Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 153–158

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Algèbre

Algèbres de Hopf colibres

Jean-Louis Loday [a], María Ronco [b]

[a] *Institut de recherche mathématique avancée, CNRS et Université Louis Pasteur, 7, rue R. Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France*
[b] *Departamento de Matemática Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires Pab. 3 Ciudad Universitaria Nuñez, (1428) Buenos-Aires, Argentine*

Reçu et accepté le 27 mai 2003

Présenté par Alain Connes

Résumé

On démontre un théorème de structure pour les algèbres de Hopf colibres : une telle algèbre de Hopf est isomorphe à l'algèbre diptère enveloppante de sa partie primitive. Une algèbre diptère est une algèbre associative munie d'une structure de module à gauche sur elle-même. Ce résultat est une conséquence d'un analogue, dans le contexte non-cocommutatif, du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt et du théorème de Milnor–Moore. ***Pour citer cet article : J.-L. Loday, M. Ronco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Cofree Hopf algebras. We prove a structure theorem for the cofree Hopf algebras: such a Hopf algebra is the universal enveloping dipterous algebra of its primitive part. A dipterous algebra is an associative algebra equipped with a structure of left module over itself. This theorem is a consequence of an analogue, in the non-cocommutative framework, of the Poincaré–Birkhoff–Witt theorem and of the Milnor–Moore theorem. ***To cite this article: J.-L. Loday, M. Ronco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Dipterous algebra. By definition a *dipterous algebra* is an associative algebra equipped with an extra left action on itself. Denoting by $*$ and $\succ$ these two binary operations, the relations are

$$(x*y)*z = x*(y*z) \quad \text{and} \quad (x*y)\succ z = x\succ(y\succ z).$$

The free dipterous algebra over a vector space can be described explicitly in terms of the planar rooted trees.

Cofree Hopf algebras. A Hopf algebra $\mathcal{H}$ over a field is said to be *cofree* if, as a coalgebra, it is isomorphic to the tensor coalgebra $T^c(V)$, whose comultiplication is the deconcatenation. Here V is the primitive part of $\mathcal{H}$

Adresses e-mail : loday@math.u-strasbg.fr (J.-L. Loday), mronco@mate.dm.uba.ar (M. Ronco).

doi:10.1016/S1631-073X(03)00288-7

and inherits a structure of B_∞-algebra (with differential zero). There exists a functor from dipterous algebras to B_∞-algebras, which admits a left adjoint, that we denote by UD.

Theorem 0.1. *For any cofree Hopf algebra $\mathcal{H}$ over a field there is an isomorphism*

$$\mathcal{H} \cong UD(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})_+.$$

The notation $(-)_+$ means that we have adjoined a unit to the dipterous algebra.

Theorem 0.2. *Let $\mathcal{H}$ be a Hopf algebra over a field. The following are equivalent*:

(a) *$\mathcal{H}$ is a connected dipterous Hopf algebra,*
(b) *$\mathcal{H}$ is isomorphic to $UD(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})_+$ as a dipterous Hopf algebra,*
(c) *$\mathcal{H}$ is cofree among connected coalgebras.*

1. Algèbres de Hopf colibres et B_∞-algèbres

Une algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, *, \Delta)$ est la donnée d'un espace vectoriel $\mathcal{H}$ sur un corps K muni d'une multiplication $*$ associative unitaire, d'une comultiplication Δ coassociative co-unitaire, compatibles.

