Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 99–104

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Cohomologie des G-faisceaux en caractéristique positive

Niels Borne

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta San Donato, 5, 40126 Bologna, Italie

Reçu le 24 janvier 2003 ; accepté après révision le 3 juin 2003

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Soit G un groupe fini et X un G-schéma noethérien défini sur un corps algébriquement clos k, dont la caractéristique divise l'ordre de G. On définit un raffinement de la K-théorie équivariante de X destiné à mieux prendre en compte l'information liée à la théorie des représentations modulaires. ***Pour citer cet article : N. Borne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Cohomology of G-sheaves in positive characteristic. Let G be a finite group, and X a noetherian G-scheme defined on an algebraically closed field k, whose characteristic divides the order of G. We define a refinement of the equivariant K-theory of X devoted to give a better account of the information related to modular representation theory. ***To cite this article: N. Borne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Let X be a noetherian scheme proper over an algebraically closed field k, and endowed with the action of a finite group G. For any coherent G-sheaf $\mathcal{F}$ on X, the corresponding space of global sections $H^0(X,\mathcal{F})$ is a representation of G, that we call *a Galois module*. Equivariant K-theory is a standard tool to compute the characters of these Galois modules. When the characteristic p of k divides the order of G, however, this theory provides us only with the Brauer character of the Galois module, which is not enough to determine its isomorphism class. In this Note, we show how to refine the definitions of equivariant K-theory to improve its results in this situation.

Let us first consider the case $X = \operatorname{Spec} k$. Let $R = k[G]^{\mathrm{op}}$ be the opposite of the group ring. We can consider the category of modular representations $\mathbf{mod}\, R$ as a *ring with several objects* [4] and denote it by $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$. If G has cyclic p-Sylows, $k[G]$ is of finite representation type [3], and $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ is right artinian. Moreover, the classical Yoneda embedding factors then trough a map $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} \to \mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$, and we denote by $\underline{V}$ the image of the $k[G]$-module V. Following an idea of Auslander [2], we show that the class $[\underline{V}]$ in $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}})$ is a better invariant than $[V]$ in $K_0(\mathcal{A})$ in the following sense:

Adresse e-mail : borne@dm.unibo.it (N. Borne).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00282-6

Theorem 0.1. *Suppose given a (non-necessarily commutative) algebra R over an algebraically closed field k, with R finite dimensional over k and of finite representation type, and let $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{mod}\, R$. Then:*

(i) *The category $\mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ is abelian;*
(ii) *two R-modules of finite type V, V' are isomorphic if and only if in $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}})$ we have: $[\underline{V}] = [\underline{V'}]$.*

To avoid any hypothesis on G, we fix in the sequel $\mathcal{A}$ a full subcategory of $k[G]\,\mathbf{mod}$, admitting a finite set of additive generators (i.e., Morita equivalent to a subring with a finite number of objects).

To generalize this definition in arbitrary dimension, we suppose that the quotient morphism $\pi : X \to Y = X/G$ exists in the category of schemes. In this situation, we introduce an *Auslander algebra* $\mathcal{A}_X$, which can be seen as a sheaf of rings with several objects on Y (see Section 3 for a precise definition). We define *quasi-coherent $\mathcal{A}$-sheaves* on X as sheaves of modules for this algebra. Quasi-coherent G-sheaves embed in quasi-coherent $\mathcal{A}$-sheaves via an analog of the Yoneda embedding, and we still denote by $\underline{\mathcal{F}}$ the $\mathcal{A}$-sheaf associated to the G-sheaf $\mathcal{F}$.

There is a natural notion of a *coherent* $\mathcal{A}$-sheaf which gives rise to refined K-theory groups $K_i(\mathcal{A}, X)$. Under a technical assumption, the usual localization result holds:

Theorem 0.2. *Let $i : X' \to X$ be a morphism of G-schemes over k, and $\mathcal{A}$ a full subcategory of $k[G]\,\mathbf{mod}$, admitting a finite set of additive generators.*

Suppose that the morphism $\tilde{i} : Y' \to Y$ between quotient schemes is a closed immersion, and that $i^{\#} : \mathcal{A}_X \to \tilde{i}_* \mathcal{A}_{X'}$ is an epimorphism.

