Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 271–276

Comptes Rendus Mathematique

Contrôle optimal

Contrôlabilité exacte frontière pour les équations des ondes quasi linéaires unidimensionnelles

Tatsien Li [a], Lixin Yu [b]

[a] Département de mathématiques, Université Fudan, Shanghai 200433, Chine
[b] Institut de mathématiques, Université Fudan, Shanghai 200433, Chine

Reçu le 13 mai 2003 ; accepté le 10 juin 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

En utilisant l'existence et l'unicité de la solution C^1 semi-globale du problème mixte avec des conditions aux limites non linéaires générales pour les systèmes hyperboliques quasi linéaires avec valeurs propres nulles, on présente une méthode permettant d'établir la contrôlabilité exacte frontière pour les équations des ondes quasi linéaires unidimensionnelles avec des conditions aux limites de différents types. ***Pour citer cet article : T.T. Li, L.X. Yu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations. By means of the existence and uniqueness of semi-global C^1 solution to the mixed initial-boundary value problem with general nonlinear boundary conditions for first order quasilinear hyperbolic systems with zero eigenvalues, we present a unified method to establish the exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations with boundary conditions of different types. ***To cite this article: T.T. Li, L.X. Yu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Consider the quasilinear wave equation

$$u_{tt} - \big(K(u, u_x)\big)_x = F(u, u_x, u_t), \tag{0.1}$$

where $K = K(u, v) \in C^2$, $F = F(u, v, w) \in C^1$ such that $K_v(u, v) > 0$ and $F(0, 0, 0) = 0$. For any one of the following boundary conditions on $x = 0$ [resp. on $x = 1$]

$$x = 0: \quad u = h(t) \quad [\text{resp. } x = 1: \quad u = \bar{h}(t)], \qquad (0.2)_1 \ [\text{resp. } (0.3)_1]$$

$$x = 0: \quad u_x = h(t) \quad [\text{resp. } x = 1: \quad u_x = \bar{h}(t)], \qquad (0.2)_2 \ [\text{resp. } (0.3)_2]$$

Adresse e-mail : dqli@fudan.edu.cn (T.T. Li).

doi:10.1016/S1631-073X(03)00327-3

$$x=0:\quad u_x-\alpha u=h(t)\quad [\text{resp. } x=1:\quad u_x+\beta u=\bar h(t)], \tag*{(0.2)$_3$ [resp. (0.3)$_3$]}$$

$$x=0:\quad u_x-\bar\alpha u_t=h(t)\quad [\text{resp. } x=1:\quad u_x+\bar\beta u_t=\bar h(t)], \tag*{(0.2)$_4$ [resp. (0.3)$_4$]}$$

where α, $\bar\alpha$, β and $\bar\beta$ are positive constants, by means of a unified method, we get

Theorem 0.1. *Let $T>1/\sqrt{K_v(0,0)}$. For any given initial state (φ,ψ) and final state (Φ,Ψ) with small $C^2[0,1]\times C^1[0,1]$ norm, there exist boundary controls $h(t)$ and $\bar h(t)$ with small $C^2[0,T]$ norm (for* (0.2)$_1$ *and* (0.3)$_1$*) or small $C^1[0,T]$ norm (for* (0.2)$_2$–(0.2)$_4$ *and* (0.3)$_2$–(0.3)$_4$*), such that the mixed problem for Eq.* (0.1) *with the initial condition*

$$t=0:\quad u=\varphi(x),\quad u_t=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{0.4}$$

and the boundary conditions (0.2) *and* (0.3) *admits a unique C^2 solution $u=u(t,x)$ with small C^2 norm on the domain $R(T)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$, which verifies the final condition*

$$t=T:\quad u=\Phi(x),\quad u_t=\Psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{0.5}$$

