Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 403–408
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Topologie

La construction bar d'une algèbre comme algèbre de Hopf E-infini

Benoit Fresse

Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France

Reçu le 15 mars 2003 ; accepté le 15 juillet 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On prouve que la construction bar d'une algèbre E_∞ forme une algèbre E_∞. Plus précisément, on montre que la construction bar d'une algèbre sur l'opérade des surjections possède une structure d'algèbre de Hopf sur l'opérade de Barratt–Eccles. (L'opérade des surjections et l'opérade de Barratt–Eccles sont des opérades E_∞ classiques.) ***Pour citer cet article : B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

The bar construction of an algebra as an E-infinite Hopf algebra. We prove that the bar construction of an E_∞ algebra forms an E_∞ algebra. To be more precise, we provide the bar construction of an algebra over the surjection operad with the structure of a Hopf algebra over the Barratt–Eccles operad. (The surjection operad and the Barratt–Eccles operad are classical E_∞ operads.) ***To cite this article: B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

We fix a ground field $\mathbf{F}$ of characteristic 2. We let Σ_r, $r \in \mathbf{N}$, denote the sequence of symmetric groups. We consider operads in the category $dg\,\mathbf{F}\,\mathrm{Mod}$ of differential graded modules over $\mathbf{F}$ (for short *dg-modules*).

We denote the operad of associative and commutative algebras by the letter $\mathcal{C}$. We recall that an E_∞ operad consists of a *dg*-operad $\mathcal{F}$ quasi-isomorphic to $\mathcal{C}$ and whose components $\mathcal{F}(r)$, $r \in \mathbf{N}$, are projective complexes of Σ_r-modules. The category of algebras over a fixed E_∞ operad $\mathcal{F}\,\mathrm{Alg}$ is equipped with the structure of a semi-model category (cf. [7]). The purpose of this note is to make explicit a model of the suspension of an algebra in $\mathcal{F}\,\mathrm{Alg}$.

This model is given by the classical bar construction of associative algebras $\overline{B}(A)$. More specifically, the bar construction of an associative and commutative algebra is equipped with the *shuffle* product and forms an associative and commutative algebra. We extend this construction to the context of E_∞ algebras by introducing particular E_∞ operads: the *surjection operad* $\mathcal{X}$ and the *Barratt–Eccles operad* $\mathcal{E}$.

Adresse e-mail : fresse@math.unice.fr (B. Fresse).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00354-6

The components $\mathcal{X}(2)$ and $\mathcal{E}(2)$ of these operads are both isomorphic to the classical free resolution of the trivial representation of Σ_2. To be more explicit, we have homogeneous elements θ_d such that $\mathcal{E}(2)_d = \mathcal{X}(2)_d = \mathbf{F}[\Sigma_2] \cdot \theta_d$. In addition, the differential of the *dg*-modules $\mathcal{E}(2)_* = \mathcal{X}(2)_*$ verifies the formula $\delta(\theta_d) = \theta_{d-1} + \tau \cdot \theta_{d-1}$, where τ denotes the transposition of Σ_2. For a given $\mathcal{X}$-algebra A, the operation $\theta_d : A \otimes A \to A$ associated to $\theta_d \in \mathcal{X}(2)$ is also denoted by $a_1 \smile_d a_2 = \theta_d(a_1, a_2)$. In fact, the element $\theta_0 \in \mathcal{X}(2)_0$ satisfies the relation $\theta_0(\theta_0, 1) = \theta_0(1, \theta_0)$ in the surjection operad. Accordingly, the product $\smile_0$ is associative in A. Similarly, the product $\smile_d$ gives rise to the boundary relation $a_1 \smile_{d-1} a_2 + a_2 \smile_{d-1} a_1 = \delta(a_1 \smile_d a_2) + \delta(a_1) \smile_d a_2 + a_1 \smile_d \delta(a_2)$, because we have $\delta(\theta_d) = \theta_{d-1} + \tau \cdot \theta_{d-1}$ in the surjection operad.

