Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 239–242
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse complexe

Intégrabilité uniforme semi-globale d'une classe de fonctions plurisousharmoniques

Slimane Benelkourchi [a], Bensalem Jennane [b]

[a] *Laboratoire de mathèmatiques E. Picard, UMR-CNRS 5580, Université Paul Sabatier-Toulouse 3, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 04, France*
[b] *Département de mathématiques, faculté des sciences, Université Mohammed V, BP 1014, Rabat, Maroc*

Reçu le 3 juin 2003 ; accepté le 1er juillet 2003

Présenté par Pierre Lelong

Résumé

On montre que pour la famille $\mathcal{G}_s = \{u \in PSH(\mathbb{B}); u \leqslant 0; \max_{\mathbf{B}(0,s)} u \geqslant -1\}$, où $s < \exp(-1/2)$, les fonctions $\exp(-u)$, pour $u \in \mathcal{G}_s$, sont uniformément intégrables dans la boule $\mathbf{B}(0,\rho)$ pour $\rho < \rho(s) := (1 - s\exp(\frac{1}{2}))/(\exp(\frac{1}{2}) - s)$. De plus $\rho(s)$ est optimal. ***Pour citer cet article : S. Benelkourchi, B. Jennane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Semi-global uniform integrability for a class of pluri-subharmonic functions. We prove that for the family $\mathcal{G}_s = \{u \in PSH(\mathbb{B}); u \leqslant 0; \max_{\mathbf{B}(0,s)} u \geqslant -1\}$, where $s < \exp(-1/2)$, the functions $\exp(-u)$, for $u \in \mathcal{G}_s$, are uniformly integrable on the ball $\mathbf{B}(0,\rho)$ for $\rho < \rho(s) := (1 - s\exp(\frac{1}{2}))/(\exp(\frac{1}{2}) - s)$. Furthermore $\rho(s)$ is optimal. ***To cite this article: S. Benelkourchi, B. Jennane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit u une fonction plurisousharmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Alors le nombre de Lelong de u en un point $a \in \Omega$ peut être défini (voir [5]) par $\nu_u(a) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_u(\mathbf{B}(a,r))}{\tau_{2n-2} r^{2n-2}}$, où $\mu_u = \frac{1}{2\pi}\Delta u$ est la mesure de Riesz de u et $\tau_{2n-2} = \pi^{n-1}/(n-1)!$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{C}^{n-1}$.

Par des résultats de Kiselman (voir [3]), ce nombre peut être exprimé par $\nu_u(a) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\max_{|z-a|=r} u(z)}{\log r}$. Si $\mathcal{U} \subset PSH(\Omega)$ est une famille non vide de fonctions plurisousharmoniques dans Ω, alors on définit le nombre de Lelong de la classe $\mathcal{U}$ en a (voir [8] et [9]) $\vartheta_{\mathcal{U}}(a) := \lim_{r\to 0^+} \sup_{u\in\mathcal{U}} \frac{\mu_u(\mathbf{B}(a,r))}{\tau_{2n-2} r^{2n-2}}$ et si $\mathcal{U}$ est compacte dans $PSH(\Omega)$ muni de la topologie induite par $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on a

Adresses e-mail : benel@picard.ups-tlse.fr (S. Benelkourchi), b_jennane@hotmail.com (B. Jennane).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00332-7

$$\vartheta_{\mathcal{U}}(a) := \sup_{u\in\mathcal{U}} \nu_u(a). \tag{1}$$

Un résultat de Skoda (voir [7]) montre que si u est plurisousharmonique au voisinage de a et $\nu_u(a) < 2$, alors e^{-u} est intégrable au voisinage de a.

Dans [1] (cf. (4.4.5)), Hörmander montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\int_{|z|<\frac{1}{2}} e^{-u(z)}\, d\lambda(z) \leqslant c$ pour toute fonction plurisousharmonique négative u dans la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^n$ et vérifiant $u(0) = -1$.