1.1. Algèbres de Hopf colibres

On dira (par abus de langage) qu'elle est *colibre* si en tant que cogèbre elle est isomorphe à la cogèbre $T^c(V)$ ayant pour espace sous-jacent le module tensoriel $K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$ et pour comultiplication la déconcaténation : $\Delta(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=0}^{i=n} x_1 \cdots x_i \otimes x_{i+1} \cdots x_n$. Ici on a évidemment $V = \mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$. On remarquera que $\mathcal{H}$ est alors *connexe* au sens de Quillen (cf. [8], p. 282). Supposons $\mathcal{H} = T^c(V)$. Alors la structure multiplicative $*$ détermine, par restriction, des applications $M_{pq} : V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V$. Puisque $*$ est associative unitaire, ces applications satisfont à un certain nombre de relations $\mathcal{R}_{ijk}$. Par exemple la relation $\mathcal{R}_{111}$ est

$$M_{21}(uv, w) + M_{21}(vu, w) + M_{11}\big(M_{11}(u, v), w\big) = M_{12}(u, vw) + M_{12}(u, wv) + M_{11}\big(u, M_{11}(v, w)\big).$$

1.2. Algèbres de Hopf colibres et B_∞-algèbres

Par définition, voir par exemple [11], une *B_∞-algèbre R* (avec différentielle nulle) est un espace vectoriel muni d'applications linéaires

$$M_{pq} : R^{\otimes p} \otimes R^{\otimes q} \to R, \quad \text{pour } p \geqslant 0,\ q \geqslant 0$$

satisfaisant aux relations $\mathcal{R}_{ijk}$. En utilisant la propriété de coliberté de $T^c(R)$ on peut reconstruire l'opération $*$ à partir des M_{pq} et les relations $\mathcal{R}_{ijk}$ assurent que $*$ est associative unitaire, ainsi $(T^c(R), *, \Delta)$ est une algèbre de Hopf colibre.

1.3. Exemples

Si les opérations M_{pq} sont nulles pour $p > 1$, on alors la notion d'*algèbre parenthésée* (brace algebras), cf. [1, 9,10]. Si seule M_{11} est non nulle, on a alors tout simplement une algèbre associative (non nécessairement unitaire) à cause de la relation $\mathcal{R}_{111}$. On peut aussi avoir $M_{11} = 0$ (B_∞-algèbre triviale).

2. Algèbres diptères

Par définition une algèbre *diptère* est une algèbre associative $(A, *)$ sur le corps K munie d'une opération binaire supplémentaire, notée $\succ : A \otimes A \to A$ vérifiant la relation diptère :

$$(x * y) \succ z = x \succ (y \succ z).$$

Une algèbre *diptère unitaire* est une algèbre associative unitaire augmentée dont l'idéal d'augmentation est diptère, pour laquelle on a étendu partiellement l'opération $\succ$ en posant : $1 \succ x = x$ et $x \succ 1 = 0$ pour tout élément x de l'idéal d'augmentation.

Exemple 1. Les algèbres dendriformes (cf. [2], p. 36) sont des exemples d'algèbres diptères, et donc aussi les algèbres de Zinbiel (cf. [2], p. 45). Rappelons que ces dernières sont caractérisées par la relation

$$x * y = x \succ y + y \succ x.$$

Pour toute B_∞-algèbre R l'algèbre associative $T^c(R)$ est munie d'une opération diptère caractérisée par

$$v_1 v_2 \cdots v_n = \big(\big(\cdots (v_1 \succ v_2) \succ \cdots\big) \succ v_n\big), \quad \text{pour tout } v_i \in R.$$

Proposition 2.1. *Toute algèbre diptère possède une structure d'algèbre B_∞.*

Preuve (*Esquisse*). Si l'un des indices est nul on pose $M_{00} = 0$, $M_{10} = \mathrm{Id} = M_{01}$, $M_{n0} = 0 = M_{0n}$ pour $n \geqslant 2$. Ensuite on utilise les formules qui donnent $*$ en fonction des M_{pq} de la façon suivante : on remplace les tenseurs $x_1 x_2 \cdots x_n \in V^{\otimes n}$ par $((\cdots((x_1 \succ x_2) \succ \cdots) \succ x_n)$. Ainsi en basses dimensions, en posant $x * y = x \prec y + x \succ y$, on obtient

$$\begin{aligned} M_{11}(u, v) &= u \prec v - v \succ u, \\ M_{21}(uv, w) &= (u \succ v) \prec w - u \succ (v \prec w), \\ M_{12}(u, vw) &= u \prec (v \succ w) - v \succ (u \prec w) + (v \prec w) \succ u. \end{aligned}$$

Remarque 1. Si l'algèbre diptère est dendriforme, alors la B_∞-algèbre associée est une algèbre parenthésée.