The work of Baues (cf. [1]) proves that the bar construction of an $\mathcal{X}$-algebra is equipped with an associative product. There is also a sequence of products $\smile_d : \overline{B}(A) \otimes \overline{B}(A) \to \overline{B}(A)$ defined by Kadeishvili in the article [5] and that verify the boundary relation above. We generalize Kadeishvili's construction and we obtain the following theorem:

Theorem 0.1. *Let A be an algebra over the surjection operad $\mathcal{X}$. The bar construction $\overline{B}(A)$ is equipped with the structure of a Hopf algebra over the Barratt–Eccles operad $\mathcal{E}$ such that the operation $\theta_d : \overline{B}(A) \otimes \overline{B}(A) \to \overline{B}(A)$ associated to the element $\theta_d \in \mathcal{E}(2)_d$ agrees with Kadeishvili's product $\smile_d$. The bar construction $\overline{B}(A)$ together with this structure forms a cogroup object in the homotopy category of $\mathcal{E}$-algebras and is equivalent to the suspension of A.*

We define an operad morphism $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ in [2] and [3]. This morphism gives any algebra over $\mathcal{X}$ the structure of an algebra over $\mathcal{E}$. Therefore, it makes sense to consider the suspension of an $\mathcal{X}$-algebra in the category of $\mathcal{E}$-algebras.

The normalized cochain complex of a simplicial set $A = N^*(X)$ is equipped with the structure of an algebra over the surjection operad $\mathcal{X}$ (cf. [3,9]). Moreover, according to a general result of Mandell (cf. [7]), this structure determines the 2-adic homotopy type of X (since we consider cochains with $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2$ coefficients). One proves that the suspension of $N^*(X)$ in the homotopy category of $\mathcal{E}$-algebras is equivalent to $N^*(\Omega X)$, the cochain algebra of the loop space of X (cf. [4,7]). Consequently:

Theorem 0.2. *We assume that X is a pointed connected simplicial set such that $\pi_1(X)$ is a finite 2-group and $H^*(X, \mathbf{F}_2)$ is a finite dimensional $\mathbf{F}_2$-module for all $* \in \mathbf{N}$. If $A = N^*(X)$, the cochain algebra of X, then, in the homotopy category of $\mathcal{E}$-algebras, the bar construction $\overline{B}(N^*(X))$ is equivalent to $N^*(\Omega X)$, the cochain algebra of the loop space of X.*

The works of Smirnov (cf. [10]), Justin R. Smith (cf. [11]) and Kadeishvili–Saneblidze (cf. [6]) predict the existence of an E_∞ structure on the bar construction $\overline{B}(N^*(X))$. Our theorems make this structure explicit.

1. Résultats

On fixe un corps de base $\mathbf{F}$ de caractéristique 2. On considère des opérades dans la catégorie $dg\mathbf{F}\,\mathrm{Mod}$ des modules différentiels gradués sur $\mathbf{F}$ (en abrégés *dg-modules*). On Note Σ_r, $r \in \mathbf{N}$, la suite des groupes de permutations.

L'opérade associée aux algèbres associatives et commutatives est désignée par la lettre $\mathcal{C}$. On rappelle qu'une *opérade E_∞* est une *dg*-opérade $\mathcal{F}$ quasi-isomorphe à $\mathcal{C}$ et dont les composantes $\mathcal{F}(r)$, $r \in \mathbf{N}$, forment des complexes projectifs de Σ_r-modules. La catégorie d'algèbres associée à une telle opérade $\mathcal{F}\,\mathrm{Alg}$ possède une semi-structure modèle naturelle (cf. [7]). Le but de cette Note est de donner un modèle explicite de la suspension d'une algèbre dans $\mathcal{F}\,\mathrm{Alg}$.

Ce modèle est fourni par la construction bar classique des algèbres associatives $\overline{B}(A)$. Plus spécifiquement, on sait que le produit *shuffle* donne à la construction bar d'une algèbre commutative la structure d'une algèbre commutative. On étend cette construction au cadre des algèbres E_∞ en introduisant des opérades E_∞ particulières qui sont l'*opérade des surjections* $\mathcal{X}$ et l'*opérade de Barratt–Eccles* $\mathcal{E}$.

