{N}$$

*est non majorée sur  $Z \cap \Omega$ , d'image incluse dans  $\mathbb{N}^{\geq \text{Max}(C, k)}$ . En particulier,  $Z \cap \Omega$  est Zariski-dense dans  $\Omega$ .*

(ii) *Si  $z \in Z \cup \{y_0\}$ ,  $\rho_z^{ss} := \rho_{K(Y), z}^{ss}$  (cf. 7.2.2) est la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe  $\pi$  irréductible de  $U(3)$  telle que  $\text{Hom}_{K_f}(J, \pi_f) \neq 0$ .*

(iii)  $\rho_{y_0}^{ss} \simeq 1 \oplus \chi_p \oplus \chi_p^\perp$ .

(iv) *Si  $z \in Z \cup \{y_0\}$ ,  $(\rho_z^{ss})|_{D_{v_1}}$  est cristalline de poids de Hodge–Tate  $\kappa(z)$ . Elle est raffinée par*

$$(p^{\kappa_1(z)} F_1(z), p^{\kappa_2(z)} F_2(z), p^{\kappa_3(z)} F_3(z)).$$

(v) *Ce raffinement est  $\mathcal{R}(\sigma)$  en  $y_0$ .*

*Preuve.* – Soit  $B \subset B(\kappa_0, r) \subset \mathbb{A}^3$ , le fermé affinoïde de  $B(\kappa_0, r)$  défini par  $x_3 = 0$ , et  $x_2 = 2x_1 + \frac{k-3}{2}$ . Alors  $\kappa_0 \in B(F)$ . On pose :

$$\mathcal{Z} := \{z \in B(F) \cap (\kappa_0 + (p - 1)\mathbb{Z}^{3,--}), -\delta(z) > \text{Max}(C, k, \alpha_1 + \alpha_2 - 1)\}.$$

Le choix de  $B$ , assez arbitraire, est tel que les fonctions  $x_2 - x_1$  et  $-x_2$  sont non bornées sur  $U \cap \mathcal{Z}$  pour tout  $U$  ouvert affinoïde de  $B$  contenant  $\kappa_0$ .

On considère  $X_B := X \times_{B(\kappa_0, r)} B$ ;  $c'$  est un  $F$ -affinoïde de dimension 1,  $x_f \in X_B(F)$ . Le morphisme déduit par extension des scalaires  $\kappa_B : X_B \rightarrow B$  est encore fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de  $X_B$  d'après la Proposition 8.1(v). On choisit alors  $X'$  une composante irréductible (réduite) de dimension 1 de  $X_B$  contenant  $x_f$ .

Le pseudo-caractère  $T$  peut être vu à valeurs dans  $A(X')$ , par composition

$$A(X) \rightarrow A(X_B) \rightarrow A(X'),$$

et on peut appliquer le Lemme 7.2 à la donnée de  $A(X')$  et  $T$ . Il nous fournit un  $F$ -affinoïde intègre  $Y$ , régulier de dimension 1, muni d'un morphisme fini et surjectif  $h : Y \rightarrow X'$ , ainsi qu'une représentation semi-simple  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_3(K(Y))$  de trace  $T$ , satisfaisant (ABS). Quitte à remplacer  $F$  par une extension finie, on peut choisir  $y_0 \in Y(F)$  tel que  $h(y_0) = x$ . Notant que  $T(g^{-1}) = T(\tau.g.\tau)$  d'après le Corollaire 8.5, on a prouvé (a) et (b).

On définit  $\kappa$  comme étant la composée  $Y \xrightarrow{h} X' \hookrightarrow X_B \xrightarrow{\kappa_B} B$ . Cela prouve (c). Notons que  $\kappa : Y \rightarrow B$  est fini et surjectif, car on a vu que  $h$  est  $X' \rightarrow B$  le sont. De plus,  $\kappa$  est plat, car  $c'$  est le cas des extensions finies d'anneaux de Dedekind. On pose  $\mathcal{Z} := \kappa^{-1}(\mathcal{Z})$ , il satisfait (d) par 8.4.2 et (i) par choix de  $\mathcal{Z}$  et platitude de  $\kappa$ .  $X'$  étant un fermé de  $X$ ; on peut y restreindre les  $F_i$  de 8.4.1, et les définir sur  $Y$  en les composant au morphisme  $h : Y \rightarrow X'$ . Ce sont ces

derniers que l'on choisit pour (e), l'assertion sur les valuations des  $F_i$  est déjà satisfaite sur  $X$  par construction (cf. Proposition 8.1(i)), ainsi que (f).

Soit  $z \in Z \cup \{y_0\}$ ;  $\rho_{K(Y),z}^{ss}$  est la représentation semi-simple de  $\text{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$  de trace  $T_z = T_{h(z)}$  (cf. 7.2.3, Corollaire 8.5). Par choix de  $Z$  et 8.1(iii),  $h(z) \in X(F)$  est un point classique, et l'assertion (ii) découle donc de 8.3.1 et Corollaire 8.5. On déduit alors (iii) de (ii), 8.1(iii) et du choix de  $f$  dans 8.4.1.

