Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 415–418
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Module d'oscillation fonctionnel de quelques processus réels

Philippe Berthet

IRMAR, Université Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France

Reçu le 13 mars 2003 ; accepté après révision le 17 juillet 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Dans cette Note nous donnons la vitesse d'approche uniforme presque sûre des fonctions de Strassen par les incréments des processus empirique, de quantile, de Poisson, de Wiener, de somme partielle. Des conditions minimales sur la localisation des incréments sont introduites et les fonctions limites critiques les plus utiles sont traitées. ***Pour citer cet article : P. Berthet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Functional oscillation modulus of some real random processes. In this Note we give the almost sure rate of uniform approach of Strassen functions by increments of empirical, quantile, Poisson, Wiener and Partial sums processes. Minimal conditions on the location of the increments are introduced and most useful critical limit functions are taken into account. ***To cite this article: P. Berthet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Soit B l'espace de Banach des fonctions réelles bornées, définies sur $[0,1]$ et nulles en 0, muni de la norme $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$. Notons $I \in B$ l'identité et Y_n l'une des suites de processus suivantes.

1. La suite des processus empiriques $n^{-1/2} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathbb{1}_{\{U_i \leqslant I\}} - I)$ avec $\{U_i\colon\, i \geqslant 1\}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.
2. La suite des processus de quantile $n^{1/2}(U_{n,[nI]} - I)$ avec $0 = U_{n,0} \leqslant U_{n,1} \leqslant \cdots \leqslant U_{n,n} \leqslant 1$ les statistiques d'ordre de $U_1, \ldots, U_n$.
3. La suite $n^{-1/2}\Pi(nI)$ avec Π un processus de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}_+$.
4. La suite $n^{-1/2}W(nI)$ avec W un mouvement Brownien standard sur $\mathbb{R}_+$. Nos résultats restent valables pour l'indice continu $n = T \to \infty$.
5. Toute suite $n^{-1/2}(\sum_{0 \leqslant i \leqslant [nI]} X_i + (nI - [nI])X_{[nI]})$ avec $X_0 = 0$ et $\{X_i\colon\, i \geqslant 1\}$ des variables aléatoires i.i.d. centrées, réduites, telles que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX_1})$ existe au voisinage de 0.

Adresse e-mail : philippe.berthet@univ-rennes1.fr (P. Berthet).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00366-2

D'autres processus Y_n sont admissibles s'ils vérifient un principe d'invariance adéquat et des conditions sur le module de continuité ou l'indépendance asymptotique des accroissements.

Les incréments $\Delta Y_n(a,t) = Y_n(t+aI) - Y_n(t)$ de ces processus ont en commun d'obéir à une loi fonctionnelle de type Strassen [12]. Étant donné une suite réelle a_n telle que

$$a_n \in]0,1[, \quad a_n \downarrow 0, \quad na_n \uparrow \infty, \quad \frac{\log(1/a_n)}{\log\log n} \to c \in [0,\infty], \quad \frac{na_n}{(\log n)^\delta} \to \infty \tag{H$_1$}$$

et $T_n \subset [0, 1-a_n]$ considérons la suite d'ensembles aléatoires $\Theta_n = \{b_n^{-1}\Delta Y_n(a_n,t) : t \in T_n\}$ où $b_n = (2a_nl_n)^{1/2}$ et $l_n = \log(1/a_n) + \log\log n$. Dans H$_1$, $\delta = 1$ pour les cas 1, 2, 3, 5 et $\delta = 0$ pour le cas 4. Soit AC l'ensemble des fonctions de B absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue λ, de dérivée f'. Posons $J(f) = \int_{[0,1]} f'^2 \,\mathrm{d}\lambda$ et $S_\theta = \{f \in AC\colon\ J(f) \leqslant \theta\}$. Dans [7,9,11] il est établi que si $T_n = [0, 1-a_n]$ alors Θ_n est presque sûrement relativement compact dans B d'ensemble d'accumulation S_1 et d'ensemble recouvert $S_{c/(1+c)}$.

