Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 227–232
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre/Topologie

Une description combinatoire du monoïde des enlacements

Florian Deloup [1,2]

Université Paul Sabatier, Toulouse III, laboratoire Émile Picard de mathématiques, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

Reçu le 21 janvier 2003 ; accepté après révision le 17 juin 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Un enlacement est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\lambda : G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur un groupe abélien fini. L'ensemble des classes d'isomorphismes d'enlacements forme un monoïde $\mathfrak{E}$, pour la somme orthogonale, à un nombre infini de générateurs et de relations, sans simplification. Une présentation de $\mathfrak{E}$ se trouve dans Kawauchi et Kojima (Math. Ann. 253 (1980) 29–42). Nous proposons une nouvelle présentation de $\mathfrak{E}$ qui permet de reconnaître si un enlacement possède un facteur orthogonal donné. ***Pour citer cet article : F. Deloup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

A combinatorial description of the monoid of linkings. A linking pairing is a nondegenerate symmetric bilinear pairing $\lambda : G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on a finite Abelian group. The set of isomorphism classes of linking pairings is a monoid $\mathfrak{E}$ for orthogonal sum, infinitely generated, infinitely related and without cancellation. A presentation of $\mathfrak{E}$ is given in Kawauchi and Kojima (Math. Ann. 253 (1980) 29–42). We propose a new presentation of $\mathfrak{E}$ which permits to recognize whether a linking pairing has a given orthogonal summand. ***To cite this article: F. Deloup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

A linking pairing is a pair (G, b) where G is a finite Abelian group and $b : G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is a nondegenerate symmetric bilinear pairing. Any closed oriented $(4n-1)$-manifold carries a natural nondegenerate linking pairing $\lambda_M : \mathrm{Tors}\, H_{2n-1}(M) \times \mathrm{Tors}\, H_{2n-1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. A complete system of invariants of isomorphic linking pairings was already known by Seifert [7] on odd-primary groups and by Burger [1] in the general case. The complete classification was achieved by Wall [8] in the case of odd-primary groups and by Kawauchi and Kojima [5] in the general case.

The set of isomorphism classes of all linking pairings on finite Abelian groups form a monoid $\mathfrak{E}$ for the orthogonal sum $\oplus$. A presentation of $\mathfrak{E}$ by generators and relations is proposed in [5]. It is infinitely presented

Adresse e-mail : deloup@math.huji.ac.il (F. Deloup).

1 Addresse actuelle : Institut de mathématiques, Université Hébraïque de Jérusalem, Givat Ram, Jérusalem 91904, Israël.

2 Boursier Marie Curie. HMPF-CT-2001-01174.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00308-X

and related, without cancellation. In this Note, we suggest an alternative approach, based on a classical system of invariants (rank and signature) of $\mathfrak{E}$. Any linking pairing (G,λ) has a unique orthogonal splitting

$$(G,\lambda)=\bigoplus_{p \text{ prime}}\left(G^p,\lambda^p\right),$$

where (G^p,λ^p) is a linking pairing on a (finitely generated) p-group. It is therefore sufficient to consider linking pairings on p-groups. In this Note, we consider mainly the case $p=2$. (The classification is well known to be combinatorially simpler for $p>2$.) Further, any linking pairing (G,λ) on a 2-group has an orthogonal splitting

$$(G,\lambda)=\bigoplus_{k\geqslant 1}(G_k,\lambda_k),$$

where (G_k,λ_k) is a linking pairing on a homogeneous group of exponent p^k (that is, G_k is a free $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$-module). The rank $\rho_k(\lambda)$ of G_k is an additive invariant of (G,λ) (with respect to orthogonal sum). The second invariant $\sigma_k(\lambda)$ is the argument of the Gauss sum $\sum_{x\in G}\exp(\mathrm{i}2^k\pi\lambda(x,x))$ or ∞ (if the argument is not defined). The argument of such Gauss sums is well known to be an element of the cyclic group $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (see, for example, [6, §2]). So $\sigma_k(\lambda)$ takes values in the monoid $\overline{\mathbb{Z}}_8$ obtained by adjoining ∞ to the cyclic group $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. It is convenient to consider these two invariants together as a map $(\rho(\lambda),\sigma(\lambda)):\mathbb{N}^\times\to\mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8$. It is known that $(\rho(\lambda),\sigma(\lambda))$ is a complete system of invariants of the isomorphism class of (G,λ) (see [5, Theorem 4.1]).