La première assertion de (iv) est alors une conséquence de (ii), 6.2.2, 8.4.2, ainsi que 8.3.2 et le fait que  $\text{Min}(\kappa_2(z) - \kappa_1(z), \kappa_3(z) - \kappa_2(z)) > C$  par (i). La seconde assertion, ainsi que (v), découlent de 6.2.3 et 6.1.2.

Enfin, quitte à remplacer  $Y$  par un ouvert  $F$ -affinoïde de ce dernier contenant  $y_0$ , ce qui n'affecte aucune des propriétés de l'énoncé, on peut supposer que (f) est satisfaite.  $\square$

*Remarques.* – On rappelle que toute la construction ci-dessus dépend du choix initial du  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$  accessible pour  $\pi(\chi_0)$ . Ceci fait, le second choix réellement effectué dans la construction ci-dessus est celui de la composante irréductible  $X'$  de  $X'_B$  passant par  $x_f$ . Il semble difficile d'évaluer le nombre de composantes irréductibles de  $X$  (ou de  $X_B$ ) au voisinage de  $x$ . En ce qui concerne ce texte, chaque choix de composante permet de conclure dans la section 9.

### 9. Construction de l'extension

On reprend les notations de la Proposition 8.3, où l'on a fixé  $\sigma = (2, 3)$ .

#### 9.1. Irréductibilité générique

PROPOSITION 9.1. –  $\rho_{K(Y)}$  est absolument irréductible.

*Preuve.* – D'après la Proposition 8.3(b),  $\rho_{K(Y)}$  vérifie la propriété (ABS) (voir 7.1.1). Il suffit donc de montrer que  $\rho_{K(Y)}$  est irréductible. Supposons par l'absurde que  $\rho_{K(Y)} \simeq \rho_{1,K(Y)} \oplus \rho_{2,K(Y)}$ ,  $\rho_{i,K(Y)}$  étant une  $K(Y)$ -représentation de  $G$  de dimension  $\neq 0$ . Le Lemme 7.1(ii) montre que  $\text{tr}(\pi_i(G)) \subset A(Y)$ , car  $A(Y)$  est régulier d'après 8.3(a). Soit  $z \in Z$ , l'évaluation en  $z$  de  $\text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(\rho_1(g)) + \text{tr}(\rho_2(g))$ ,  $g \in \text{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$  a un sens et montre que  $\rho_z^{ss}$  est réductible (cf. 7.2.2). Nous allons montrer que c'est absurde par notre choix du raffinement.

D'après 8.3(e),  $v(F_i(\cdot)) : X(F) \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto v(F_i(x))$  est constante, on la note  $\alpha_i$ . En évaluant en  $y_0$ , 8.3(iv), (v) ainsi que 5.2.4 appliqué à  $(3, 2)$  montrent que :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( 1, \frac{k-1}{2}, -\frac{k+1}{2} \right).$$

Notons qu'avec ce choix,  $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \alpha_i \neq 0$  et  $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$ . De plus, si  $i \neq j$ ,  $|\alpha_i| < k$  et  $|\alpha_i + \alpha_j| < k$ .

D'après 8.3(iv),  $\rho_z^{ss}$  est cristalline de poids de Hodge–Tate  $k_i := \kappa_i(z)$ , avec  $k_1 < k_2 < k_3$ , et les valeurs propres de son Frobenius cristallin ont pour valuation  $k_1 + \alpha_1, k_2 + \alpha_2$  et  $k_3 + \alpha_3$ . Pour voir que  $\rho_z^{ss}$  est irréductible, il suffit de voir que  $D := D_{\text{cris}}(\rho_z^{ss})$  n'admet pas de sous-module filtré faiblement admissible. Si  $D'$  est un tel sous-module de rang 1, alors par faible admissibilité  $t_H(D') = t_N(D')$  (cf. loc. cit.) entraîne  $k_i = k_j + \alpha_j$  pour un couple  $(i, j)$ . Mais par 8.3(i),  $|k_i - k_j| > k$ , les inégalités sur les  $\alpha_i$  entraînent donc  $i = j$  puis  $\alpha_i = 0$ , ce qui est absurde. De même, si  $D'$  est un sous-module filtré faiblement admissible de rang 2 de  $D$ , on arrive à une contradiction en résolvant  $k_{i'} + k_{j'} = k_i + k_j + \alpha_i + \alpha_j$ .  $\square$

*Remarques.* – Cette preuve montre en fait que  $\rho_{K(Y)}|_{D_{v_1}}$  est irréductible. Notons de plus que l’argument d’irréductibilité étant local en  $p$ , il n’utilise pas le fait que les représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes stables tempérées sont globalement irréductibles, mais simplement la Proposition 3.3. Le point clé est que nous disposons d’un  $\sigma$  accessible tel que le raffinement  $\mathcal{R}(\sigma)$  est aussi éloigné que possible du raffinement ordinaire au point  $y_0$ .