Theorem 0.2. *Let $T>2/\sqrt{K_v(0,0)}$ and $\bar\alpha\neq 1/\sqrt{K_v(0,0)}$ in* (0.2)$_4$*. For any given initial state (φ,ψ) and final state (Φ,Ψ) with small $C^2[0,T]\times C^1[0,T]$ norm and any given function $h(t)$ with small $C^2[0,T]$ norm (for* (0.2)$_1$*) or small $C^1[0,T]$ norm (for* (0.2)$_2$–(0.2)$_4$*) such that the conditions of C^2 compatibility are satisfied at the points* $(0,0)$ *and* $(T,0)$ *respectively, there exists a boundary control $\bar h(t)$ with small $C^2[0,T]$ norm (for* (0.3)$_1$*) or small $C^1[0,T]$ norm (for* (0.3)$_2$–(0.3)$_4$*), such that the mixed problem* (0.1), (0.4) *and* (0.2), (0.3) *admits a unique C^2 solution $u=u(t,x)$ with small C^2 norm on $R(T)$, which verifies* (0.5).

1. Introduction et résultats principaux

On considère l'équation des ondes quasi linéaire unidimensionnelle

$$u_{tt}-\big(K(u,u_x)\big)_x=F(u,u_x,u_t), \tag{1}$$

où $K=K(u,v)$ est une fonction C^2 satisfaisant $K_v(u,v)>0$ et $F=F(u,v,w)$ est une fonction C^1 telle que $F(0,0,0)=0$.

En prenant les conditions aux limites suivantes en $x=0$ et en $x=1$:

$$x=0:\quad u=h(t), \tag{2}$$

$$x=1:\quad u_x=\bar h(t), \tag{3}$$

où $h(t)$ est de classe C^2 et $\bar h(t)$ de classe C^1, on peut établir la contrôlabilité exacte frontière locale correspondante.

Théorème 1.1. *Soit $T>1/\sqrt{K_v(0,0)}$. Si les normes $C^2[0,1]\times C^1[0,1]$ de (φ,ψ) et (Φ,Ψ) sont suffisamment petites, il existe des contrôles frontières h et $\bar h$ avec normes $C^2[0,T]$ (pour h) et $C^1[0,T]$ (pour $\bar h$) petites, tels que le problème mixte de l'Éq.* (1) *avec la condition initiale*

$$t=0:\quad u=\varphi(x),\quad u_t=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4}$$

et les conditions aux limites (2) *et* (3) *admette une unique solution $u=u(t,x)$ avec une norme C^2 petite sur le domaine $R(T)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1\}$, qui vérifie la condition finale*

$$t=T:\quad u=\Phi(x),\quad u_t=\Psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{5}$$

Théorème 1.2. *Soit $T > 2/\sqrt{K_v(0,0)}$. Si les normes $C^2[0,1] \times C^1[0,1]$ de (φ, ψ) et (Φ, Ψ) et la norme $C^2[0,T]$ de h sont suffisamment petites et les conditions de compatibilité C^2 aux points $(0,0)$ et $(T,0)$ sont satisfaites, il existe un contrôle frontière $\bar{h}$ avec norme $C^1[0,T]$ petite, tel que le problème mixte* (1), (4) *et* (2), (3) *admette une unique solution $u = u(t,x)$ avec norme C^2 petite sur le domaine $R(T) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, qui vérifie* (5).

Remarque 1. En utilisant la même méthode, le même type de résultats s'étend au cas où l'on prend l'une quelconque des conditions aux limites suivantes en $x = 0$ [resp. $x = 1$] :

$$x = 0: \quad u = h(t) \quad [\text{resp. } x = 1: \quad u = \bar{h}(t)], \tag*{$(6)_1$ [resp. $(7)_1$]}$$

$$x = 0: \quad u_x = h(t) \quad [\text{resp. } x = 1: \quad u_x = \bar{h}(t)], \tag*{$(6)_2$ [resp. $(7)_2$]}$$

$$x = 0: \quad u_x - \alpha u = h(t) \quad [\text{resp. } x = 1: \quad u_x + \beta u = \bar{h}(t)], \tag*{$(6)_3$ [resp. $(7)_3$]}$$

$$x = 0: \quad u_x - \bar{\alpha} u_t = h(t) \quad [\text{resp. } x = 1: \quad u_x + \bar{\beta} u_t = \bar{h}(t)], \tag*{$(6)_4$ [resp. $(7)_4$]}$$