Les composantes $\mathcal{X}(2)$ et $\mathcal{E}(2)$ de ces opérades sont isomorphes à la résolution libre classique de la représentation triviale de Σ_2. Plus explicitement, on a une suite d'éléments homogènes θ_d tels que $\mathcal{E}(2)_d = \mathcal{X}(2)_d = \mathbf{F}[\Sigma_2]\cdot\theta_d$. En outre, la différentielle des *dg*-modules $\mathcal{E}(2)_* = \mathcal{X}(2)_*$ vérifie la formule $\delta(\theta_d) = \theta_{d-1} + \tau\cdot\theta_{d-1}$, en notant τ la transposition de Σ_2. Si A est une $\mathcal{X}$-algèbre, alors l'opération $\theta_d : A\otimes A \to A$ associée à l'élément $\theta_d \in \mathcal{X}(2)_d$ est également notée $a_1 \smile_d a_2 = \theta_d(a_1, a_2)$. En fait, l'élément θ_0 satisfait la relation $\theta_0(\theta_0, 1) = \theta_0(1, \theta_0)$ dans l'opérade des surjections. Le produit correspondant $\smile_0$ est donc associatif sur A. De même, comme θ_d a pour différentielle $\delta(\theta_d) = \theta_{d-1} + \tau\cdot\theta_{d-1}$, le produit supérieur $\smile_d$ donne lieu à la relation de bord $a_1 \smile_{d-1} a_2 + a_2 \smile_{d-1} a_1 = \delta(a_1 \smile_d a_2) + \delta(a_1) \smile_d a_2 + a_1 \smile_d \delta(a_2)$.

Les travaux de Baues (cf. [1]) montrent que la construction bar d'une $\mathcal{X}$-algèbre $\overline{B}(A)$ possède une structure d'algèbre associative. On a aussi une suite de produits $\smile_d : \overline{B}(A)\otimes\overline{B}(A) \to \overline{B}(A)$ (vérifiant la relation de bord ci-dessus) que Kadeishvili définit de façon explicite dans l'article [5]. On étend la construction de Kadeishvili pour associer une opération sur la construction bar à tout élément de l'opérade de Barratt–Eccles $\mathcal{E}$. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Si A est une algèbre sur l'opérade des surjections $\mathcal{X}$, alors la construction bar $\overline{B}(A)$ possède une structure naturelle d'algèbre de Hopf sur l'opérade de Barratt–Eccles $\mathcal{E}$ telle que l'opération $\theta_d : \overline{B}(A)\otimes\overline{B}(A) \to \overline{B}(A)$ associée à l'élément $\theta_d \in \mathcal{E}(2)_d$ est le produit $\smile_d$ défini par Kadeishvili. Quand elle est munie de cette structure, la construction bar $\overline{B}(A)$ définit un objet en cogroupe dans la catégorie homotopique des $\mathcal{E}$-algèbres et est équivalente à la suspension de A.*

On définit un morphisme d'opérades $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ dans les articles [2] et [3]. Ce morphisme fait de toute algèbre sur $\mathcal{X}$ une algèbre sur $\mathcal{E}$ par restriction de structure. C'est pourquoi on peut parler de la suspension d'une $\mathcal{X}$-algèbre dans la catégorie des $\mathcal{E}$-algèbres.

On sait que le complexe des cochaînes normalisées d'un ensemble simplicial $A = N^*(X)$ possède une structure naturelle d'algèbre sur l'opérade des surjections $\mathcal{X}$ (cf. [3,9]). De plus, d'après un résultat général de Mandell (cf. [7]), cette structure suffit à déterminer le type d'homotopie 2-adique de X (quand on prend $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2$ comme corps de coefficients). On montre que la suspension de $N^*(X)$ dans la catégorie homotopique des $\mathcal{E}$-algèbres est équivalente à $N^*(\Omega X)$, l'algèbre des cochaînes de l'espace des lacets de X (cf. [4,7]). En conséquence :