**9.2. L’inertie aux places ne divisant pas  $p$**

**9.2.1.** Nous allons préciser l’action de l’inertie aux places de  $E$  ne divisant pas  $p$ . Pour énoncer commodément nos résultats, on introduit

$$\rho'_{K(Y)} := \rho_{K(Y)} \otimes_F (\chi_p^\perp)^{-1}.$$

- PROPOSITION 9.2. – *Soit  $w$  une place de  $E$  au-dessus de  $l \neq p$ . Alors*
- *Si  $w$  ne divise pas  $\text{cond}(\chi_0)$ ,  $\rho_{K(Y)}$  et  $\rho'_{K(Y)}$  sont non ramifiées en  $w$ .*
  - *Si  $w$  divise  $\text{cond}(\chi_0)$ , on a*

$$\dim_{K(Y)}(\rho'_{K(Y)})^{I_w} = 2.$$

Le reste de la sous-section est consacré à la preuve de cette proposition. D’après 8.3(a), (b) et le Lemme 7.1(iv) appliqué en l’idéal maximal de  $y_0$ , on peut trouver  $g \in A(Y)$  avec  $g(y_0) \neq 0$ , tel que  $\rho_{K(Y)}$  admette un  $A(Y)_g$ -réseau stable. On note  $\rho$  la représentation de  $G$  définie par ce réseau,  $S$  l’ensemble fini des zéros de  $g$ , et pour  $y \in Y \setminus S$ ,  $\rho_y$  la réduction de  $\rho$  en  $y$ .

Remarquons que  $\rho_y$  est bien définie à isomorphisme près, et non plus seulement à semi-simplification près. De plus,  $\rho_{K(Y)}$  étant semi-simple,  $\rho_z$  l’est aussi pour un sous-ensemble infini de  $Z \cap (Y \setminus S)$ , que l’on note  $Z'$ . Enfin, si  $z \in Z'$ , alors  $\rho_z^{ss} \simeq \rho_z$  est par 8.3(ii) la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe notée  $\Pi(z)$  de  $U(3)$ , comme en 8.3.1.

**9.2.2. Le cas  $w$  ne divisant pas  $\text{cond}(\chi_0)$ .** Il suffit de montrer que les  $\rho_z$  sont non ramifiées pour  $z \in Z'$ . Par construction (cf. 8.4.1),  $\Pi(z)$  a un vecteur fixe par le compact maximal  $K_l$ . Si  $l$  est non ramifié dans  $E$ ,  $K_l$  est hyperspécial (4.2.3, 4.3.2) et  $\Pi(z)$  est non ramifié, si bien que la représentation galoisienne  $\rho_z$  associée l’est aussi, d’après la propriété (3) §3.2.3. Si  $l$  est ramifié,  $K_l$  est le groupe défini en 4.3.3. D’après le Lemme 4.1, le changement de base  $\pi_E$  est non ramifié, et on en déduit encore que  $\rho_z$  est non ramifiée, cette fois d’après la Proposition 3.1.

**9.2.3. Le cas  $w$  divisant  $\text{cond}(\chi_0)$ .** Par construction (cf. 8.4.1), on a

$$\text{Hom}_{K_J(l)}(J(l), (\Pi(z) \otimes (\chi_0 \circ \det)^{-1})_l) \neq 0.$$

D’après 4.2, il existe un sous-groupe ouvert  $I'_w$  de  $I_w$  tel que pour tout  $z \in Z'$  on a  $\rho'_z(I'_w) = 1$ . On en tire  $\rho'_{K(Y)}(I'_w) = 1$ .

Notons que pour démontrer la proposition, il suffit de le faire après une extension finie de  $K(Y)$ . Mais il existe une extension finie  $F'/F$  telle que la représentation  $\rho'_{K(Y)}|_{I'_w}$ , qui se factorise par le groupe fini  $I_w/I'_w$ , soit définie sur  $F'$ . Autrement dit, si  $L$  est une extension composée de  $K(Y)$  et  $F'$  et  $\rho'_L := \rho'_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$ , alors  $\rho'_L|_{I'_w}$  est isomorphe à  $\theta \otimes_{F'} L$ , où  $\theta$  est une représentation de  $I_w$  sur  $F'$  triviale sur  $I'_w$ . Comme  $\theta$  est nécessairement semi-simple, on en déduit par évaluation des traces en  $y_0$  que  $(\rho'_{I'_w})^{ss}_{y_0} \simeq \theta$ . En particulier, d’après 8.3 point (iii) :

$$\theta \simeq 1 \oplus 1 \oplus ((\chi_p^\perp)^{-1})|_{I'_w}.$$

La proposition en découle.

### 9.3. Application des méthodes à la Ribet et Kisin

Dans ce paragraphe on tire les fruits de la variante du lemme de Ribet démontré dans la Proposition 7.1, et la Proposition 6.1 “à la Kisin”. Introduisons encore quelques notations : on pose

$$u := \chi^\perp(\text{Frob}_{v_1}).$$

Notons alors qu'on a  $\chi(\text{Frob}_{v_1}) = up^{-1}$ . Notons  $D_{\text{cris},v_1}$  le foncteur

$$D_{\text{cris},v_1}(V) := D_{\text{cris}}(V|_{D_{v_1}}).$$

Il est exact à gauche. L'action du Frobenius cristallin  $\varphi$  sur les droites  $D_{\text{cris},v_1}(\chi_p^\perp)$ ,  $D_{\text{cris},v_1}(\chi_p)$  et  $D_{\text{cris},v_1}(1)$  est la multiplication respectivement par  $u$ ,  $up^{-1}$  et 1 (cf. §2.6). Ces trois nombres sont deux à deux distincts, puisque leur valuations (respectivement  $-(k-1)/2$ ,  $-(k+1)/2$  et 0) le sont.