Dans [9], on trouve un résultat similaire, mais pour une classe de fonctions plurisousharmoniques plus générale. Pour $0 \leqslant s \leqslant 1$, on note $\mathcal{G}_s = \{u \in PSH(\mathbb{B});\ \max_{\mathbf{B}(0,s)} u \geqslant -1;\ \max_{\mathbb{B}} u \leqslant 0\}$. Alors si l'on a $s < \exp(-1/2)$, il existe $0 < \rho < 1$ et une constante $c > 0$ tels que $\int_{|z|<\rho} e^{-u(z)}\, d\lambda(z) \leqslant c\ \forall u \in \mathcal{G}_s$. On se propose de donner la valeur optimale de ρ en fonction de s, le cas $s = 0$ donnant le rśultat (4.4.5) de [1]. On montre le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit s un réel ; $s < \exp(-\frac{1}{2})$. Alors pour tout réel $\rho < \frac{1-s\exp(1/2)}{\exp(1/2)-s}$, ils existent des constantes C et $M > 0$ telles que :*

$$\int_{\{|z|<\rho\}} \exp\bigl(-u(z)\bigr)\, d\lambda(z) \leqslant M \exp\Biggl(C \int_{|z|\leqslant\rho(s)} |u|\, d\lambda\Biggr); \quad \forall u \in \mathcal{G}_s. \tag{2}$$

Remarque 1. (1) La condition $s < \exp(-\frac{1}{2})$ est nécessaire ; La preuve en est que la fonction $u(z) = \frac{-1}{\log s} \log|z_1|$ est dans la classe $\mathcal{G}_s$ mais $\exp(-u)$ n'est intégrable sur aucun voisinage de 0 dès que la condition n'est pas vérifiée.

(2) Le nombre $\frac{1-s\exp(1/2)}{\exp(1/2)-s}$ est optimal. En effet, si $\rho \geqslant \frac{1-s\exp(1/2)}{\exp(1/2)-s}$, on considére $v(z) = 2\log\frac{|z_1-a|}{|1-\bar{a}z_1|}$ avec $a \in \mathbb{C},\ |a| = \rho$. Pour la fonction $v \in \mathcal{G}_s,\ \exp(-v)$ n'est pas intégrable sur la boule $\mathbf{B}(0,\rho)$.

2. Résultats préliminaires

Soit $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Pour $a \in \mathbb{B}$, on désigne par P_a la projection orthogonale sur la droite complexe $[a]$ passant par a et 0, et par $Q_a = I - P_a$ la projection sur l'hyperplan orthogonal à $[a]$. L'automorphisme involutif de $\mathbb{B}$ qui transforme a en 0 (voir [6]) est l'application $\varphi_a,\ \varphi_a(z) = \frac{a-P_a z - s_a Q_a z}{1-<z,a>}$ où $s_a = (1-|a|^2)^{1/2}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit hermitien usuel de $\mathbb{C}^n$.

Proposition 2.1. *Soit* $0 < \varepsilon < 1 - |a|$. *Alors*

(i) *L'image de la boule $\mathbf{B}(a,\varepsilon)$ par φ_a est l'ellipsoïde de centre $c = -\frac{\varepsilon^2}{(s_a^4-\varepsilon^2|a|^2)^2}a$ et de rayons r_1 et r_2 donnés par $r_1^2 = \frac{\varepsilon^2 s_a^4}{(s_a^4-\varepsilon^2|a|^2)^2}$ et $r_2^2 = \frac{\varepsilon^2 s_a^2}{s_a^4-\varepsilon^2|a|^2}$;*

(ii) *$\varphi_a(\mathbf{B}(a,\varepsilon))$ contient la boule $\mathbf{B}(0,\varepsilon')$ avec $\varepsilon' = \inf(\frac{\varepsilon}{s_a}, \frac{\varepsilon}{s_a^2+\varepsilon|a|}) > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$;*