In this Note, we describe precisely the image of (ρ,σ) (see Theorem 2.1). This leads to a new presentation of $\mathfrak{E}$ (Corollary 2.2 and Theorem 2.4) as well as a procedure to recognize whether a linking pairing has a specified orthogonal summand (Corollary 2.3 and Remark 1).

1. Introduction

Un enlacement (G,b) sur un groupe abélien fini est une forme bilinéaire symétrique $b:G\times G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont l'homomorphisme adjoint $\hat{b}:G\to G^*=\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est bijectif. Les enlacements apparurent tout d'abord en topologie comme invariants algébriques mesurant l'enlacement des $(2n-1)$-cycles dans une variété fermée orientée de dimension $(4n-1)$. Une telle variété M possède en effet un enlacement $\lambda_M:\mathrm{Tors}\,H_{2n-1}(M)\times\mathrm{Tors}\,H_{2n-1}(M)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (see [7]). Minkowski avait déjà indiqué comment obtenir un système complet d'invariants de la classe d'isomorphismes de λ_M à l'aide de systèmes d'équations de congruence et de sommes de Gauss. Un système complet d'invariants numériques était connu de Seifert, dans le cas de p-groupes avec p impair, et de Burger [1] dans le cas général. La classification complète fut ensuite poursuivie par Wall [8] dans le cas des p-groupes avec p impair, puis complétée par Kawauchi et Kojima [5] dans le cas général.

(On peut d'ailleurs définir de façon analogue une forme bilinéaire $b:\mathrm{Tors}\,H_{2n}(M)\times\mathrm{Tors}\,H_{2n}(M)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur toute variété fermée orientée M de dimension $(4n+1)$ mais alors b est antisymétrique. Les questions relatives à la classification sont alors grandement simplifiées, de même que la formulation combinatoire présentée dans cette Note.)

Deux enlacements (G,b) et (G',b') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi:G\to G'$ tel que $b'(\phi(x),\phi(y))=b(x,y)$ pour tout $x,y\in G$. Étant donnés deux enlacements (G,b), (G',b'), leur somme orthogonale $(G,b)\oplus(G',b')$, notée également $b\oplus b'$, est définie par $(b\oplus b')((x,x'),(y,y'))=b(x,y)+b'(x',y')$ pour tous $x,y\in G$ et $x',y'\in G'$. L'ensemble des classes d'isomorphismes d'enlacements forme un monoïde $\mathfrak{E}$ pour la somme orthogonale $\oplus$. Ce monoïde possède une infinité de générateurs et de relations et est sans simplification.

Une présentation par générateurs et relations de $\mathfrak{E}$ est proposée dans [5]. La difficulté majeure réside dans les enlacements sur les 2-groupes. Il ne semble pas exister de classification des monoïdes dans laquelle $\mathfrak{E}$ s'insèrerait naturellement. Dans cette Note, nous proposons une autre approche pour éclaircir la nature de $\mathfrak{E}$.

La motivation pour cette approche est topologique. En effet, il se trouve que le système complet d'invariants proposé dans [5] se déduit de théories topologiques des champs abéliennes [4,3]. Pour que ces théories trouvent une application proprement topologique, on cherche à décrire de façon combinatoire comment reconstruire la classe d'isomorphisme d'un enlacement à partir de ses invariants. Cette idée conduit à décrire l'« image » de ce système d'invariants, ce que nous nous proposons de faire dans cette Note. Comme conséquences, nous obtenons une nouvelle présentation combinatoire de $\mathfrak{M}$, ainsi qu'un algorithme pour reconnaître un facteur orthogonal d'un enlacement.

Dans cette Note, nous considérons principalement les enlacements sur les 2-groupes (et le sous-monoide $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}$ correspondant). En effet, les questions que nous considérons sont aisées à résoudre sur les p-groupes pour p premier impair : elles dépendent uniquement d'une condition modulo 2 qui est locale, i.e., que l'on peut vérifier directement sur chaque composante p-homogène. Aussi ne traitons nous que brièvement ce cas, en fin d'article.