PROPOSITION 9.3. – *Il existe une représentation continue  $\bar{\rho} : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}_3(F)$  vérifiant*

(i) *Pour toute place  $w$  de  $E$  ne divisant pas  $p$  on a*

$$(16) \quad \dim_F(\bar{\rho} \otimes (\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w} \geq 2 \quad \text{si } w \mid \text{disc}(\chi_0),$$

$$(17) \quad \dim_F(\bar{\rho} \otimes (\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w} = 3 \quad \text{si } w \nmid \text{disc}(\chi_0).$$

(ii)  *$D_{\text{cris},v_1}(\bar{\rho})^{\phi=u}$  est non nul.*

(iii) *On a  $\bar{\rho}^{ss} \simeq \chi_p \oplus \chi_p^\perp \oplus 1$ . Une des deux assertions suivantes est vraie :*

(a) *Soit  $\bar{\rho}$  admet un sous-quotient  $r$  de dimension 2, vérifiant  $r \simeq r^\perp$  et tel que  $r$  est une extension non triviale de  $\chi_p^\perp$  par  $\chi_p$ .*

(b) *Soit  $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}^\perp$  ;  $\bar{\rho}$  admet une unique sous-représentation  $r_1$  de dimension 2 et un unique sous-quotient  $r_2$  de dimension 2, avec  $r_1$  extension non triviale de 1 par  $\chi_p$ ,  $r_2$  extension non triviale de  $\chi_p^\perp$  par 1, et  $r_1 \simeq r_2^\perp$ .*

*Preuve.* – Notons  $\mathcal{O}$  l'anneau local rigide de  $Y$  en  $y_0$ ,  $L$  le corps des fractions de cet anneau, et  $\rho_L := \rho_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$ . L'anneau  $\mathcal{O}$  est de valuation discrète, de corps résiduel  $F$ . La représentation  $\rho_L$  est irréductible d'après la Proposition 9.1.

D'après la Proposition 8.3(iii),  $\bar{\rho}^{ss}$  est la somme de trois caractères,  $\chi_p$ ,  $\chi_p^\perp$  et 1. Ces trois caractères sont deux à deux distincts (ils n'ont pas les mêmes poids) et on est donc en mesure d'appliquer la Proposition 7.1 à  $\rho_L$ . Cette proposition affirme précisément l'existence d'un  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda \subset L^3$  stable par  $\rho_L$ , tel que la représentation réduite associée  $\bar{\rho} := \bar{\rho}_{L,\Lambda}$  vérifie soit la condition (iii(a)) soit la condition (iii(b)) de 9.3.  $\mathcal{O}$  étant de valuation discrète, il résulte immédiatement de la Proposition 9.2 que  $\bar{\rho}$  vérifie la propriété (ii).

Nous allons montrer que  $\bar{\rho}$  vérifie (ii). Le Lemme 7.3 appliqué à  $\rho_L$  à  $y_0$  et à la classe d'homothéties  $s$  du réseau  $\Lambda$  donne l'existence d'un ouvert affinoïde  $\Omega \subset Y$  contenant  $y_0$ , telle que la représentation  $\rho_L$  admet un  $A(\Omega)$ -réseau stable  $M$  ; notant  $\rho$  la représentation  $\text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}(M)$ , le Lemme 7.3 assure que  $\rho_{y_0} \simeq \bar{\rho}$ .  $\bar{\rho}$  est continue d'après le Corollaire 7.1.

Nous allons maintenant appliquer la Proposition 6.1 à la donnée de  $\rho|_{D_{v_1}} : D_{v_1} \rightarrow \text{GL}_3(A(\Omega))$ , de  $\kappa|_\Omega$  et des  $F_i|_\Omega$  (cf. §6.3.2). On choisit pour ensemble noté  $Z$  loc. cit. l'ensemble  $Z \cap \Omega$  auquel on enlève le sous-ensemble des  $z$  tels que  $\rho_z$  n'est pas semi-simple. Ce dernier est fini car  $\rho_{K(\Omega)}$  est semi-simple. La Proposition 8.3 assure que les hypothèses (i) à (vi) de 6.3.2 de la Proposition 6.1 sont vérifiées, (iii) par notre choix de  $Z$ . On voit donc que

$$D_{\text{cris},v_1}(\rho_{y_0})^{\phi=F_1(y_0)p^{\kappa_1(y_0)}} \text{ est non nul,}$$

où  $\kappa_1$  et  $F_1$  sont ceux donnés par la Proposition 8.3. D’après les points (iv) et (v) de 8.3,  $p^{\kappa_1(y_0)}F_1(y_0)$  est la première valeur propre du raffinement  $\mathcal{R}((3, 2))$  de  $\rho_{y_0|D_{v_1}}$ , donc d’après 5.2.4,  $p^{\kappa_1(y_0)}F(y_0) = \chi^\perp(p) = u$ , ce qui prouve (ii).  $\square$

**9.4. Élimination du cas (a)**

Nous voulons montrer, par l’absurde, que l’on n’est pas dans le cas (iii(a)) de la proposition précédente. On se place donc dans ce cas. La représentation  $\bar{\rho}$  admet comme sous-quotient une extension non triviale  $r$  de  $\chi_p^\perp$  par  $\chi_p$ . Par conséquent,  $\bar{\rho}' := \bar{\rho} \otimes (\chi_p^\perp)^{-1}$  contient comme sous-quotient  $r' := r \otimes (\chi_p^\perp)^{-1}$ , extension non triviale de  $F$  (la représentation triviale sur  $F$ ) par  $F(1)$  (le caractère cyclotomique sur  $F$ ).