Denote by U the pullback by $\pi : X \to Y$ of the complement of Y' in Y, and by $j : U \to X$ the canonical inclusion. Then there is a long exact sequence:

$$\cdots \longrightarrow K_i(\mathcal{A}, X') \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} K_i(\mathcal{A}, X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} K_i(\mathcal{A}, U) \longrightarrow \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow K_0(\mathcal{A}, X') \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} K_0(\mathcal{A}, X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} K_0(\mathcal{A}, U) \longrightarrow 0.$$

We give a practical criterion (Proposition 3.3) to check the assumption on Auslander algebras. Applying this when X is a smooth projective curve, we get a description of $K_0(\mathcal{A}, X)$ in terms of *$\mathcal{A}$-cycles* (Théorème 4.2) and thus get a modular Riemann–Roch formula lifting the usual equivariant Riemann–Roch formula (Corollaire 4.3).

Another application, in arbitrary dimension, concerns the case of a free action:

Proposition 0.1. *Let X be a proper k-scheme, endowed with a* free *action of a finite group G, and $\mathcal{A}$ be a full subcategory of $k[G]\,\mathbf{mod}$, admitting a finite set of additive generators, and containing $k[G]$, the free object of rank 1. Then for each G-sheaf $\mathcal{F}$ on X we have the equality in $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$:*

$$\chi(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{F}}) = \chi\big(\pi_*^G \mathcal{F}\big)\big[\underline{k[G]}\big].$$

In this proposition, we use in $\chi(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{F}})$ the cohomology of $\underline{\mathcal{F}}$ seen as $\mathcal{A}$-sheaf: the inequality is, in general, *false* if we replace $\chi(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{F}})$ by $\sum_{i \geqslant 0} (-1)^i [\underline{H^i(X, \mathcal{F})}]$.

1. Introduction

Soit X un schéma noethérien défini sur un corps k algébriquement clos, sur lequel il est propre. On suppose X/k muni de l'action d'un groupe fini G. Dans ce contexte, on appelle *module galoisien* l'espace des sections globales d'un G-faisceau cohérent sur X. Ce sont des représentations de G sur k, et leur structure en tant que telles est liée en particulier à la ramification de l'action – c'est-à-dire aux points fixes.

La K-théorie équivariante fournit le contexte le plus général pour le calcul des modules galoisiens. Celle-ci attribue à chaque G-schéma noethérien X des groupes $K_i(G, X)$, fonctoriellement en X, si bien que le morphisme structurel $s_X : X \to \operatorname{Spec} k$ donne une caractéristique d'Euler équivariante à valeurs dans le groupe $R_k(G)$ des caractères de G sur k. Lorsque la caractéristique p de k ne divise pas l'ordre de G, cette approche est optimale, puisqu'alors les caractères des modules galoisiens les caractérisent à isomorphisme près. Dans le cas contraire, on perd de l'information, le cas extrême étant celui où G est un p-groupe, puisque qu'alors $R_k(G) \simeq \mathbb{Z}$ ne contient aucune information proprement équivariante.

On présente ici un raffinement de la K-théorie équivariante de X destiné à mieux prendre en compte l'information liée à la théorie de la représentation modulaire. Pour ce faire, on plonge la catégorie des G-faisceaux cohérents sur X dans une sur-catégorie, celle des $\mathcal{A}$-faisceaux cohérents sur X. La construction générale est donnée au paragraphe 3, et est justifiée par l'examen du cas de la dimension zéro au paragraphe 2. Le paragraphe 4 est consacré à des applications.

2. Théorie de la représentation modulaire : l'approche d'Auslander

Par théorie de la représentation modulaire, on entend l'étude de la catégorie $k[G]\,\mathbf{mod}$ des $k[G]$-modules à gauche de type fini, lorsque la caractéristique p de k divise l'ordre de G.