2.1. *Définition de l'algèbre diptère enveloppante*

Soit R une algèbre B_∞. Son *algèbre diptère enveloppante* est le quotient de l'algèbre diptère libre sur l'espace vectoriel R, notée $\mathrm{Dipt}(R)$, par la relation qui identifie les deux structures d'algèbre diptère : $UD(R) := \mathrm{Dipt}(R)/\sim$.

On vérifie aisément que le foncteur UD est adjoint à gauche du foncteur qui va des algèbres diptères dans les algèbres B_∞.

2.2. *Algèbre diptère libre*

L'algèbre diptère libre sur l'espace vectoriel V est de la forme $\mathrm{Dipt}(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathrm{Dipt}_n \otimes V^{\otimes n}$ où Dipt_n est la partie de degré n de l'algèbre diptère libre sur un générateur. Cette dernière peut se décrire explicitement à l'aide des arbres planaires enracinés (chaque sommet interne a une racine et au moins deux feuilles). Soit $\mathbb{T}_n$ l'ensemble des arbres planaires enracinés à n feuilles. Le nombre d'éléments de $\mathbb{T}_n$ est le super nombre de Catalan C_{n-1} : $(1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, \ldots)$. Soit $\mathrm{Dipt}(K)$ l'algèbre associative libre sur l'ensemble $\mathbb{T} := \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{T}_n$ (c'est-à-dire les polynomes non commutatifs sans terme constant sur cet ensemble). On met une structure diptère sur $\mathrm{Dipt}(K)$ en posant, pour tout arbres $s_i,\ t_j$:

$$(s_1 s_2 \cdots s_k) \succ (t_1 t_2 \cdots t_l) := \big(s_1 \vee \big(s_2 \vee (\cdots \vee (s_k \vee t_1 \vee \cdots \vee t_l)\cdot)\big)\big),$$

où $\vee$ désigne le greffage des arbres planaires (cf. [2,4]).

On peut montrer que cette algèbre diptère est bien l'algèbre diptère libre sur un générateur (en l'occurence l'arbre à une feuille).

3. Structure des algèbres de Hopf colibres

Soit $(\mathcal{H}, *, \Delta)$ une algèbre de Hopf colibre comme définie ci-dessus. On sait que sa partie primitive $\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$ est une algèbre B_∞, on peut donc former l'algèbre diptère $UD(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$. En utilisant le fait que $UD(R)$ est le quotient de l'algèbre diptère libre $\mathrm{Dipt}(R)$ on peut montrer que, après avoir rajouté une unité : $UD(R)_+ = UD(R) \oplus K.1$, on peut munir $UD(R)_+$ d'une structure d'algèbre de Hopf (cf. [3]).

Théorème 3.1. *Pour toute algèbre de Hopf colibre $(\mathcal{H}, *, \Delta)$ sur le corps K on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf*

$$\mathcal{H} \cong UD(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})_+.$$

3.1. Algèbres de Hopf diptères

Le Théorème 3.1 est en fait la conséquence d'un théorème plus fin. Avant de l'énoncer on définit la notion d'algèbre de Hopf diptère. C'est une algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, *, \Delta)$, qui est munie d'une structure diptère unitaire. De plus on demande que l'application linéaire Δ soit un morphisme d'algèbres diptères pour la structure diptère de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ suivante :

$$(x \otimes y) \succ (x' \otimes y') = (x * x') \otimes (y \succ y')$$

si y ou y' appartient à l'idéal d'augmentation, sinon

$$(x \otimes 1) \succ (x' \otimes 1) = (x \succ x') \otimes 1.$$

Théorème 3.2. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf sur le corps K. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) *$\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf diptère connexe,*
(b) *$\mathcal{H}$ est isomorphe à $UD(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})_+$ en tant qu'algèbre de Hopf diptère,*
(c) *$\mathcal{H}$ est colibre parmi les cogèbres connexes.*