(iii) *$\varphi_a(\mathbf{B}(0,\varepsilon))$ est contenu dans $\mathbf{B}(0,R)$ avec $R = \frac{\varepsilon+|a|}{1+\varepsilon|a|}$.*

Proposition 2.2. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ et K un compact régulier de $\mathbb{C}^n$. Alors*

(1) *l'application $u \mapsto \max_K u$ est continue sur $PSH(\Omega)$;*

(2) *l'application $(x,u) \mapsto \max_{\overline{B(x,\varepsilon)}} u$ est continue sur $\Omega_\varepsilon \times PSH(\Omega)$*

où $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega,\ \mathrm{dist}(z,\partial\Omega) > \varepsilon\}$ et $PSH(\Omega)$ est le cône des fonctions p.s.h. muni de la topologie induite par L^1_{loc}.

Démonstration. Soit (u_j) une suite de fonctions p.s.h. dans Ω convergeant dans L^1_{loc} vers une fonction u et soit A un réel tel que $\max_K u_j \leqslant A\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Alors on a

$$\max_K \limsup_{j\to\infty} u_j \leqslant A. \tag{3}$$

Posons $v = \limsup_{j\to\infty} u_j$, $N = \{v < u\}$ et $E = K \setminus N$ et considérons $G \Subset \Omega$ un ouvert contenant K.

$K \cap N$ étant pluripolaire dans G, on a $u_{K,G} = u^*_{E,G}$ et par la définition de la fonction extrémale on a $\frac{u-M}{M-\sup_E u} \leqslant u^*_{E,G}$ où $M = \sup_G u$. D'où $\frac{u-M}{M-\sup_E u} \leqslant u_{K,G}$. Puisque $u_{K,G} \equiv -1$ sur K, alors $u \leqslant \sup_E u$ sur K et $\max_K u \leqslant \max_E u$. D'après $u = v$ sur E on a $\max_K u \leqslant \max_E v \leqslant A$. D'où la semi continuité inférieure de $u \to \max_{\overline{B}(x,\varepsilon)} u$. Pour la semi continuité supérieure voir [2].

Pour la preuve de (2), soit (x_n, u_n) une suite de $\Omega_\varepsilon \times PSH(\Omega)$ convergente vers $(x, u) \in \Omega_\varepsilon \times PSH(\Omega)$ pour $t > 0$, il existe un $n_0 \geqslant 1$ tel que $|x_n - x| < t$ lorsque $n \geqslant n_0$, d'où $B(x, \varepsilon - t) \subset B(x_n, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon + t)$ pour $n \geqslant n_0$ et l'on a $\max_{B(x,\varepsilon-t)} u_n \leqslant \max_{B(x_n,\varepsilon)} u_n \leqslant \max_{B(x,\varepsilon+t)} u_n\ \forall n \geqslant n_0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \max_{B(x,\varepsilon-t)} u_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \max_{B(x_n,\varepsilon)} u_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \max_{B(x_n,\varepsilon)} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{B(x,\varepsilon+t)} u_n. \tag{4}$$

On fait tendre $t \to 0$ pour obtenir le résultat.

3. Preuve du Théorème (1.1)

Proposition 3.1. *Soient* $0 < \rho < 1$ *et* $\alpha < 1 - \rho$. *Alors il existe une constante* $C = C(s, \rho, \alpha) > 0$ *telle que* :

$$\max_{\mathbf{B}(x,t)} u \leqslant C \log \frac{t}{t'} + \max_{\mathbf{B}(x,t')} u \quad \forall u \in \mathcal{G}_s \tag{5}$$

pour tous $0 < t' \leqslant t \leqslant \alpha$, *et pour tout* $x \in \overline{\mathbf{B}}(0, \rho)$. *En plus on a l'encadrement suivant* :

$$\sup_{x\in\mathbf{B}(0,\rho)} \vartheta_{\mathcal{G}_s}(x) \leqslant C(s, \rho, \alpha) \leqslant \frac{1}{\log \frac{1-\rho}{\alpha} \inf\{1, \log \frac{s+\rho}{1+s\rho} / \log \frac{\alpha}{1+\alpha}\}}. \tag{6}$$