2. Résultats

Il est connu que le rang et la signature constituent un système d'invariants complets des enlacements sur les 2-groupes (voir, par exemple, [5, Théorème 4.1]). Plus précisément, rappelons que tout enlacement (G,λ) où G est un 2-groupe se scinde en somme orthogonale

$$(G,\lambda) = \bigoplus_{k\geqslant 1}(G_k,\lambda_k),$$

où (G_k,λ_k) est un enlacement sur un groupe homogène d'exposant 2^k (i.e., G_k est un $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$-module libre). Une telle décomposition n'est pas unique en général, mais pour tout $k \geqslant 1$, le rang $\rho_k(\lambda) = \operatorname{rang} G_k \in \mathbb{N}$ [3] ne dépend que de G et est en particulier un invariant de (G,λ). Le second invariant est défini à partir de sommes de Gauss. Soit $k \geqslant 1$. Considérons le nombre complexe

$$\Gamma_k(G,\lambda) = \sum_{x\in G} \exp\bigl(\mathrm{i}2^k\pi\lambda(x,x)\bigr).$$

Il est bien connu que si $\Gamma_k(G,\lambda) \neq 0$ alors $\frac{\Gamma_k(G,\lambda)}{|\Gamma_k(G,\lambda)|}$ est une racine 8-ème de l'unité (voir, par exemple, [6, §2]). On définit alors

$$\sigma_k(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}\Gamma_k(G,\lambda) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \text{si } \Gamma_k(G,\lambda) \neq 0,\\ \infty & \text{si } \Gamma_k(G,\lambda) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overline{\mathbb{Z}}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Il s'agit du monoïde obtenu en adjoignant au groupe cyclique à 8 éléments un élément supplémentaire noté ∞, avec la règle $\infty + a = a + \infty = \infty = \infty + \infty$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Il résulte de ce qui précède que σ définit une application $\mathbb{N}^\times \to \overline{\mathbb{Z}}_8$. On peut ainsi regrouper les invariants ρ et σ sous la forme d'une seule application $(\rho,\sigma): \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$.

Soit $\mathcal{M}$ un monoïde additif et I un suite d'entiers consécutifs. Un tableau est une application $I \to \mathcal{M}$, qu'il sera pratique de considérer comme un diagramme de la forme

I	k	$k+1$	$\ldots$	l
$\mathcal{M}$	m_k	m_{k+1}	$\ldots$	m_l

Afin de simplifier la notation, les notations de l'intervalle ainsi que du monoïde seront omises des tableaux suivants. La longueur d'un tableau T est l'entier $1 + \sup_{(m,n)\in I\times I} |m-n| \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un tableau T' est un prolongement d'un tableau T si T' prolonge T en tant qu'application. Dans ce cas, T est un tableau extrait de T. Étant donné un tableau $T: I \to \mathcal{M}$ quelconque, on peut toujours le prolonger trivialement sur $\mathbb{N}$ entier en définissant $\widetilde{T}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N} - I$. En pratique, on confondra un tableau T et son prolongement trivial $\widetilde{T}$ à $\mathbb{N}$ ainsi défini. Ainsi on

[3] La convention de Bourbaki est suivie ici : $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ et $\mathbb{N}^\times = \{1,2,\ldots\}$.

dira qu'un tableau T est *fini* s'il est de longueur finie ou s'il est le prolongement trivial $\widetilde{T}'$ d'un tableau T' de longueur finie. (C'est la définition habituelle de support fini.) Comme $\mathcal{M}$ est un monoïde, l'addition de tableaux est bien définie. La somme de deux tableaux T_1 et T_2 est définie sur $\mathbb{N}$ par $T_1 + T_2 = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2$ où $\widetilde{T}_i$, $i = 1, 2$, désigne le prolongement trivial à $\mathbb{N}$. L'ensemble des tableaux $\mathbb{N} \to \mathcal{M}$ forme un monoïde. L'élément neutre 0 est le tableau envoyant $\mathbb{N}$ sur 0. Le délimiteur à gauche (resp. à droite) d'un tableau $T : I \to \mathcal{M}$ est l'élément $-1 \leqslant \operatorname{Inf} I - 1 < \infty$ (resp. l'élément $0 \leqslant \operatorname{Sup} I + 1 \leqslant \infty$).