Un peu plus généralement, Auslander a remarqué le fait suivant : soit R une k-algèbre artinienne, $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{mod}\,R$ la catégorie des R-modules à droite de type fini, et $\mathbf{Mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} = [\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{op}}, k\,\mathbf{Mod}]$ la catégorie des foncteurs additifs contravariants de $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ dans les k-espaces vectoriels. Alors le morphisme de Yoneda $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} \to \mathbf{Mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ permet d'établir une bijection entre classes d'isomorphisme de $k[G]$-modules indécomposables et classes d'isomorphisme de $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$-modules simples (voir [2], §1.2). Il est ainsi commode de voir $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ comme un anneau à plusieurs objets, au sens de Mitchell (voir [4]). Comme les modules simples sont bien détectés par la K-théorie, le théorème suivant est essentiellement une réinterprétation de la remarque d'Auslander.

Précisons tout d'abord quelques définitions. On dit que R est *de type de représentation fini* si le nombre de classes d'isomorphisme d'indécomposables dans $\mathbf{mod}\,R$ est fini (lorsque $R = k[G]^{\mathrm{op}}$ ceci équivaut au fait que G a des p-Sylow cycliques, voir [3]). La notion de groupe de Grothendieck d'une catégorie abélienne employée est celle compatible avec la K-théorie de Quillen. Pour un objet V de $\mathbf{mod}\,R$, on note $\underline{V}$ l'image de V par le morphisme de Yoneda $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} \to \mathbf{Mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$.

Théorème 2.1. *Soit R une k-algèbre (non nécessairement commutative) de dimension finie sur un corps algébriquement clos k, avec R de type de représentation fini. Soit de plus $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ l'anneau à plusieurs objets* $\mathbf{mod}\,R$, *et* $\mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ *la catégorie des $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$-modules à droite de type fini. Alors* :

(i) $\mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}$ *est une catégorie abélienne,*
(ii) *deux R-modules à droite de type fini V, V' sont isomorphes si et seulement si dans* $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A}_{\mathrm{tot}})$ *on a l'égalité* : $[\underline{V}] = [\underline{V'}]$.

Par la suite, on prendra toujours $R = k[G]^{\mathrm{op}}$, sans la supposer nécessairement de type de représentation fini. Pour plus de souplesse, on est amenés à considérer des sous-catégories pleines $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} = k[G]\,\mathbf{mod}$. On dira que $\mathcal{A}$ *admet un nombre fini de générateurs* si elle est Morita-équivalente, au sens des anneaux à plusieurs objets, à une de ses sous-catégories pleines ayant un nombre fini d'objets.

3. K-théorie modulaire

Soit X un schéma noethérien, défini sur un corps algébriquement clos k, et muni d'une action d'un groupe fini G. On suppose que le quotient de l'action existe comme schéma, et on note $\pi : X \to Y = X/G$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} = k[G]\,\mathbf{mod}$. On va introduire la notion de $\mathcal{A}$-faisceau quasi-cohérent sur X, qui étend celle de G-faisceau quasi-cohérent sur X, qu'on commence par rappeler :

Définition 3.1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Une *G-linéarisation* de $\mathcal{F}$ est la donnée d'une collection $(\psi_g)_{g\in G}$ de morphismes de faisceaux quasi-cohérents $\psi_g : g_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ satisfaisant les conditions : (i) $\psi_1 = 1$, (ii) $\psi_{hg} = \psi_h \circ h_*(\psi_g)$.

Un *G-faisceau quasi-cohérent sur X* est un faisceau quasi-cohérent sur X muni d'une G-linéarisation.

Les G-faisceaux quasi-cohérents sur X forment une catégorie abélienne notée $\mathrm{Qcoh}(G, X)$. On note π_*^G le foncteur $\mathrm{Qcoh}(G, X) \to \mathrm{Qcoh}\, Y$ qui au G-faisceau $\mathcal{F}$ associe le faisceau $U \to (\mathcal{F}(\pi^{-1}U))^G$.