où $\alpha,\ \bar{\alpha},\ \beta$ et $\bar{\beta}$ sont des constantes positives, $h(t)$ et $\bar{h}(t)$ sont de classe C^2 pour $(6)_1$ et $(7)_1$ ou de classe C^1 pour $(6)_2$–$(6)_4$ et $(7)_2$–$(7)_4$, mais dans le Théorème 1.2 on doit supposer que

$$\bar{\alpha} \neq \frac{1}{\sqrt{K_v(0,0)}}. \tag{8}$$

Remarque 2. Dans le cas spécial où K et F ne dépendent pas de u et on prend la condition aux limites $(6)_1$ ou $(6)_3$ en $x = 0$, le Théorème 1.2 a été démontré dans [2] et [5], mais la méthode employée ne peut pas être appliquée au cas général.

Remarque 3. La conclusion des Théorèmes 1.1 et 1.2 est encore valable, si u_x est remplacé par $K(u, u_x)$ dans les conditions aux limites $(6)_2$–$(6)_4$ et $(7)_2$–$(7)_4$ et si, au lieu de (8), on suppose que $\bar{\alpha} \neq \sqrt{K_v(0,0)}$.

2. Réduction

Soient $v = u_x,\ w = u_t$. L'Éq. (1) peut être réduite au système strictement hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_t = w, \\ v_t - w_x = 0, \\ w_t - K_v(u,v)v_x = F(u,v,w) + K_u(u,v)v \overset{\text{déf.}}{=} \widetilde{F}(u,v,w) \end{cases} \tag{9}$$

avec trois valeurs propres réelles $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_i\ (i = 1,2,3)$, où

$$\lambda_1 = -\sqrt{K_v(u,v)} < \lambda_2 = 0 < \lambda_3 = \sqrt{K_v(u,v)}, \tag{10}$$

ou bien au système strictement hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_x - \dfrac{1}{K_v(u,v)} w_t = -\dfrac{\widetilde{F}(u,v,w)}{K_v(u,v)} \overset{\text{déf.}}{=} \widetilde{\widetilde{F}}(u,v,w), \\ w_x - v_t = 0 \end{cases} \tag{11}$$

avec trois valeurs propres réelles $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mu_i \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\lambda_i}$ $(i = 1,2,3)$. En outre, on a les mêmes vecteurs propres à gauche pour (9) et (11) :

$$l_1 = \big(0, \sqrt{K_v}, 1\big), \qquad l_2 = (1,0,0), \qquad l_3 = \big(0, -\sqrt{K_v}, 1\big). \tag{12}$$

Soient

$$v_i = l_i(U)U \quad (1 = 1,\ 2,\ 3), \tag{13}$$

où $U = (u, v, w)^{\mathrm{T}}$. La condition aux limites (2) peut être écrite sous la forme suivante

$$x = 0: \quad v_1 + v_3 = 2h'(t). \tag{14}$$

Lemme 2.1. *Si $U = U(t,x) = (u(t,x), v(t,x), w(t,x))^{\mathrm{T}}$ est une solution C^1 du système* (9) [*resp.* (11)] *sur le domaine $D = \{(t,x) \mid t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$, telle que*

$$t = t_1 \text{ (ou } t_2\text{)}: \quad u_x(t,x) = v(t,x), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

$$[\textit{resp. } x = x_1 \text{ (ou } x_2\text{)}: \quad u_t(t,x) = w(t,x), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2], \tag{15}$$

alors

$$u_x = v \quad [\textit{resp. } u_t = w] \quad \text{sur } D, \tag{16}$$

donc $U = U(t,x)$ est une solution C^1 du système (11) [*resp.* (9)] *et $u = u(t,x)$ est une solution C^2 de l'Éq.* (1) *sur D.*

3. Solution C^1 semi-globale pour les systèmes hyperboliques quasi linéaires avec valeurs propres nulles

On considère le système hyperbolique quasi linéaire

$$u_t + A(u)u_x = F(u), \tag{17}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)^{\mathrm{T}}$, $F(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))^{\mathrm{T}}$ est une fonction régulière de u telle que $F(0) = 0$ et $A(u) = (a_{ij}(u))$ est une matrice $n \times n$ de fonctions régulières de u, telle que sur le domaine considéré, $A(u)$ possède n valeurs propres réelles :

$$\lambda_p(u) < \lambda_q(u) \equiv 0 < \lambda_r(u) \quad (p = 1, \dots, l;\ q = l+1, \dots, m;\ r = m+1, \dots, n) \tag{18}$$

et un ensemble complet de vecteurs propres à gauche $l_i(u) = (l_{i1}(u), \dots, l_{in}(u))$ $(i = 1, \dots, n)$.