Dans cette Note nous présentons les vitesses de convergence ponctuelles. Soit donc à caractériser le comportement limite du module d'oscillation fonctionnel de Y_n centré en f

$$\omega_n^f = \inf_{t\in T_n} \left\| \frac{\Delta Y_n(a_n,t)}{b_n} - f \right\|$$

et la condition minimale sur T_n assurant les meilleures vitesses. Sous H$_1$ nous tirons de [7,9,11] que si $T_1 \subset T_2 \subset \cdots$ ou $T_1 \supset T_2 \supset \cdots$ sont des intervalles tels que $l_n^{-1}\log(1/\lambda(T_n)) \to 0$ alors

$$\inf_{g\in S_1} \|f-g\| = \liminf_{n\to\infty} \omega_n^f \leqslant \limsup_{n\to\infty} \omega_n^f = \inf_{g\in S_{c/(1+c)}} \|f-g\| \quad \text{p.s.}$$

Lorsque $J(f) < 1$ et $J(f) < c/(1+c)$ respectivement, ces limites sont nulles et les vitesses sont connues depuis [2] et la première version de [4]. Mais les fonctions les plus utiles en vue des applications en statistique asymptotique sont telles que $J(f)$ est maximum, d'où la version augmentée de [4]. Par exemple, dans le cas 1, ω_n^f mesure les fluctuations d'échantillonnage et ces f critiques correspondent aux configurations locales possibles du processus empirique engendrant la plus grande déviation de son espérance d'un estimateur basé sur $U_1,\ldots,U_n$.

2. Vitesses et constantes

Notons *VB* l'ensemble des fonctions g à variation $\mathrm{Var}(g) < \infty$. Pour $\theta = 1$ ou $\theta = c/(1+c)$ nous considérons les ensembles $S_\theta^* = S_\theta^- \cup S_\theta^{\mathrm{vb}} \cup S_\theta^{\mathrm{lvi}} \subset S_\theta$ avec $S_\theta^- = \{f\colon\ J(f) < \theta\}$, $S_\theta^{\mathrm{vb}} = \{f\colon\ J(f) = \theta, f' \in VB\}$ et S_θ^{lvi} constitué des fonctions f telles que $J(f) = \theta$ et f' est localement à variation infinie, au sens où il existe $0 \leqslant x_1 < \cdots < x_k \leqslant 1$ vérifiant, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Var}(f'\mathbb{1}_{[0,1]\setminus A_\varepsilon}) < \mathrm{Var}(f'\mathbb{1}_{[0,1]\cap A_\varepsilon}) = \infty$, $A_\varepsilon = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant k}[x_j-\varepsilon, x_j+\varepsilon]$. Pour $l \to \infty$ définissons nos vitesses et constantes, par ordre décroissant,

$$\text{si } f \in S_\theta^-, \quad \nabla_f(l) = l \quad \text{et} \quad \chi_f(\theta) = \frac{\pi}{4\sqrt{\theta - J(f)}},$$

$$\text{si } f \in S_\theta^{\mathrm{lvi}}, \quad \nabla_f(l) \text{ est solution de } \theta - \inf_{\|g-f\|\leqslant 1/\nabla} J(g) = \frac{\pi^2\nabla^2}{16l^2} \quad \text{et} \quad \chi_f(\theta) = 1,$$

$$\text{si } f \in S_\theta^{\mathrm{vb}}, \quad \nabla_f(l) = l^{2/3} \quad \text{et} \quad \chi_f(\theta) = \chi(f) \text{ est solution de (3.1) dans [10].}$$

En utilisant [1,6] pour S_θ^-, [10] pour S_θ^{vb} et [5,6] pour S_θ^{lvi} nous obtenons le

Lemme 2.1. *Soit $\theta > 0$ et $f \in S_\theta^*$. Pour tout $\delta > 0$ assez petit il existe $\gamma^\pm = \gamma^\pm(\theta, f, \delta) \in (0,\infty)$ tel que pour tout ξ assez grand,*

$$\mathbb{P}\left(\left\| \frac{W}{\xi} - f \right\| \leqslant \frac{(1+\delta)\chi_f(\theta)}{\nabla_f(\xi^2/2)} \right) \geqslant \exp\left(-\frac{\theta\xi^2}{2} + \gamma^+ \frac{\nabla_f^2(\xi^2/2)}{\xi^2} \right),$$

$$\mathbb{P}\left(\left\|\frac{W}{\xi}-f\right\|\leqslant\frac{(1-\delta)\chi_f(\theta)}{\nabla_f(\xi^2/2)}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\theta\xi^2}{2}-\gamma^-\frac{\nabla_f^2(\xi^2/2)}{\xi^2}\right).$$

Ces bornes sont fines car nécessairement $\lim_{\delta\to 0}\gamma^{\pm}(\theta,f,\delta)=0$.