LEMME 9.1. – *La représentation  $r'$  est cristalline en  $v_1$  et en  $v_2$ .*

*Preuve.* – Il suffit de le prouver pour  $r$ , car  $\chi_p^\perp$  est cristallin en  $v_1$  et  $v_2$ ,  $\chi^\perp$  étant non ramifié en ces places. De plus, comme  $r \simeq r^\perp$ , il suffit de le prouver en  $v_1$ . Comme  $D_{\text{cris}, v_1}$  est exact à gauche, ainsi que le foncteur  $V \mapsto D_{\text{cris}, v_1}(V)^{\phi=u}$ , on voit que

$$\dim_F D_{\text{cris}, v_1}(\bar{\rho})^{\phi=u} \leq \dim_F D_{\text{cris}, v_1}(r)^{\phi=u} + \dim_F D_{\text{cris}, v_1}(1)^{\phi=u}.$$

Comme  $D_{\text{cris}, v_1}(1)^{\phi=u} = 0$  car  $u \neq 1$ , il résulte de la Proposition 9.3(ii) que  $D_{\text{cris}, v_1}(r)^{\phi=u}$  est non nul.

Utilisant encore que  $D_{\text{cris}, v_1}$  est exact à gauche il vient

$$D_{\text{cris}, v_1}(\chi_p) \subset D_{\text{cris}, v_1}(r)$$

et il y a donc dans  $D_{\text{cris}, v_1}(r)$  deux droites sur lesquelles  $\varphi$  agit par  $u$  et par  $up^{-1}$  ce qui implique qu’elles sont distinctes. On en déduit que  $\dim_F D_{\text{cris}, v_1}(r) = 2$ , i.e.  $r$  est cristalline en  $v_1$ .  $\square$

LEMME 9.2. – *La représentation  $r'$  est non ramifiée en toutes les places  $w$  ne divisant pas  $p$ .*

*Preuve.* – Si  $w$  ne divise pas  $\text{cond}(\chi_0)$ ,  $\bar{\rho}'$  est non ramifiée en  $w$  d’après (ii), et  $r'$  non plus. Si  $w$  divise  $\text{cond}(\chi_0)$ , l’exactitude à gauche du foncteur des invariants sous  $I_w$  donne

$$\dim_F (\bar{\rho}')^{I_w} \leq \dim_F r'^{I_w} + \dim_F ((\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w}.$$

Comme  $((\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w} = 0$ , il découle de (i) que  $r'$  est non ramifié.  $\square$

L’existence de  $r'$  est alors en contradiction avec le lemme bien connu suivant,

LEMME 9.3. – *Soient  $E$  un corps quadratique imaginaire,  $F/\mathbb{Q}_p$  un corps local; alors il n’existe pas d’extension non triviale de représentations continues de  $\text{Gal}(\bar{E}/E)$  de  $F$  par  $F(1)$  qui soit non ramifiée hors de  $p$  et cristalline en les places divisant  $p$ .*

*Preuve.* – Soit  $r$  une extension non triviale comme dans le lemme, vue comme  $\mathbb{Q}_p$ -représentation. Elle contient en particulier comme sous-quotient une  $\mathbb{Q}_p$ -représentation  $r'$  continue, extension non triviale de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(1)$ .  $r'$  est non ramifiée hors de  $p$  et cristalline en  $p$  car  $r$  l’est. Mais par la théorie de Kummer, le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des classes de telles extensions a pour dimension le rang de  $\mathcal{O}_E^*$ . Ce dernier groupe est fini si  $E$  est quadratique imaginaire.  $\square$

Remarque 9.1. – Dans le lemme précédent, il est essentiel que les extensions considérées soient non ramifiées (resp. cristallines) à toutes les places. Si on relâche la condition à une place quelconque, de telles extensions non triviales existent. Par ailleurs il est essentiel que le corps de



base  $E$  soit quadratique imaginaire. Pour tout autre corps, à part  $\mathbb{Q}$ , l'énoncé précédent serait mis en défaut : on construirait par la théorie de Kummer une extension non triviale, en partant d'une unité de  $E$  qui n'est pas racine de 1. En fait, l'énoncé précédent correspond, par les conjectures de Bloch-Kato, au fait que la fonction  $\zeta$  du corps  $E$  ne s'annule pas en  $s = 0$ . Comme on le sait, ceci n'est vrai que pour  $E$  quadratique imaginaire ou  $\mathbb{Q}$ . C'est ici, et ici seulement à part la formule de multiplicité de la Proposition 4.1, que l'on utilise dans ce papier l'hypothèse que  $E$  est quadratique imaginaire. Tout le reste marcherait tout aussi bien en travaillant avec  $E/F$  extension  $CM$ , et le groupe unitaire  $U(3)$  compact à toutes les places à l'infini sur  $F$ . Dans ce cadre, la preuve de 4.1 montre que l'analogie de la représentation automorphe  $\pi(\chi_0)$  existe si et seulement si  $\varepsilon = (-1)^{\dim_{\mathbb{Q}} F}$ . En particulier, si  $\dim F$  est pair, on peut avoir  $L(\chi_0, 1/2) \neq 0$ , et on ne s'attend alors pas à ce qu'une extension de 1 par  $\chi_p$  cristalline existe. On voit que dans ce cas, c'est un élément non trivial de  $H_f^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \mathbb{Q}_p(1))$  qu'aurait construit notre méthode.