Théorème 1.2. *On suppose que X est un ensemble simplicial pointé connexe dont la cohomologie $H^*(X, \mathbf{F}_2)$ est finie en tout degré et tel que $\pi_1(X)$ forme un 2-groupe fini. Si $A = N^*(X)$, l'algèbre des cochaînes de X, alors la construction bar $\overline{B}(N^*(X))$ est équivalente dans la catégorie homotopique des $\mathcal{E}$-algèbres à $N^*(\Omega X)$, l'algèbre des cochaînes de l'espace des lacets de X.*

L'existence d'une structure E_∞ sur la construction bar $\overline{B}(N^*(X))$ est assurée par les travaux de Smirnov (cf. [10]), de Justin R. Smith (cf. [11]) et de Kadeishvili–Saneblidze (cf. [6]). Nos théorèmes rendent une telle structure explicite. Le but de la seconde partie de cette Note est de définir l'opération $w : \overline{B}(A)^{\otimes r} \to \overline{B}(A)$ associée à un élément $w \in \mathcal{E}(r)$. La démonstration du Théorème 1.1 sera publiée ultérieurement.

2. Construction des opérations sur la construction bar

On reprend les conventions classiques classique du calcul différentiel gradué. Un *dg*-module V est gradué inférieurement $V = V_*$ ou supérieurement $V = V^*$, la relation $V_d = V^{-d}$ rendant une graduation inférieure équivalente à une graduation supérieure. La différentielle d'un *dg*-module est généralement notée $\delta : V_* \to V_{*-1}$.

2.1. Rappels sur l'opérade de Barratt–Eccles et l'opérade des surjections

On reprend les conventions des articles [2] et [3]. On rappelle que l'opérade de Barratt–Eccles $\mathcal{E}$ est définie par la construction bar homogène normalisée des groupes symétriques Σ_r. Explicitement, le module $\mathcal{E}(r)$ est engendré en degré d par les $d+1$-uplets non-dégénérés de permutations $(w_0, \ldots, w_d) \in \Sigma_r \times \cdots \times \Sigma_r$. Un simplexe $w = (w_0, \ldots, w_d)$ est dégénéré (et représente 0 dans $\mathcal{E}(r)_d$) si on a $w_{i+1} = w_i$ pour quelque $i \in \{0, \ldots, d-1\}$. Ainsi, l'élément $\theta_d \in \mathcal{E}(2)_d$ correspondant au produit $\smile_d$ est représenté par le simplexe alternant $\theta_d = (\mathrm{id}, \tau, \mathrm{id}, \tau, \ldots)$. La différentielle de $\mathcal{E}(r)$ est définie par la formule classique $\delta(w_0, \ldots, w_d) = \sum_{i=0}^{d} (w_0, \ldots, \widehat{w_i}, \ldots, w_d)$.

Les composantes $\mathcal{X}(r)_d$ de l'opérade des surjections $\mathcal{X}$ sont engendrées par les surjections non-dégénérées $u : \{1, \ldots, r+d\} \to \{1, \ldots, r\}$, une surjection u étant dégénérée si $u(i+1) = u(i)$ pour quelque $i \in \{1, \ldots, r+d-1\}$ (auquel cas, on suppose que u représente 0 dans $\mathcal{X}(r)_d$). Une surjection $u \in \mathcal{X}(r)_d$ est déterminée par la suite de ses valeurs $\underline{u} = (u(1), \ldots, u(r+d))$.

On définit dans l'article [3] une certaine décomposition de $\underline{u}$ en sous-suites $\underline{u}_0, \ldots, \underline{u}_d$ (ce sont les *lignes* de l'*arrangement en table* de $u \in \mathcal{X}(r)_d$). Pour caractériser cette décomposition, on spécifie les termes de $\underline{u}$ qui définissent les derniers éléments de $\underline{u}_0, \ldots, \underline{u}_{d-1}$ (les *césures* de la surjection u) : ce sont les termes de $\underline{u}$ qui ne forment pas la dernière occurrence d'une valeur $k = 1, \ldots, r$ dans la suite $\underline{u}$. Par exemple, pour $\underline{u} = (1, 4, \underline{2}, 5, \underline{3}, 2, 3)$, on obtient :

$$\underline{u} = (\underbrace{1, 4, 2}_{\underline{u}_0};\ \underbrace{5, 3}_{\underline{u}_1};\ \underbrace{2, 3}_{\underline{u}_2})$$

(les césures sont soulignées dans la suite initiale).