Démonstration. Soient $0 < t' \leqslant t \leqslant \alpha$ et $x \in \overline{\mathbb{B}}(0, \rho)$. La convexité de l'application $r \mapsto \max_{\overline{\mathbf{B}}(x,r)} u$ par rapport à $\log r$ implique

$$\frac{\max_{\overline{\mathbf{B}}(x,t)} u - \max_{\overline{\mathbf{B}}(x,t')} u}{\log t - \log t'} \leqslant \frac{\max_{\overline{\mathbf{B}}(x,1-\rho)} u - \max_{\overline{\mathbf{B}}(x,\alpha)} u}{\log(1-\rho) - \log\alpha} \leqslant \frac{-\max_{\overline{\mathbf{B}}(x,\alpha)} u}{\log(1-\rho) - \log\alpha}, \quad u \in \mathcal{G}_s.$$

D'où

$$\frac{\max_{\overline{\mathbf{B}}(x,t)} u - \max_{\overline{\mathbf{B}}(x,t')} u}{\log t - \log t'} \leqslant \sup_{(u,x)\in\mathcal{G}_s\times\overline{\mathbf{B}}(0,\rho)} \frac{-\max_{\overline{\mathbf{B}}(x,\alpha)} u}{\log((1-\rho)/\alpha)} = -\frac{1}{\log((1-\rho)/\alpha)} \inf_{(u,x)\in\mathcal{G}_s\times\overline{\mathbf{B}}(0,\rho)} \max_{\overline{\mathbf{B}}(x,\alpha)} u.$$

D'autre part, puisque l'application $(u, z) \mapsto \max_{\overline{\mathbf{B}}(z,\alpha)} u$ est continue sur $PSH(\mathbb{B}) \times \overline{\mathbf{B}}(0, \rho)$ et que $\mathcal{G}_s$ est un compact de $PSH(\mathbb{B})$, il existe $z_0 \in \overline{\mathbf{B}}(0, \rho)$ et $u_0 \in \mathcal{G}_s$ tels que

$$\gamma := \inf_{(u,z)\in\mathcal{G}_s\times\overline{\mathbf{B}}(0,\rho)} \max_{\overline{\mathbf{B}}(z,\alpha)} u = \max_{\overline{\mathbf{B}}(z_0,\alpha)} u_0 > -\infty.$$

Prenons $C = -\gamma/\log \frac{1-\rho}{\alpha}$. De la définition de γ on déduit que $-u_0/\gamma \leqslant -1$ sur $\mathbf{B}(z_0, \alpha)$ si bien que

$$-1 \leqslant \max_{\overline{\mathbf{B}}(0,s)} u_0 \leqslant |\gamma| \max_{\overline{\mathbf{B}}(0,s)} u_{\mathbf{B}(z_0,\alpha),\mathbb{B}},$$

où $u_{\mathbf{B}(z_0,\alpha),\mathbb{B}}$ est la fonction extrèmale relative de la boule $\mathbf{B}(z_0,\alpha)$ relativement à $\mathbb{B}$ donnée par $u_{\mathbf{B}(z_0,\alpha),\mathbb{B}}(z) = \sup\{v(z);\ v \in PSH(\mathbb{B});\ v \leqslant 0;\ v_{/\mathbf{B}(z_0,\alpha)} \leqslant -1\}$. Soit ψ l'automorphisme involutif de la boule $\mathbb{B}$ qui envoie z_0 en 0. D'aprés la Proposition 4.5.14 de [4] on a

$$\max_{\mathbf{B}(0,s)} u_{\mathbf{B}(z_0,\alpha),\mathbb{B}} = \max_{\psi(\mathbf{B}(0,s))} u_{\psi(\mathbf{B}(z_0,\alpha)),\mathbb{B}}$$

et d'aprés la Proposition 2.1 on a :

$$\psi\big(\mathbf{B}(z_0,\alpha)\big) \supset \mathbf{B}(0,\alpha') \quad \text{et} \quad \psi\big(\mathbf{B}(0,s)\big) \subset \mathbf{B}(0,s') \quad \text{avec } \alpha' = \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ et } s' = \frac{s+\rho}{1+s\rho}$$