Soient

$$v_i = l_i(u)u \quad (i = 1, \dots, n). \tag{19}$$

On donne la condition initiale

$$t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{20}$$

et les conditions aux limites

$$x = 0: \quad v_r = G_r(t, v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_m) + H_r(t) \quad (r = m+1, \dots, n), \tag{21}$$

$$x = 1: \quad v_p = G_p(t, v_{l+1}, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n) + H_p(t) \quad (p = 1, \dots, l), \tag{22}$$

où, sans perte de généralité, on suppose que

$$G_r(t, 0, \dots, 0) \equiv G_p(t, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (r = m+1, \dots, n;\ p = 1, \dots, l). \tag{23}$$

Lemme 3.1. *Soient $l_{ij}(u)$, $\lambda_i(u)$, $f_i(u)$, $G_r(t,\cdot)$, $G_p(t,\cdot)$, $H_r(t)$, $H_p(t)$ $(i, j = 1, \dots, n;\ r = m+1, \dots, n;\ p = 1, \dots, l)$ et $\varphi(x)$ des fonctions de classe C^1 sur leurs domaines de définition. Supposons* (18), (23) *et $F(0) = 0$. Supposons de plus que les conditions de compatibilité C^1 sont satisfaites aux points $(0,0)$ et $(0,1)$. Alors, pour tout $T_0 > 0$, le problème mixte* (17) *et* (20)–(22) *admet une unique solution $u = u(t,x)$ avec norme C^1 petite sur le domaine $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, pourvu que les normes $\|\varphi\|_{C^1[0,1]}$ et $\|(H_r, H_p)\|_{C^1[0,T_0]}$ $(r = m+1, \dots, n;\ p = 1, \dots, l)$ soient suffisamment petites (dépendant de T_0).*

4. Démonstration des Théorèmes 1.1 et 1.2

Comme dans [2–4], pour démontrer les Théorèmes 1.1 et 1.2, il suffit d'établir les lemmes suivants respectivement.

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1*, l'Éq.* (1) *admet une solution* $u = u(t, x)$ *avec norme* C^2 *petite sur le domaine* $R(T)$*, qui satisfait aux conditions* (4) *et* (5).

Lemme 4.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.2*, l'Éq.* (1) *avec la condition aux limites* (2) *en* $x = 0$ *admet une solution* $u = u(t, x)$ *avec norme* C^2 *petite sur le domaine* $R(T)$*, qui satisfait aux conditions* (4) *et* (5).

Ci-dessous, on donne les grandes lignes de la démonstration du Lemme 4.2. La démonstration du Lemme 4.1 est similaire (cf. [1] et [3,4]).

D'après la définition de T, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$T > \max_{|U|\leqslant\varepsilon_0} \frac{2}{\sqrt{K_v(u,v)}} \stackrel{\text{déf.}}{=} 2T_1. \tag{24}$$

(i) D'abord, on considère le problème mixte I (resp. II) du système (9) avec la condition initiale

$$\begin{aligned} &t = 0: \quad U = U_0(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \big(\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\big[\text{resp. } t = T: \quad U = U_T(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \big(\Phi(x), \Phi'(x), \Psi(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\big] \end{aligned} \tag{25}$$

et la condition aux limites (14) sur $0 \leqslant t \leqslant T_1$ [resp. $T - T_1 \leqslant t \leqslant T$] et

$$x = 1: \quad v_1 = f_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1 \quad [\text{resp. } x = 1: \quad v_3 = f_3(t), \quad T - T_1 \leqslant t \leqslant T], \tag{26}$$

où les v_i $(i = 1, 2, 3)$ sont définies par (13), la fonction f_1 [resp. f_3] est arbitraire, de norme $C^1[0, T_1]$ [resp. $C^1[T - T_1, T]$] petite, et satisfait les conditions de compatibilité C^1 au point (0, 1) [resp. $(T, 1)$].