Considérons à présent les tableaux à valeurs dans le monoïde $\mathcal{M} = \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$, que nous noterons $T : m \mapsto (r(m), s(m))$, avec $r(m) \in \mathbb{N}$ (rang formel) and $s(m) \in \overline{\mathbb{Z}}_8$ (signature formelle). Nous dirons qu'un tableau est *admissible* s'il existe un enlacement (G, λ) sur un 2-groupe tel que $r(m) = \rho_m(\lambda)$ et $s(m) = \sigma_m(\lambda)$ pour tout $m \in I$.

Un entier $m \in I$ sera dit *régulier* pour un tableau T si $r(m) = 0$ ou $s(m) \neq \infty$. On note $I_{\mathrm{reg}} \subseteq I$ l'ensemble des éléments réguliers de T. Présentons quatre types particuliers distincts de tableaux :

- Type T_0. Tout tableau de longueur impaire de la forme $T = (0, s(m))_{m \in I}$.
- Type T_1. Tout tableau de la forme $\begin{array}{|c|}\hline m \\ \hline 1 \\ \hline \infty \\ \hline\end{array}$ pour un entier non nul m.
- Type T_2. Tout tableau de la forme $\begin{array}{|c|}\hline m \\ \hline 2 \\ \hline \infty \\ \hline\end{array}$ pour un entier non nul m.
- Type T_3. Tout tableau de longueur impaire tel que $I = I_{\mathrm{reg}}$.

Le résultat principal est un critère nécessaire et suffisant pour qu'un tableau soit admissible.

Théorème 2.1. *Un tableau fini* $T : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$, $m \mapsto (r(m), s(m))$ *est admissible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites* :

(1) $r(I_{\mathrm{reg}}) \subseteq 2\mathbb{N}$.
(2) $s(m) = \sum_{k \geqslant m+1} r(k) \pmod 2$ *pour tout* $m \in I_{\mathrm{reg}}$.
(3) $s(m) + s(m+1) = 2 \sum_{k \geqslant m+2} r(k) \pmod 4$ *pour tout* $\{m, m+1\} \subseteq I_{\mathrm{reg}}$.
(4) *Pour tout tableau* T_{ext} *extrait de* T *et pour toute paire de délimiteurs* m, n *de* T_{ext} *dans* I_{reg}, *les conditions suivantes sont vérifiées* :

Type de T_{ext}	T_0	T_1	T_2	T_3
$s(m) - s(n)$	0	± 1	$0, \pm 2$	$0, 4$

Compte-tenu du fait que le groupe d'un enlacement est fini, il est aisé d'observer sur le rang et la signature que tout tableau admissible est fini. Ceci garantit en particulier que les sommes intervenant dans les conditions (2) et (3) sont finies. (En particulier, la condition (2) implique que $s(m) \neq \infty$ dès que $r(m) = 0$: les entiers réguliers m de T sont exactement les entiers m tels que $s(m) \neq \infty$.) De manière générale, la nécessité des conditions énoncées dans le Théorème 2.1 est une conséquence de calculs classiques d'enlacements et de sommes de Gauss. La preuve de la suffisance est constructive et se fait par récurrence sur la longueur de l'intervalle I, voir [2].

Notons $\mathfrak{T}$ le monoïde constitué des tableaux $T : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$. On déduit du Théorème 2.1 que la somme de deux tableaux admissibles est encore un tableau admissible, de sorte que le sous-ensemble des tableaux admissibles constitue un sous-monoïde $\mathfrak{T}^{\mathrm{adm}}$ de $\mathfrak{T}$. Puisque ρ, σ sont des invariants du monoïde $\mathfrak{M}$ des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les 2-groupes, l'application $(\rho,\sigma):\mathfrak{M}\to\mathfrak{T}$ est injective. Il en résulte la description combinatoire de $\mathfrak{M}$ ci-dessous.