D'où

$$\max_{\mathbf{B}(0,s)} u_{\mathbf{B}(z_0,\alpha),\mathbb{B}} \leqslant \max_{\mathbf{B}(0,s')} u_{\mathbf{B}(0,\alpha'),\mathbb{B}} = \max\left\{-1, -\frac{\log s'}{\log \alpha'}\right\}$$

et

$$C(s,\rho,\alpha) := \frac{|\gamma|}{\log\frac{1-\rho}{\alpha}} \leqslant \frac{1}{\log\frac{1-\rho}{\alpha}\inf\{1, \log s'/\log\alpha'\}}.$$

Achevons maintenant la démonstration du Théorème 1.1. Puisque $s < \exp(-\frac{1}{2})$ et $\rho < (1 - s\exp(\frac{1}{2}))/(\exp(\frac{1}{2}) - s)$ on a $2\log\frac{1+s\rho}{s+\rho} > 1$ et donc pour α assez petit

$$\frac{1}{\alpha} + 1 < \left(\frac{1-\rho}{\alpha}\right)^{2\log((1+s\rho)/(s+\rho))} \qquad \text{et} \quad \alpha < (1-\rho)\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

ce qui implique que pour α assez petit on a

$$\frac{1}{\log\frac{1-\rho}{\alpha}\inf\{1, \log\frac{1+s\rho}{s+\rho}/\log\frac{1+\alpha}{\alpha}\}} < 2$$

(6) donne alors $\sup_{x\in\overline{\mathbf{B}}(0,\rho)} \vartheta_{\mathcal{G}_s}(x) < 2$. D'où, il existe (d'aprés [9]) des constantes C et $M > 0$ tels que

$$\int_{\{|z|<\rho\}} \exp\big(-u(z)\big)\,\mathrm{d}\lambda(z) \leqslant M\exp\left(C\int_{|z|\leqslant\rho(s)} |u|\,\mathrm{d}\lambda\right); \quad \forall u \in \mathcal{G}_s\ ;\ \forall u \in \mathcal{G}_s.$$

Remarque 2. Si on considère la classe $\mathcal{G}_{s,r}^{\eta}$ des fonctions p.s.h. négatives sur $\mathbf{B}(0,r)$ vérifiant $\max_{\mathbf{B}(0,s)} u \geqslant -\eta$ alors le Théorème 1.1 reste vrai mais avec $s < r\exp(-\eta/2)$ et $\rho < r\frac{r - s\exp(\eta/2)}{r\exp(\eta/2) - s}$.

Références

[1] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, 3rd edition, North-Holland, Amsterdam, 1990.
[2] L. Hörmander, Notions of Convexity, in: Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1994.
[3] C.O. Kiselman, Densité des fonctions plurisousharminiques, Bull. Soc. Math. France 107 (1979) 295–304.
[4] M. Klimek, Pluripotential Theory, Oxford University Press, London, 1991.
[5] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Gordon et Breach, New York, 1969.
[6] W. Rudin, Function Theory in the Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.
[7] H. Skoda, Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France 100 (1972) 353–408.
[8] A. Zeriahi, Criterion of algebraicity for Lelong class and analytic sets, Acta Math. 184 (2000) 113–143.
[9] A. Zeriahi, Volume and capacity of sublevel sets of plurisubharmonic functions in a Lelong class, Prépublication du Laboratoire de Mathématiques Emile Picard, UMR 5580, néméro 165, 1999.