2.2. Rappels sur la construction bar

La *cogèbre tensorielle* engendrée par un *dg*-module V, notée $T^c(V)$, est formée par le module $T^c(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ muni de la diagonale $\Delta : T^c(V) \to T^c(V) \otimes T^c(V)$ définie par la déconcaténation des tenseurs. On obtient ainsi une structure de cogèbre associative.

On suppose que A est une algèbre augmentée sur l'opérade des surjections $\mathcal{X}$. On note $\tilde{A}$ l'idéal d'augmentation de A. On considère la suspension de $\tilde{A}$ (dans la catégorie des *dg*-modules) dont les composantes homogènes sont définies par la relation $(\Sigma\tilde{A})^* = \tilde{A}^{*+1}$. La construction bar $\overline{B}(A)$ est définie par la cogèbre tensorielle $\overline{B}(A) = T^c(\Sigma\tilde{A})$ munie d'une différentielle $b' : \overline{B}(A) \to \overline{B}(A)$ qui est déterminée par le produit associatif de A associé à l'opération $\theta_0 \in \mathcal{X}(2)$. Explicitement, cette différentielle $b' : \overline{B}(A) \to \overline{B}(A)$ est donnée par la formule

$$b'(\Sigma a_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \Sigma a_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma(a_i \smile_0 a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \Sigma a_n.$$

Dans le prochain paragraphe, on associe à tout élément $w \in \mathcal{E}(r)$ une application $\widetilde{w} : T^c(\Sigma\tilde{A})^{\otimes r} \to \tilde{A}$. On étend cette application en une opération $w : T^c(\Sigma\tilde{A})^{\otimes r} \to T(\Sigma\tilde{A})$ (sur la construction bar) en utilisant la structure de cogèbre de $T^c(\Sigma\tilde{A})$. On rappelle que l'opérade de Barratt–Eccles est munie d'une diagonale coassociative $\Delta : \mathcal{E}(r) \to \mathcal{E}(r) \otimes \mathcal{E}(r)$ comme la cogèbre tensorielle. (En conséquence, les modules $\mathcal{E}(r)$ forment une opérade dans la catégorie des cogèbres ; on dit aussi que l'opérade de Barratt–Eccles $\mathcal{E}$ est une *opérade de Hopf*.) On note $\Delta^n(w) = \sum_i w^i_{(1)} \otimes \cdots \otimes w^i_{(n)}$ la diagonale itérée de l'élément $w \in \mathcal{E}(r)$ dans $\mathcal{E}(r)^{\otimes n}$. On pose explicitement

$$w(c_1, \ldots, c_r) = \sum_i \Sigma \widetilde{w}^i_{(1)}\bigl(c^i_{1(1)}, \ldots, c^i_{r(1)}\bigr) \otimes \cdots \otimes \Sigma \widetilde{w}^i_{(n)}\bigl(c^i_{1(n)}, \ldots, c^i_{r(n)}\bigr),$$

en notant

$$\Delta^n(c_k) = \sum_i c^i_{k(1)} \otimes \cdots \otimes c^i_{k(n)} \in T^c\bigl(\Sigma \tilde{A}\bigr)^{\otimes n},$$

les diagonales itérées des tenseurs $c_1, \ldots, c_r \in T^c(\Sigma \tilde{A})$. On montre que cette construction donne à la construction bar $\overline{B}(A) = T^c(\Sigma \tilde{A})$ une structure de $\mathcal{E}$-algèbre. (On obtient en fait une $\mathcal{E}$-algèbre dans la catégorie des *dg*-cogèbres ; c'est pourquoi on dit que $\overline{B}(A)$ forme une *algèbre de Hopf* sur $\mathcal{E}$.)