Grâce au Lemme 3.1, le problème I [resp. II] admet une unique solution C^1 semi-globale $U = U^{(1)}(t, x)$ [resp. $U = U^{(2)}(t, x)$] avec norme C^1 petite, en particulier, $|U^{(1)}(t, x)| \leqslant \varepsilon_0$ [resp. $|U^{(2)}(t, x)| \leqslant \varepsilon_0$], sur le domaine $\{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ [resp. $\{(t, x) \mid T - T_1 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$]. Donc, on peut déterminer les valeurs de U en $x = 0$ pour $U = U^{(1)}(t, x)$ [resp. $U = U^{(2)}(t, x)$] :

$$\begin{aligned} &x = 0: \quad U = a(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1 \\ &\big[\text{resp. } x = 0: \quad U = b(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \big(b_1(t), b_2(t), b_3(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad T - T_1 \leqslant t \leqslant T\big]. \end{aligned} \tag{27}$$

Les normes C^1 de a et b sont suffisamment petites et

$$a_1'(t) = a_3(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1 \quad [\text{resp. } b_1'(t) = b_3(t), \quad T - T_1 \leqslant t \leqslant T]. \tag{28}$$

(ii) Maintenant, on change l'ordre des variables $t,\ x$ et on considère le problème mixte du système (11) avec la condition initiale

$$x = 0: \quad U = c(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{29}$$

et les conditions aux limites

$$t = 0: \quad v_3 = l_3\big(U_0(x)\big)U_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{30}$$

$$t = T: \quad v_1 = l_1\big(U_T(x)\big)U_T(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{31}$$

où $U_0(x)$ et $U_T(x)$ sont données par (25), les v_i $(i = 1, 2, 3)$ sont définies par (13) et $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))^{\mathrm{T}}$ est une fonction de norme $C^1[0, T]$ petite, satisfaisant à la condition aux limites (14) sur $0 \leqslant t \leqslant T$, telle que

$$c(t) = \begin{cases} a(t), & 0 \leqslant t \leqslant T_1, \\ b(t), & T - T_1 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \quad \text{et} \quad c_1'(t) = c_3(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{32}$$

D'après le Lemme 2.1, les conditions de compatibilité C^1 aux points (0,0) et $(T, 0)$ sont satisfaites. Grâce à nouveau au Lemme 3.1, le problème (11) et (29)–(31) admet une unique solution C^1 semi-globale $U = U(t, x)$ de norme C^1 petite, en particulier, $|U(t, x)| \leqslant \varepsilon_0$, sur le domaine $R(T) = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

(ii) Au vu du Lemme 2.1, $U = U(t, x)$ et $U = U^{(1)}(t, x)$ vérifient le système (11), la condition intitiale (29) sur $0 \leqslant t \leqslant T_1$ et la condition aux limites (30). D'après l'unicité de solution C^1 (voir [6]), on en déduit que $U(t, x) \equiv U^{(1)}(t, x)$ sur le domaine $\{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_1(1 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. En particulier, on obtient la première condition dans (25). D'une manière similaire, on obtient la deuxième condition dans (25).

Grâce au Lemme 2.1, $u = u(t, x)$ est une solution C^2 de l'Éq. (1) sous la forme requise par le Lemme 4.2.

Références

[1] T.T. Li, Y. Jin, Chinese Ann. Math. Ser. B 22 (2001) 325–336.
[2] T.T. Li, B.P. Rao, Chinese Ann. Math. Ser. B 23 (2002) 209–218.
[3] T.T. Li, B.P. Rao, SIAM J. Control Optim. 41 (2003) 1748–1755.
[4] T.T. Li, B.P. Rao, Y. Jin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 219–224.
[5] T.T. Li, Y.L. Xu, Local exact boundary controllability for nonlinear vibrating string equations, Internat. J. Modern Phys. B., in preparation.
[6] T.T. Li, W.C. Yu, Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems, in: Duck University Mathematics Series, Vol. V, 1985.