### 9.5. Fin de la preuve

On est donc dans le cas (b) de la proposition.

LEMME 9.4. –  $r_1$  et  $r_2$  sont cristallines en  $v_1$  et en  $v_2$ .

*Preuve.* – Comme  $r_1 \simeq r_2^{\frac{1}{2}}$ , la cristallinité de  $r_1$  en  $v_2$  (resp.  $v_1$ ) équivaut à celle de  $r_2$  en  $v_1$  (resp.  $v_2$ ). Il suffit donc de prouver que  $r_1$  et  $r_2$  sont cristallines en  $v_1$ .

Prouvons d'abord que  $r_2$  est cristalline en  $v_2$ . En raisonnant comme dans la preuve du Lemme 9.1, on voit à l'aide du point (ii) de la Proposition 9.3 que  $D_{\text{cris}, v_1}(r_2)$  contient une droite sur laquelle  $\phi = u$ . Par ailleurs, par exactitude à gauche,  $D_{\text{cris}, v_1}(r_2)$  contient la droite  $D_{\text{cris}, v_1}(1)$  sur laquelle on a  $\phi = 0$ , ce qui prouve la cristallinité de  $r_2$ .

En ce qui concerne  $r_1$ , extension non triviale de 1 par  $\chi_p$ , on observe que les poids de Hodge-Tate en  $v_1$  de  $\chi_p$  et 1 sont respectivement  $-(k+1)/2$  et 0, avec  $-(k+1)/2 \leq -2 = 0 - 2$  car  $k$  est impair et  $> 1$ . Une telle extension est automatiquement cristalline d'après [47, Proposition 3.1].

*Variante :* Pour prouver la cristallinité de  $r_1$  en  $v_1$ , on peut aussi reprendre l'argument prouvant le point (ii) de la Proposition 9.3, en appliquant, au lieu de la Proposition 6.1, la remarque finale du §6.3.8. On obtient ainsi que

$$D_{\text{cris}, v_1}(\bar{\rho}^*)^{\phi=(up^{-1})^{-1}} \neq 0.$$

On montre alors en raisonnant comme pour  $r_2$  que  $r_1^*$  est cristalline en  $v_1$ , ce qui implique que  $r_1$  est cristalline en  $v_1$ . Cette variante a l'avantage de ne pas utiliser l'hypothèse  $k > 1$  à ce stade de la preuve. Cette dernière hypothèse est cependant nécessaire pour la Proposition 4.1, parce que l'on travaille avec la forme compacte à l'infini du groupe unitaire. Ainsi, si nous pouvions effectuer l'argument de déformation  $p$ -adique du §8 pour le groupe  $U(2, 1)$ , cela supprimerait l'hypothèse  $k > 1$ .  $\square$

La représentation  $r_1$  fournit une extension de 1 par  $\chi_p$ , non triviale, qui a bonne réduction aux deux places divisant  $p$  d'après le lemme précédent. Comme  $\chi_p$  n'est pas le caractère cyclotomique, un argument élémentaire montre qu'une telle extension a automatiquement bonne réduction (voir l'introduction) aux places ne divisant pas  $p$  : cf. par exemple [55, Lemme 1.3.5]. Cette dernière affirmation peut aussi se démontrer directement. C'est immédiat aux places ne divisant pas  $p$ .  $\text{cond}(\chi_0)$  par la Proposition 9.2. Si  $w$  divise  $\text{cond}(\chi_0)$ , le paragraphe 9.2.3 montre que  $(r_1)|_{I_w}$  est d'image finie, donc semi-simple. Cela implique que  $r_1$  a bonne réduction en  $w$ , et prouve le Théorème 1.1.

*Exercice.* – On a  $\zeta_E(-1) = 0$ , et le zéro est d'ordre 1. Les conjectures de Bloch et Kato (cf. [32, 3.4.5]) impliquent donc que  $H_f^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \mathbb{Q}_p(2))$  est de dimension 1. Montrer en utilisant la méthode de cet article, quand  $p$  est décomposé dans  $E$ , que  $H_f^1(\text{Gal}(\overline{E}/E), \mathbb{Q}_p(2)) \neq 0$ .

*Indication.* – Au lieu de déformer la représentation endoscopique non tempérée  $\pi(\chi_0)$ , on déformera la représentation triviale de  $U(3)$  (elle aussi non tempérée). Pour prouver la cristallinité aux deux places  $v_1$  et  $v_2$  de l'extension construite, on utilisera la variante de la preuve du Lemme 9.4.