3. Incréments moyens

Pour simplifier l'énoncé lorsque $c=\infty$ nous interdisons les incréments trop petits ou, pour $S_\theta^{\mathrm{vb}}\cup S_\theta^{\mathrm{lvi}}$, trop grands. Supposons que l'entropie métrique de T_n relativement à a_n définie par

$$\kappa_n=\min\left\{k:\ \exists t_j\in T_n,\ t_{j+1}\geqslant t_j+a_n,\ T_n\subset\bigcup_{1\leqslant j\leqslant k}[t_j,t_j+a_n)\right\}$$

vérifie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1/a_n)}{\nabla_f(\log(1/a_n))}\sqrt{1-\frac{\log\kappa_n}{\log(1/a_n)}}=0 \tag{H$_2$}$$

de sorte que $[0,1-a_n]$ est toujours autorisé, ainsi que tout intervalle fixe. De même pour les cas de [7,9] si $f\in S_1^-$ puisque H_2 signifie alors $\log\kappa_n\sim\log(1/a_n)$. C'est pourquoi nous qualifions la loi fonctionnelle de type Chung suivante de *globale*, par contraste avec la loi *locale* de [8]. Posons $\mu=2$ dans les cas 1, 3, 5 et $\mu=4$ dans le cas 2. Cette contrainte disparaît dans le cas 4.

Théorème 3.1. *Si* $f\in S_1^*$, a_n *vérifie* H_1 *avec* $c=\infty$, T_n *vérifie* H_2 *et*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n/\log n}{\nabla_f^\mu(\log(1/a_n))}=\infty\quad et\quad\left\{\liminf_{n\to\infty}\frac{\log(na_n)}{\log\log n}>3\ ou\ \limsup_{n\to\infty}\frac{\log(na_n)}{\log\log n}<\infty\right\}$$

tandis que, si de plus $f\in S_1^{\mathrm{vb}}\cup S_1^{\mathrm{lvi}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nabla_f^2(\log(1/a_n))}{\log(1/a_n)\log\log n}=\infty$$

alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\nabla_f\left(\log\left(\frac{1}{a_n}\right)\right)\omega_n^f=\chi_f(1)\quad p.s.$$

Les vitesses lentes $\mathrm{O}(\log^{2/3}(1/a_n))$ obtenues à la frontière de S_1 sont en rapport avec les vitesses de concentration déterminées dans [3]. La preuve du Théorème 3.1 repose sur des techniques fines de blocage visant à contrôler les oscillations de Y_n durant de longues périodes. Elle utilise la construction hongroise, les bornes de déviation des modules de continuité, la proximité structurelle des cas 1, 2, 3 et finalement, le Lemme 2.1 (voir [4]). En $f=0$ nous apprenons que

$$\sup_{t\in T_n}\left\|\Delta Y_n(a_n,t)\right\|\sim\frac{4}{\pi}\log\left(\frac{1}{a_n}\right)\inf_{t\in T_n}\left\|\Delta Y_n(a_n,t)\right\|\quad \text{p.s.}$$

4. Grands incréments

Lorsque $c<\infty$, approcher une fonction adhérente requiert la condition

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{l_n\log(1/a_n)}}{\nabla_f(l_n)}\sqrt{1-\frac{\log\kappa_n}{\log(1/a_n)}}=0 \tag{H$_2^c$}$$

qui est plus faible que $\mathrm{H}_2 = \mathrm{H}_2^\infty$ et satisfaite dès lors que $\log(1/a_n)$ est assez petit. En particulier, si $f \in S_1^-$ alors H_2^0 est toujours vraie et H_2^c pour $c \in (0, \infty)$ équivaut à $\log \kappa_n \sim c \log\log n$.

Théorème 4.1. *Si $f \in S_1^*$, a_n vérifie H_1 avec $c < \infty$ et T_n vérifie H_2^c alors* $\liminf_{n\to\infty} \nabla_f(l_n)\omega_n^f = \chi_f(1)$ *p.s.*.