Si Z est un schéma noethérien quelconque, la catégorie $\mathrm{Qcoh}\, Z$ est la catégorie sous-jacente d'une catégorie fermée, au sens de [1], et qu'on notera $\mathbf{Qcoh}\, Z$. On peut donc parler de catégories enrichies en $\mathbf{Qcoh}\, Z$, qu'on appelera *anneaux* (*à plusieurs objets*) *sur Z*.

La structure fermée de $\mathbf{Qcoh}\, X$ induit sur $\mathrm{Qcoh}(G, X)$ une structure de catégorie enrichie $\mathbf{Qcoh}(G, X)$ en $\mathbf{Qcoh}\, Y$ telle que, pour deux G-faisceaux $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ on ait : $\mathbf{Qcoh}(G, X)(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \pi_*^G(\mathbf{Qcoh}\, X(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))$.

Définition 3.2. Soit X un G-schéma noethérien sur k, $s_X : X \to \mathrm{Spec}\, k$ le morphisme structurel, et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\,\mathbf{mod}$. L'*algèbre d'Auslander* associée est l'anneau $\mathcal{A}_X$ sur Y égal à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Qcoh}(G, X)$ dont les objets sont de la forme $s_X^* V$, pour tout objet V de $\mathcal{A}$. De manière équivalente, les objets de $\mathcal{A}_X$ sont ceux de $\mathcal{A}$, les faisceaux de morphismes sont donnés par : $\mathcal{A}_X(V, V') = \mathbf{Qcoh}(G, X)(s_X^* V, s_X^* V')$, et le neutre et la composition sont ceux induits par ceux de $\mathbf{Qcoh}(G, X)$.

Définition 3.3. Soit X un G-schéma noethérien sur k, $\pi : X \to Y$ le quotient, et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\,\mathbf{mod}$. Un $\mathcal{A}$-faisceau sur X est, par définition, un $\mathbf{Qcoh}\, Y$-foncteur de $\mathcal{A}_X^{\mathrm{op}}$ à $\mathbf{Qcoh}\, Y$. On note plus précisement $\mathbf{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$ la $\mathbf{Qcoh}\, Y$-catégorie $[\mathcal{A}_X^{\mathrm{op}}, \mathbf{Qcoh}\, Y]$ dont les objets sont ces $\mathbf{Qcoh}\, Y$-foncteurs, et $\mathrm{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$ la catégorie ordinaire sous-jacente.

La catégorie $\mathrm{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$ est abélienne. On montre que cette définition possède de bonnes propriétés en les deux variables.

Concernant la première variable, $\mathbf{Qcoh}(G, X)$ est canoniquement une sous-catégorie réflexive de (resp. isomorphe à) $\mathbf{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$ si $\mathcal{A}$ contient (resp. ne contient que) l'objet libre $k[G]$ de rang 1. On note $\underline{\mathcal{F}}$ l'image du G-faisceau $\mathcal{F}$ dans $\mathbf{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$. On montre de plus que $\mathbf{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$ est Morita-invariant.

Concernant la seconde variable, tout G-morphisme $f : X' \to X$ induit un morphisme image directe $f_{\mathcal{A}}$ et un morphisme image réciproque $f^{\mathcal{A}}$, qui sont naturellement adjoints. On en déduit que $\mathrm{Qcoh}(\mathcal{A}, X)$ possède assez d'injectifs, d'où la possibilité de définir les foncteurs image directe supérieurs $R^i f_{\mathcal{A}}$. Cette opération ne commute pas avec le foncteur $\mathcal{F} \to \underline{\mathcal{F}}$, et en ce sens, les $\mathcal{A}$-faisceaux ont une cohomologie qui leur est propre.

Définition 3.4. Un $\mathcal{A}$-faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X est dit *cohérent* si pour tout ouvert affine G-invariant $U = \mathrm{spec}\, R$ de X, la restriction $\mathcal{F}|_U$ est de type fini dans $\mathbf{Qcoh}(\mathcal{A}, U) \simeq [\mathcal{A}_X(U)^{\mathrm{op}}, R^G\,\mathbf{Mod}]$ (i.e. c'est un quotient d'une somme finie d'objets représentables). On note $\mathrm{Coh}(\mathcal{A}, X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Qcoh}\,(\mathcal{A}, X)$ dont les objets sont les $\mathcal{A}$-faisceaux cohérents.