Corollaire 2.2. *Le monoïde $\mathfrak{M}$ des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les 2-groupes est isomorphe au sous-monoïde $\mathfrak{T}^{\mathrm{adm}}$ des tableaux admissibles.*

Considérons à présent la question de reconnaître si un enlacement λ' est un facteur orthogonal d'un enlacement λ, c'est-à-dire s'il existe un enlacement λ'' tel que

$$\lambda=\lambda'\oplus\lambda''.$$

Décrivons tout d'abord des conditions nécessaires simples pour qu'une telle décomposition orthogonale existe. Il est clairement nécessaire que

$$\rho_k(\lambda)\geqslant\rho_k(\lambda')\quad\text{pour tout } k\geqslant 1. \tag{1}$$

Une seconde condition nécessaire, résultant de l'additivité de σ sur les sommes orthogonales, dit que

$$\sigma_k(\lambda')=\infty\Longrightarrow\sigma_k(\lambda)=\infty,\quad\text{pour tout } k\geqslant 1. \tag{2}$$

Supposons à présent ces conditions (1) et (2) vérifiées. Nous allons associer à (λ,λ') un ensemble

$$S_{\lambda,\lambda'}=\{T_\alpha\}_{\alpha\in\overline{\mathbb{Z}}_8}$$

de tableaux. Pour $\alpha\in\overline{\mathbb{Z}}_8$, nous définissons le tableau $T_\alpha=(r_\alpha,s_\alpha):\mathbb{N}^\times\to\mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8$ par

$$\begin{aligned} &r_\alpha(k)=\rho_k(\lambda)-\rho_k(\lambda'),\\ &s_\alpha(k)=\begin{cases}\alpha & \text{si } \sigma_k(\lambda')=\infty,\\ \sigma_k(\lambda)-\sigma_k(\lambda') & \text{si } \sigma_k(\lambda')\neq\infty,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{N}^\times.\end{aligned} \tag{3}$$

Le tableau T_α est bien défini grâce à la condition (1) et au fait que ∞ est le seul élément non inversible dans $\overline{\mathbb{Z}}_8$.

Corollaire 2.3. *Un enlacement λ' est un facteur orthogonal d'un enlacement λ si et seulement si les conditions* (1) *et* (2) *ci-dessus sont vérifiées et s'il existe un tableau admissible $T\in S_{\lambda,\lambda'}$.*

Démonstration. Si $\lambda=\lambda'\oplus\lambda''$, on vérifie que le tableau $T_{\lambda''}=(\rho_k(\lambda''),\sigma_k(\lambda''))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ d'invariants associé à λ'' est dans $S_{\lambda,\lambda'}$. Réciproquement, si T est admissible, d'après le Théorème 2.1, il existe un enlacement λ'' dont $T=T_{\lambda''}=(\rho_k(\lambda''),\sigma_k(\lambda''))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ est le tableau des invariants. On vérifie immédiatement la relation suivante, au niveau des tableaux d'invariants, respectivement de λ, λ' et λ'' :

$$T_\lambda=T_{\lambda'}+T_{\lambda''}=T_{\lambda'\oplus\lambda''},$$

où la dernière égalité résulte de l'additivité des invariants ρ et σ sur les sommes orthogonales. L'application qui à un enlacement associe ses invariants étant injective, on conclut que $\lambda=\lambda'\oplus\lambda''$.

Remarque 1. Indiquons brièvement les simplifications dans le cas des enlacements sur des p-groupes, p premier et $p\neq 2$. Un tel enlacement (G,λ) se scinde en une somme orthogonale d'enlacements sur des p-groupes homogènes d'exposant p^m respectivement : $(G,\lambda)=\bigoplus_{m\geqslant 1}(G_m,\lambda_m)$. À la différence du cas $p=2$, cette décomposition est essentiellement unique. Un invariant complet de la classe d'isomorphisme de (G_m,λ_m) est constitué du rang $\rho_m(\lambda)\in\mathbb{N}$ de G_m (comme $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-module libre) et d'un élément $\epsilon_m(\lambda)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui a la propriété (caractéristique) suivante : (G_m,λ_m) est une somme orthogonale de $\rho_m(\lambda)$ copies de l'enlacement cyclique $[(1,1)\mapsto 1/p^m \bmod 1]$ sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ si et seulement si $\epsilon_m(\lambda)=0$. Voir [8] pour plus de détails. Soit alors $\mathfrak{T}_p$ le monoïde des tableaux $T:\mathbb{N}^\times\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Similairement au cas précédemment traité, un tableau $T=(r(m),e(m))_{m\in\mathbb{N}^\times}$ est dit *admissible* s'il existe un enlacement (G,λ) sur un p-groupe tel que $r(m)=\rho_m(\lambda)$ et $e(m)=\epsilon_m(\lambda)$ pour tout $m\in\mathbb{N}^\times$. Il est aisé de déduire le résultat suivant :