2.3. *Construction des opérations sur la construction bar*

On définit l'application $\widetilde{w} : T^c(\Sigma \tilde{A}) \otimes \cdots \otimes T^c(\Sigma \tilde{A}) \to \tilde{A}$ associée à un simplexe $w = (w_0, \ldots, w_d) \in \mathcal{E}(r)_d$. Cette application est donnée sur chaque composante $(\Sigma \tilde{A})^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\Sigma \tilde{A})^{\otimes n_r} \subset T^c(\Sigma \tilde{A}) \otimes \cdots \otimes T^c(\Sigma \tilde{A})$ par une somme d'opérations $u : A^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes n_r} \to A$ associées à des surjections $u \in \mathcal{X}(n_1 + \cdots + n_r)$ *admissibles* par rapport à w.

Dans le contexte de cette construction, il est naturel de représenter une surjection $u \in \mathcal{X}(n_1 + \cdots + n_r)$ par une application à valeurs dans l'ensemble $M = \{1_1, 2_1, \ldots, (n_1)_1, \ldots, 1_r, 2_r, \ldots, (n_r)_r\}$ constitué de r intervalles d'entiers. On note que chaque permutation w_i de $w = (w_0, \ldots, w_d)$ définit un ordre sur les intervalles de l'ensemble M. Explicitement, si on se donne $k_s, l_t \in M$ avec $s \neq t$, alors on écrit $k_s <_{w_i} l_t$ quand le couple (s, t) constitue une sous-suite de $\underline{w}_i = (w_i(1), \ldots, w_i(r))$. On a par exemple

$$k_1 <_{(1,3,2)} m_3 <_{(1,3,2)} l_2,$$

quelque soient $k_1 \in \{1_1, 2_1, \ldots, (n_1)_1\}$, $l_2 \in \{1_2, 2_2, \ldots, (n_2)_2\}$ et $m_3 \in \{1_3, 2_3, \ldots, (n_3)_3\}$.

Une surjection u est admissible par rapport à w quand on peut répartir les lignes de l'arrangement en table de u en $d + 1$ blocs

$$\underline{u} = \underbrace{\underline{u}^0_1, \ldots, \underline{u}^0_{e_0}}_{\underline{u}^0}, \underbrace{\underline{u}^1_0, \underline{u}^1_1, \ldots, \underline{u}^1_{e_1}}_{\underline{u}^1}, \ldots, \underbrace{\underline{u}^d_0, \underline{u}^d_1, \ldots, \underline{u}^d_{e_d}}_{\underline{u}^d}$$

tout en respectant les propriétés caractéristiques suivantes. On considère la ligne $\underline{u}^i_j$ de cet arrangement. On note $(k_1)_{s_1}, \ldots, (k_m)_{s_m}$ les valeurs des césures des lignes précédant $\underline{u}^i_j$ dont l'occurrence finale n'apparaît pas déjà dans la table (au dessus de la ligne $\underline{u}^i_j$). On suppose que ces valeurs sont ordonnées selon l'ordre défini par la permutation w_i. On a explicitement $(k_1)_{s_1} <_{w_i} \cdots <_{w_i} (k_m)_{s_m}$. (On observera que, par construction, un nombre donné $s \in \{1, \ldots, r\}$ apparaît toujours au plus une fois dans la suite $s_1, \ldots, s_m$.) Si $j = 0$ (on suppose donc que $\underline{u}^i_j$ est la première ligne du bloc $\underline{u}^i$), alors on demande que la ligne $\underline{u}^i_j$ soit constituée par la suite $\underline{u}^i_j = ((k_1)_{s_1}, \ldots, (k_l)_{s_l})$, avec $1 \leqslant l \leqslant m$. Sinon (si $j > 0$), on demande à avoir $\underline{u}^i_j = ((k_0)_{s_0}, (k_1)_{s_1}, \ldots, (k_l)_{s_l})$, le premier terme de cette ligne représentant la première occurrence d'une valeur $(k_0)_{s_0} \in M$ dans la suite $\underline{u}$ et vérifiant $(k_0)_{s_0} <_{w_i} (k_1)_{s_1}$. On demande aussi que les valeurs $k_s \in M$ associées à un nombre $s \in \{1, \ldots, r\}$ fixé apparaissent dans l'ordre croissant $k = 1, \ldots, n_s$ dans la suite $\underline{u}$.