Remarque 2. Ce résultat est l'analogue non-cocommutatif du résultat classique suivant : soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf sur le corps K de caractéristique zéro. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{H}$ est connexe et cocommutative,
(b) $\mathcal{H}$ est isomorphe à $U(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$ en tant qu'algèbre de Hopf cocommutative,
(c) $\mathcal{H}$ est colibre parmi les cogèbres connexes cocommutatives.

L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est le théorème de Milnor–Moore (cf. [6,8]).
L'implication (b) $\Rightarrow$ (c) est le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt (cf. [8]).
L'implication (c) $\Rightarrow$ (a) est une tautologie.

Dans notre contexte les algèbres de Lie ont été remplacées par les algèbres B_∞ et le foncteur algèbre enveloppante U par le foncteur UD. On remarquera que l'on n'a pas besoin de l'hypothèse de caractéristique zéro.

3.2. Exemples

(a) Si la B_∞-algèbre $\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$ est en fait une algèbre parenthésée ($M_{pq}=0$ si $p>1$), alors on peut montrer que $UD(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})_+$ est une algèbre dendriforme (cf. [2]) et le théorème précédent n'est autre que le théorème principal de [9,10]. La structure d'algèbre de Hopf de l'algèbre dendriforme libre a été décrite dans [4] (voir aussi [3]).

(b) Si $M_{pq}=0$ pour $p>1$ et pour $q>1$, la seule donnée est alors M_{11} qui est une structure d'algèbre associative (non unitaire). Soit A une telle algèbre associative considérée comme une algèbre B_∞. La structure d'algèbre de Hopf de $T^c(A)$ est donnée par

$$(\omega a)*(\theta b)=(\omega*\theta b)a+(\omega a*\theta)b+(\omega*\theta)M_{11}(a,b),$$

pour $a,b\in A$ et $\omega\in A^{\otimes p}$ et $\theta\in A^{\otimes q}$. On peut vérifier que si l'on note respectivement $(\omega a)\prec(\theta b)$, $(\omega a)\succ(\theta b)$, et $(\omega a)\cdot(\theta b)$ les trois termes de la somme, alors on obtient une trigèbre dendriforme au sens de [5].

(c) Si la structure B_∞ de $\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$ est triviale, c'est à dire si $M_{pq}=0$ sauf M_{10} et M_{01}, alors $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Zinbiel libre sur $\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$, c'est à dire l'algèbre des shuffles (en tant qu'algèbre associative).

3.3. Indication sur la démonstration

Le point-clé de la démonstration est la construction d'un analogue, dans le cadre non-cocommutatif, du premier idempotent eulérien $e^{(1)}\in\mathrm{End}_K(\mathcal{H})$. Dans ce cadre il est donné par la formule suivante :

$$e^{(1)}:=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\succ_n\circ\bar{\Delta}^n,$$

où l'opération $\succ_n$ est donnée par

$$\succ_n(a_1\cdots a_n)=a_1\succ\big(a_2\succ\big(\cdots(a_{n-1}\succ a_n)\cdot\big)\big),$$

et l'opération $\bar{\Delta}^n$ est l'itérée de la diagonale réduite.

La propriété principale de $e^{(1)}$ est que son image est précisément la partie primitive de $\mathcal{H}$: $\mathrm{Im}\,e^{(1)}=\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$. Elle permet de démontrer que la partie primitive de l'algèbre diptère libre $\mathrm{Dipt}(V)$ est la B_∞-algèbre libre sur V.