Théorème 2.4. *Soit p un nombre premier distinct de 2. Tout tableau fini $T=(r(m),e(m))_{m\in\mathbb{N}^\times}$ est admissible pour un enlacement sur un p-groupe. En particulier, le monoïde des classes d'isomorphismes des enlacements sur les p-groupes s'identifie à $\mathfrak{T}_p$.*

À partir de ce résultat, la version correspondante du Corollaire 2.3 se laisse formuler aisément et est laissée au lecteur. (Pour plus de détails, consulter [2].) Les Théorèmes 2.1 et 2.4 donnent ainsi une présentation combinatoire complète du monoïde $\mathfrak{E}$ des enlacements.

Remarque 2. Considérons brièvement le cas (plus général) des formes quadratiques sur un groupe abélien fini. Une forme quadratique sur un groupe abélien fini G est une application $q:G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ telle que $q(nx)=n^2q(x)$ pour tout $(n,x)\in\mathbb{Z}\times G$ et telle que l'application $\lambda_q:G\times G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définie par $\lambda_q(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$ soit un enlacement. Les formes quadratiques $G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ayant le même enlacement associé sont en bijection avec $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Il en résulte que sur le facteur orthogonal G_{impair} des éléments d'ordre impair, les formes quadratiques sont déterminées par leur enlacement associé. Considérons alors les formes quadratiques sur les 2-groupes. Il résulte de [8, Théorème 5] qu'une telle forme quadratique $q:G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est classifiée par les invariants $\rho_k(\lambda_q),\sigma_k(\lambda_q)$ associées à l'enlacement associé λ_q et un seul invariant supplémentaire, la somme de Gauss $\gamma(q)=\sum_{x\in G}\exp(2i\pi q(x))\in\mathbb{C}$. Aussi la construction combinatoire à l'aide des tableaux est essentiellement la même : on considère maintenant le monoïde $\mathfrak{T}$ constitué des tableaux $(r,s):\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8$. Le tableau $T_q=(\rho,\sigma):\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8$ d'invariants associé à q est défini par

$$\rho_k(q)=\rho_k(\lambda_q)\quad\text{pour } k\geqslant 1 \text{ et } \rho_0(q)=0$$

et

$$\sigma_0(q)=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Arg}\big(\gamma(q)\big)\in\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\quad\text{et}\quad\sigma_k(q)=\sigma_k(\lambda_q)\in\overline{\mathbb{Z}}_8\quad\text{pour } k\geqslant 1.$$

(Noter que comme λ_q est non dégénérée, $\gamma(q)\neq 0$.) Avec cette modification, le Théorème 2.1 et les Corollaires 2.2 et 2.3 s'étendent au cas quadratique.

Références

[1] E. Burger, Über Gruppen mit Verschlingungen, J. Reine Angew. Math. 188 (1950) 193–200.
[2] F. Deloup, How to recognize a linking summand, Université de Toulouse III, Prépublication, 2001.
[3] F. Deloup, An explicit construction of an abelian topological quantum field theory, Topology Appl. 127 (1/2) (2003) 199–211.
[4] F. Deloup, C. Gille, Abelian quantum invariants indeed classify linking pairings, in: Knots in Hellas '98, Vol. 2 (Delphi), J. Knot Theory Ramifications 10 (2) (2001) 295–302.
[5] A. Kawauchi, S. Kojima, Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds, Math. Ann. 253 (1980) 29–42.
[6] W. Scharlau, Quadratic and Hermitian Forms, Springer-Verlag, Heidelberg, 1968.
[7] H. Seifert, W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig, 1934.
[8] C.T.C. Wall, Quadratic forms on finite groups and related topics, Topology 2 (1963) 281–298.