Lemme 3.1. *On suppose que $\mathcal{A}$ admet un nombre fini de générateurs. Alors* $\mathrm{Coh}(\mathcal{A}, X)$ *est une catégorie abélienne. On note $K_i(\mathcal{A}, X)$ son i-ème groupe de Quillen.*

Si le morphisme de G-schémas noethériens $f : X' \to X$ est tel que le morphisme correspondant entre quotients $\tilde{f} : Y' \to Y$ est propre, on a un morphisme induit $f_{\mathcal{A}} : K_i(\mathcal{A}, X') \to K_i(\mathcal{A}, X)$ à l'une des deux conditions : $\tilde{f}$ est fini, ou Y' admet un faisceau inversible ample.

Théorème 3.2. *Soit $i : X' \to X$ un morphisme de G-schémas noethériens sur k, et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]$* **mod**, *admettant un nombre fini de générateurs. On suppose que le morphisme $\tilde{i} : Y' \to Y$ entre schémas* *quotients est une immersion fermée, et que* $i^{\#}: \mathcal{A}_X \to \tilde{i}_* \mathcal{A}_{X'}$ *est un épimorphisme. On note* U *l'image réciproque par* $\pi : X \to Y$ *du complémentaire de* Y' *dans* Y*, et par* $j : U \to X$ *l'inclusion canonique. Alors on a une suite exacte longue* :

$$\cdots \longrightarrow K_i(\mathcal{A}, X') \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} K_i(\mathcal{A}, X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} K_i(\mathcal{A}, U) \longrightarrow \cdots,$$
$$\cdots \longrightarrow K_0(\mathcal{A}, X') \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} K_0(\mathcal{A}, X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} K_0(\mathcal{A}, U) \longrightarrow 0.$$

On donne un critère pratique permettant d'appliquer le Théorème 3.2 dans la partie 4 :

Proposition 3.3. *Soit* $i : X' \to X$ *un morphisme de* G*-schémas noethériens sur* k*, tel que*

(i) *Il existe un sous-groupe distingué* H *de* G*, qui* H *agit trivialement sur* X'*, et tel que* G/H *agit librement sur* X'*,*
(ii) *Le morphisme* $\tilde{i} : Y' \to Y$ *entre schémas quotients est une immersion fermée.*

Alors le morphisme canonique $i^{\#}: \mathcal{A}_X \to \tilde{i}_* \mathcal{A}_{X'}$ *est un épimorphisme.*

4. Applications

4.1. Principe de symétrie

Si X est un G-schéma noethérien *propre* sur k, alors on définit pour chaque $\mathcal{A}$-faisceau cohérent $\mathcal{G}$ la caractéristique d'Euler–Poincaré modulaire par la formule habituelle $\chi(\mathcal{A}, \mathcal{G}) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i [H^i(X, \mathcal{G})]$, où $H^i(X, \cdot) = R^i(s_X)_{\mathcal{A}}$.

Proposition 4.1. *Soit* X *un schéma noethérien propre sur* k*, muni de l'action* libre *d'un groupe fini* G*, soit de plus* $\mathcal{A}$ *une sous-catégorie pleine de* $k[G]$ **mod**, *admettant un nombre fini de générateurs, et contenant* $k[G]$*, l'objet libre de rang* 1*. Alors pour tout* G*-faisceau* $\mathcal{F}$ *sur* X *on a égalité dans* $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$:

$$\chi(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{F}}) = \chi(\pi_*^G \mathcal{F}) \big[\underline{k[G]} \big].$$

Cette égalité est en général *fausse* si on remplace $\chi(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{F}})$ par $\sum_{i \geqslant 0} (-1)^i [\underline{H^i(X, \mathcal{F})}]$.