4. Variante : les algèbres 2-associatives

On peut, dans les Théorèmes 3.1 et 3.2, remplacer les algèbres diptères par les algèbres 2-associatives suivantes. Une *algèbre* 2*-associative* est la donnée d'un espace vectoriel muni de deux structures associatives (on les notera $*$ et $\star$). S'il existe un élément qui est l'unité pour ces deux structures on dira que l'algèbre 2-associative est *unitaire*. Les modifications à apporter sont alors les suivantes.

Dans la Proposition 2.1 la structure B_∞ d'une algèbre 2-associative est obtenue en remplaçant les tenseurs $x_1x_2\cdots x_n\in V^{\otimes n}$ par $x_1\star x_2\star\cdots\star x_n$.

Dans la Section 2.2 l'algèbre 2-associative libre sur un générateur est encore l'algèbre associative libre sur $\mathbb{T}$. La seconde opération $\star$ est alors donnée par

$$\begin{cases} s\star t = s^1\vee\cdots\vee s^m\vee t^1\vee\cdots\vee t^n, & \\ s_1\cdots s_k\star t = (s_1\vee\cdots\vee s_k)\vee t^1\vee\cdots\vee t^n & \text{si } k\geqslant 2,\\ s\star t_1\cdots t_l = s^1\vee\cdots\vee s^m\vee(t_1\vee\cdots\vee t_l) & \text{si } l\geqslant 2,\\ s_1\cdots s_k\star t_1\cdots t_l = (s_1\vee\cdots\vee s_k)\vee(t_1\vee\cdots\vee t_l) & \text{si } k\geqslant 2,\ l\geqslant 2,\end{cases}$$

où $s=s^1\vee\cdots\vee s^m$ et $t=t^1\vee\cdots\vee t^n$ (voir aussi [7]).

Dans la Section 3.1 la structure 2-associative de $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ est donnée par

$$(x\otimes y)\star(x'\otimes y')=(x\star x')\otimes(y\star y').$$

La compatibilité demandée entre la comultiplication Δ et la deuxième opération associative $\star$ est la relation de Hopf infinitésimale unitaire (cf. [3]) :

$$\Delta(x\star y)=(x\otimes 1)\star\Delta(y)+\Delta(x)\star(1\otimes y)-x\otimes y.$$

Dans la Section 3.2 les algèbres dendriformes ne forment pas un sous-cas des algèbres 2-associatives, c'est pourquoi l'on a privilégié la structure diptère.

Références

[1] M. Gerstenhaber, A.A. Voronov, Homotopy G-algebras and moduli space operad, Internat. Math. Res. Notices 3 (1995) 141–153.

[2] J.-L. Loday, Dialgebras, in: Dialgebras and Related Operads, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1763, Springer, Berlin, 2001, pp. 7–66.

[3] J.-L. Loday, Scindement d'associativité et algèbres de Hopf, Actes du Colloque en l'honneur de Jean Leray (Nantes, 2002), à paraître.

[4] J.-L. Loday, M. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (1998) 293–309.

[5] J.-L. Loday, M. Ronco, Trialgebras and families of polytopes, Preprint, 2002, ArXiv math.AT/0205043.

[6] J.W. Milnor, J.C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. (2) 81 (1965) 211–264.

[7] T. Pirashvili, Sets with two associative operations, C.E.J.M. 2 (2003) 169–183.

[8] D. Quillen, Rational homotopy theory, Ann. of Math. (2) 90 (1969) 205–295.

[9] M. Ronco, A Milnor–Moore theorem for dendriform Hopf algebras, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 332 (2) (2001) 109–114.

[10] M. Ronco, Eulerian idempotents and Milnor–Moore theorem for certain non-cocommutative Hopf algebras, J. Algebra 254 (1) (2002) 152–172.

[11] A.A. Voronov, Homotopy Gerstenhaber algebras, in: Conférence Moshé Flato, Dijon, 1999, Vol. II, in: Math. Phys. Stud., Vol. 22, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000, pp. 307–331.