On note bien que le premier élément d'une ligne $\underline{u}^i_j$ telle que $j = 1, \ldots, e_i$ représente la première occurrence d'une valeur $k_s \in M$ dans $\underline{u}$. La propriété inverse caractérise donc la première ligne d'un bloc de notre décomposition.

2.4. Exemples

On peut déterminer facilement les surjections $u \in \mathcal{X}(p+q)$ qui sont admissibles par rapport aux opérations $\theta_d \in \mathcal{E}(2)_d$. Ainsi, pour $\theta_0 = (\mathrm{id}) \in \mathcal{E}(2)_0$, les surjections admissibles sont de la forme

$$\underline{u} = (\underbrace{1_2}_{\underline{u}_1^0}, \underbrace{1_1, 1_2}_{\underline{u}_2^0}, \underbrace{2_1, 1_2}_{\underline{u}_3^0}, \underbrace{3_1, 1_2}_{\underline{u}_4^0}, \dots, \underbrace{p_1, 1_2}_{\underline{u}_{p+1}^0}).$$

On reconnait les éléments de $\mathcal{X}(p+1)$ associés aux opérations « *braces* » de Getzler–Kadeishvili (cf. [3,8,9]). Pour $\theta_1 = (\mathrm{id}, \tau) \in \mathcal{E}(2)_1$, on obtient les surjections de la forme

$$(\underbrace{1_2}_{\underline{u}_1^0}, \underbrace{1_1, 1_2}_{\underline{u}_2^0}, \underbrace{2_1, 1_2}_{\underline{u}_3^0}, \underbrace{3_1, 1_2}_{\underline{u}_4^0}, \dots, \underbrace{p_1}_{\underline{u}_{p+1}^0}, \underbrace{1_2, p_1}_{\underline{u}_0^1}, \underbrace{2_2, p_1}_{\underline{u}_1^1}, \underbrace{3_2, p_1}_{\underline{u}_2^1}, \dots, \underbrace{q_2, p_1}_{\underline{u}_q^1}).$$

On reconnait les éléments E_{pq}^1 introduits par Kadeishvili dans l'article [5].

Références

[1] H. Baues, Geometry of loop spaces and the cobar construction, Mem. Amer. Math. Soc. 25 (1980).

[2] C. Berger, B. Fresse, Une décomposition prismatique de l'opérade de Barratt–Eccles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 365–370.

[3] C. Berger, B. Fresse, Combinatorial operad actions on cochains, Prépublication, arXiv: math.AT/0109158, 2001.

[4] B. Fresse, Derived division functors and mapping spaces, Prépublication, arXiv: math.AT/0208091, 2001.

[5] T. Kadeishvili, Cochain operations defining Steenrod $\smile_i$-products in the bar construction, Prépublication, arXiv: math.AT/0207010, 2002.

[6] T. Kadeishvili, S. Saneblidze, Iterating the bar construction, Georgian Math. J. 5 (1998) 441–452.

[7] M. Mandell, E_∞ algebras and p-adic homotopy theory, Topology 40 (2001) 43–94.

[8] J. McClure, J.H. Smith, A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture, in: Recent Progress in Homotopy Theory, Baltimore, 2000, in: Contemp. Math., Vol. 293, American Mathematical Society, 2002, pp. 153–193.

[9] J. McClure, J.H. Smith, Multivariable cochain operations and little n-cubes, Prépublication, arXiv: math.QA/0106024, 2001.

[10] V. Smirnov, On the chain complex of an iterated loop space, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53 (1989) 1108–1119. English translation: Math. USSR-Izv. 35 (1990) 445–455.

[11] J.R. Smith, Operads and algebraic homotopy, Prépublication, arXiv: math.AT/0004003, 2000.