4.2. Le cas d'une courbe

Dans cette partie, X désigne une courbe projective, ce par quoi on désigne un schéma intègre, de dimension 1, qui est propre sur k et régulier. On suppose de plus X munie d'une action fidèle d'un groupe fini G, telle que les stabilisateurs soient distingués. Cette dernière hypothèse permet d'utiliser le Théorème 3.2. On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-catégorie de $k[G]$ **mod**, admettant un nombre fini de générateurs, et contenant $k[G]$, l'objet libre de rang 1.

Définition 4.1.

(i) Le groupe des $\mathcal{A}$-cycles sur X, noté $Z_0(\mathcal{A}, X)$, est par définition : $Z_0(\mathcal{A}, X) = \varinjlim_{X'} K_0(\mathcal{A}, X')$ où la limite est prise sur tous les G-sous-schémas fermés réduits stricts de X.
(ii) Le groupe de classes de $\mathcal{A}$-cycles sur X pour l'équivalence rationnelle, noté $A_0(\mathcal{A}, X)$, est par définition le conoyau du morphisme canonique $R(Y)^* \to Z_0(\mathcal{A}, X)$ défini par les morphismes de connexion des suites de localisation ($R(Y)$ est le corps des fonctions rationnelles sur Y).
(iii) On note $\gamma : A_0(\mathcal{A}, X) \to K_0(\mathcal{A}, X)$ et $\mathrm{rk} : K_0(\mathcal{A}, X) \to \mathbb{Z}$ les morphismes canoniques.

Théorème 4.2. *Soit X une courbe projective sur un corps algébriquement clos k, munie de l'action fidèle d'un groupe fini G, agissant avec des stabilisateurs distingués. Soit de plus $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\,\mathbf{mod}$, admettant un nombre fini de générateurs, et contenant $k[G]$, l'objet libre de rang* 1*. Alors le morphisme suivant est un isomorphisme* :

$$\begin{aligned}\phi:\mathbb{Z}\oplus A_0(\mathcal{A},X) &\longrightarrow K_0(\mathcal{A},X),\\ (r,D) &\longrightarrow r[\underline{\mathcal{O}_X}]+\gamma(D).\end{aligned}$$

Définition 4.2. On note $c_1 : K_0(\mathcal{A}, X) \to A_0(\mathcal{A}, X)$, et on appelle *première classe de Chern*, le morphisme composé de l'inverse $\phi^{-1} : K_0(\mathcal{A}, X) \to \mathbb{Z} \oplus A_0(\mathcal{A}, X)$ de l'isomorphisme du Théorème 4.2, suivi de la seconde projection $\mathbb{Z} \oplus A_0(\mathcal{A}, X) \to A_0(\mathcal{A}, X)$.

Lemme 4.3. *Le morphisme* $\deg_{\mathcal{A}} : Z_0(\mathcal{A}, X) \to K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$ *correspondant au cone* $((s_{X'})_{\mathcal{A}} : K_0(\mathcal{A}, X') \to K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A}))_{X'}$ *est trivial sur l'image de* $R(Y)^* \to Z_0(\mathcal{A}, X)$. *On note aussi* $\deg_{\mathcal{A}} : A_0(\mathcal{A}, X) \to K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$ *le morphisme induit.*

Corollaire 4.3. *On suppose que les hypothèses du Théorème* 4.2 *sont vérifiées. Alors pour tout $\mathcal{A}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on a dans* $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A}) : \chi(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}\,\chi(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{O}_X}) + \deg_{\mathcal{A}} c_1(\mathcal{F})$.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement A. Vistoli pour son soutien, ainsi que G. Vezzosi pour de nombreuses conversations enrichissantes.

Références

[1] S. Eilenberg, G.M. Kelly, Closed categories, in: Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, CA, 1965), Springer, New York, 1966, pp. 421–562.
[2] P. Gabriel, Auslander–Reiten sequences and representation-finite algebras, in: Representation Theory, I, Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ontario, 1979, in: Lecture Notes in Math., Vol. 831, Springer, Berlin, 1980, pp. 1–71.
[3] D.G. Higman, Indecomposable representations at characteristic p, Duke Math. J. 21 (1954) 377–381.
[4] B. Mitchell, Rings with several objects, Adv. Math. 8 (1972) 1–161.