## Remerciements

Les auteurs<sup>20</sup> sont heureux de remercier Laurent Berger, Laurent Clozel, Pierre Colmez, Michael Harris, Guy Henniart et Éric Urban pour de nombreuses et utiles conversations durant la réalisation de cet article.

## RÉFÉRENCES

- [1] ARTHUR J., CLOZEL L., Simple Algebras, Base Change and the Advanced Theory of the Trace Formula, *Ann. of Math. Stud.*, vol. **120**, Princeton University Press, 1989.
- [2] ARTIN E., TATE J., *Class Field Theory*, Benjamin, 1968.
- [3] BELLAÏCHE J., Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes, Thèse de l'université Paris 11, janvier 2002.
- [4] BELLAÏCHE J., À propos d'un lemme de Ribet, *Rend. Sem. Univ. Padova* **109** (2003) 47–62.
- [5] BELLAÏCHE J., GRAFTIEAUX P., Représentations sur un anneau de valuation discrète complet, *Math. Ann.*, à paraître.
- [6] BELLAÏCHE J., GRAFTIEAUX P., Augmentation du niveau pour  $U(3)$ , Preprint de l'université de Nice.
- [7] BERNSTEIN I.N., ZELEVINSKY A.V., Induced representations of reductive  $p$ -adic groups I, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977) 441–472.
- [8] BLASCO L., Description du dual admissible de  $U(2, 1)(F)$  par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko, *Manuscripta Math.* **107** (2) (2002) 151–186.
- [9] BLASIUS D., ROGAWSKI J., Tate class and arithmetic quotient of two-ball, in: Langlands R., Ramakhrisan D. (Eds.), *The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces*, Publications C.R.M., Montréal, 1992, pp. 421–443.
- [10] BLASIUS D., ROGAWSKI J., Zeta functions of Shimura varieties, in: *Motives*, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. **55**.
- [11] BLASIUS D., ROGAWSKI J., Motives for Hilbert modular forms, *Invent. Math.* **114** (1993) 55–87.
- [12] BOREL A., Some finiteness properties of adèle groups over number fields, *IHÉS Publ. Math.* **16** (1963) 5–30.
- [13] BOREL A., Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup, *Invent. Math.* **35** (1976) 233–259.
- [14] BOREL A., CASSELMAN W., Automorphic forms, representations, and  $L$ -functions, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. **33**, 1977, Corvallis.
- [15] BOSCH S., GÜNTZER U., REMMERT R., Non Archimedean Analysis, in: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. **261**, Springer-Verlag.
- [16] BUSHNELL C., Smooth representations of  $p$ -adic group, ICM 1998, pp. 770–779.
- [17] BUSHNELL C., KUTZKO P., Smooth representations of reductive  $p$ -adic groups: structure theory via types, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1997) 582–634.
- [18] BUSHNELL C., KUTZKO P., Semi-simple types, *Compositio Math.* **119** (1999) 53–117.
- [19] BUZZARD K., Eigenvarieties, 2002, en préparation.

<sup>20</sup> Durant la rédaction de cet article, l'un des auteurs (Joël Bellaïche) a bénéficié de l'aide du Bell fund et du Ellentuck Fund.