Pour les fonctions limites, la condition sur T_n devient sensible au second ordre $a_n(\log n)^c$ et, dans le Théorème 4.2, $[0, 1 - a_n]$ n'est plus systématiquement autorisé si $f \in S_{c/(1+c)}^{\mathrm{vb}} \cup S_{c/(1+c)}^{\mathrm{lvi}}$. En outre T_n doit être stable dans le temps. Soit $\gamma \in (0, 1/2)$, $n_k = \lceil \exp(k^\gamma) \rceil$ et τ_k l'entropie métrique de $R_k = \bigcap_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} T_n$ relativement à a_{n_k}. Notons $(x)^+ = \max(0, x)$ et $c_n = (\log\log n)^{-1} \log(1/a_n)$.

Théorème 4.2. *Si $f \in S_{c/(1+c)}^*$, a_n vérifie H_1 avec $c \in (0, \infty)$ et T_n est tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{\nabla_f(l_n)} \sqrt{\left(\frac{\log \kappa_n}{\log(1/a_n)} - \frac{1 + 1/c_n}{1 + 1/c}\right)^+} = \lim_{k\to\infty} \frac{l_{n_k}}{\nabla_f(l_{n_k})} \sqrt{\left(\frac{1 + 1/c_{n_k}}{1 + 1/c} - \frac{\log \tau_k}{\log(1/a_{n_k})}\right)^+} = 0$$

alors $\limsup_{n\to\infty} \nabla_f(l_n)\omega_n^f = \chi_f(c/(1+c))$ *p.s.*

Lorsque $f \in S_{c/(1+c)}^-$ il suffit que $\log \kappa_n \sim c \log\log n$ et $\log \tau_k \sim c\gamma \log k$. D'après les Théorèmes 4.1 et 4.2, ω_n^f est donc de l'ordre de $(\log\log n)^{-1}$ alors que si $f \in S_{c/(1+c)}^{\mathrm{vb}} \cup S_{c/(1+c)}^{\mathrm{lvi}}$, ω_n^f oscille entre $(\log\log n)^{-1}$ et $\nabla_f^{-1}(\log\log n)$. En $f = 0$ nous obtenons que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_m \bigcap_{n \geqslant m} \left\{ \inf_{t\in T_n} \left\| \Delta Y_n(a_n, t) \right\| \in \left[\frac{(\pi - \varepsilon)\sqrt{a_n}}{\sqrt{8(1+c)\log\log n}}, \frac{(\pi + \varepsilon)\sqrt{a_n}}{\sqrt{8c \log\log n}} \right] \right\}\right) = 1.$$

Se référer à [4] pour des résultats plus complets, démontrés, commentés et mis en relation.

Références

[1] A. De Acosta, Small deviations in the functional central limit theorem with applications to functional law of the iterated logarithm, Ann. Probab. 11 (1983) 78–101.

[2] P. Berthet, Vitesses de recouvrement dans les lois fonctionnelles du logarithme itéré pour les incréments du processus empirique uniforme avec applications statistiques, Thèse de l'Université Paris 6, 1996, pp. 1–396.

[3] P. Berthet, On the rate of clustering to the Strassen set for increments of the uniform empirical process, J. Theoret. Probab. 10 (1997) 557–579.

[4] P. Berthet, Inner rates of coverage of Strassen type sets by increments of the uniform empirical and quantile processes, Prépublication 02-58 de l'IRMAR, 2002, pp. 1–41.

[5] P. Berthet, M. Lifshits, Some exact rates in the functional law of the iterated logarithm, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist. 38 (2002) 811–824.

[6] E. Csáki, A relation between Chung's and Strassen's law of the iterated logarithm, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 54 (1980) 287–301.

[7] P. Deheuvels, Functional laws of the iterated logarithm for large increments of empirical and quantile processes, Stochastic Process. Appl. 43 (1992) 133–163.

[8] P. Deheuvels, Chung-type functional laws of the iterated logarithm for tail empirical processes, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 36 (2000) 583–616.

[9] P. Deheuvels, D.M. Mason, Functional laws of the iterated logarithm for the increments of empirical and quantile processes, Ann. Probab. 20 (1992) 1248–1287.

[10] N. Gorn, M. Lifshits, Chung's law and the Csáki function, J. Theoret. Probab. 12 (1999) 399–420.

[11] P. Révész, A generalization of Strassen's functional law of the iterated logarithm, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 50 (1979) 257–264.

[12] V. Strassen, An invariance principle for the law of the iterated logarithm, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 3 (1964) 211–226.