- [20] CARTIER P., Representations of  $p$ -adic groups: a survey, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. **33**, 1977, pp. 111–155, Part I.
- [21] CASSELMAN W., The unramified principal series of  $p$ -adic groups. I. The spherical function, *Compositio Math.* **40** (3) (1980) 387–406.
- [22] CHENEVIER G., Familles  $p$ -adiques de formes automorphes pour  $GL(n)$ , *J. Reine Angew. Math.* **570** (2004) 143–217.
- [23] CHENEVIER G., Familles  $p$ -adiques de formes automorphes et applications aux conjectures de Bloch–Kato, Thèse de l’université Paris 7, 2003.
- [24] CHOUCROUN F., Analyse harmonique des groupes d’automorphismes d’arbres de Bruhat–Tits, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (58) (1994) 170.
- [25] CLOZEL L., Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de  $GL(n)$ , *IHÉS Publ. Math.* **73** (1991) 97–145.
- [26] CLOZEL L., LABESSE J.-P., Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires, in: Astérisque, vol. **257**, SMF, 1998, Appendice A.
- [27] COLEMAN R.,  $P$ -adic Banach spaces & families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997) 417–479.
- [28] CURTIS C., REINER I., Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Wiley, 1962.
- [29] FALTINGS G., Crystalline cohomology and  $p$ -adic Galois representations, in: *Algebraic Analysis and Number Theory, JAMI Conference*, 1988, pp. 25–90.
- [30] FONTAINE J.-M., Le corps des périodes  $p$ -adiques, in: *Périodes  $p$ -adiques*, in: Astérisque, vol. **223**, Société mathématique de France, 1994, pp. 59–111, exposé 2.
- [31] FONTAINE J.-M., Représentations  $p$ -adiques semi-stables, in: *Périodes  $p$ -adiques*, in: Astérisque, vol. **223**, Société mathématique de France, 1994, pp. 113–184, exposé 3.
- [32] FONTAINE J.-M., PERRIN-RIOU B., Autour des conjectures de Bloch–Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions  $L$ , in: *Motives*, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. **55**, 1994, pp. 599–706, part 1.
- [33] GORDON B.B., Canonical models of Picard modular surfaces, in: Langlands R., Ramakhrisnan D. (Eds.), *The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces*, Publications C.R.M., Montréal, 1992, pp. 1–27.
- [34] HARRIS M., On the local Langlands correspondence, in: *Proceedings ICM 2002*, vol. 2, 2002, pp. 583–597.
- [35] HARRIS M., TAYLOR R., The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties, *Ann. Math. Stud.*, vol. **151**, 2001.
- [36] HUMPHREYS J.E., Reflection Groups and Coxeter Groups, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. **29**.
- [37] KATZ N., MESSING W., Some consequences of the Riemann Hypothesis for varieties over finite fields, *Invent. Math.* **23** (1974) 73–77.
- [38] KEYS D., Principal series representations of special unitary groups over local fields, *Compositio Math.* **51** (1) (1984) 115–130.
- [39] KISIN M., Overconvergent modular forms and the Fontaine–Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003) 363–454.
- [40] KOTTWITZ R., Points on some Shimura varieties over finite fields, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (2) (1992).
- [41] LABESSE J.-P., Cohomologie, stabilisation et changement de base, Astérisque, vol. **257**, SMF, 1998.
- [42] Langlands R., Ramakhrisnan D. (Eds.), *The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces*, Publications C.R.M., Montréal, 1992.
- [43] MATSUMURA H., Commutative ring theory, *Cambridge Studies in Adv. Math.*, vol. **8**, 1980.
- [44] MAZUR B., The theme of  $p$ -adic variation, in: Arnold V., Atiyah M., Lax P., Mazur B. (Eds.), *Math.: Frontiers and Perspectives*, AMS, 2000.
- [45] *Motives*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. **55**.
- [46] *Périodes  $p$ -adiques*, Astérisque, vol. **223**, Société mathématique de France, 1994.
- [47] PERRIN-RIOU B., Représentations  $p$ -adiques ordinaires, in: *Périodes  $p$ -adiques*, in: Astérisque, vol. **223**, Société mathématique de France, 1994, pp. 209–220, exposé 4.
- [48] RIBET K., A modular construction of unramified extensions of  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ , *Invent. Math.* **34** (3) (1976) 151–162.

- [49] ROGAWSKI J., Analytic expression for the number of points mod  $p$ , in: Langlands R., Ramakhrisnan D. (Eds.), *The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces*, Publications C.R.M., Montréal, 1992, pp. 65–109.
- [50] ROGAWSKI J., The multiplicity formula for A-packets, in: Langlands R., Ramakhrisnan D. (Eds.), *The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces*, Publications C.R.M., Montréal, 1992, pp. 395–419.
- [51] ROGAWSKI J., On modules over the Hecke algebra of a  $p$ -adic group, *Invent. Math.* **79** (1985) 443–465.
- [52] ROGAWSKI J., Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables, *Ann. of Math. Stud.*, vol. **123**, Princeton University Press, 1990.
- [53] ROQUIER R., Caractérisations des caractères et pseudo-caractères, *J. Algebra* **180** (1996) 571–586.
- [54] RUBIN K., The “main conjectures” of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, *Invent. Math.* **103** (1) (1991) 25–68.
- [55] RUBIN K., Euler systems, *Ann. of Math. Stud.* **147** (2000).
- [56] SERRE J.-P., Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach  $p$ -adiques, *IHÉS Publ. Math.* **12** (1962) 69–85.
- [57] SEN S., Continuous cohomology and  $p$ -adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980) 89–116.
- [58] SEN S., An infinite dimensional Hodge–Tate theory, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993) 13–34.
- [59] GROTHENDIECK A., ARTIN M., VERDIER J.-L., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Séminaire de géométrie algébrique IV, exposé XVI.
- [60] SKINNER C., URBAN E., Sur les déformations  $p$ -adiques des formes de Saito–Kurokawa, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **335** (2002) 581–586.
- [61] TATE J., Number theoretic background, in: *Automorphic Forms, Representations and L-Functions, Part 2*, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. **33**, 1977, pp. 3–26.
- [62] TAYLOR R., Galois representations attached to Siegel modular forms of low weight, *Duke Math. J.* **63** (1991) 281–332.
- [63] TITS J., Reductive groups over local fields, Part I, in: Borel A., Casselman W. (Eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. **33**, 1977, pp. 29–69.
- [64] ZELEVINSKY A. V., Induced representations of reductive  $p$ -adic groups II. On irreducible representations of  $GL(n)$ , *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980) 165–210.

(Manuscrit reçu le 2 octobre 2003 ;  
 accepté, après revision, le 17 mai 2004.)

Joël BELLAÏCHE  
 Laboratoire J.-A. Dieudonné,  
 UMR CNRS 6621, Bureau W 821,  
 Université de Nice,  
 Parc Valrose,  
 06108 Nice cedex 2, France  
 E-mail : joel.bellaiche@free.fr

Gaëtan CHENEVIER  
 Département de Mathématiques  
 et Applications,  
 École Normale Supérieure,  
 45, rue d’Ulm,  
 75230 Paris cedex 05, France  
 E-mail : chenevie@dma.ens.fr