Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 975–980

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Fonctions rationnelles et théorie de la réalisation : le cas hyper-analytique

Daniel Alpay [a,1], Baruch Schneider [a], Michael Shapiro [b,2], Dan Volok [a]

[a] *Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israël*
[b] *Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, 07300 México, D.F., Mexique*

Reçu le 12 avril 2003 ; accepté le 29 avril 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous définissons et étudions l'anneau des fonctions rationnelles dans le cadre hyper-analytique. Nous donnons un nombre de définitions équivalentes de la rationalité. La multiplication de Cauchy–Kovalevskaya joue un rôle important dans la théorie. ***Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Rational functions and realization theory: the hyperholomorphic case. We define and study the ring of rational functions in the hyperholomorphic setting. We give a number of equivalent characterizations of rationality. The Cauchy–Kovalevskaya product plays an important role in the arguments. ***To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***
© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Quaternionic analysis (and more generally the setting of Clifford algebras) arose from the desire to extend the theory of complex functions of one variable to $\mathbb{R}^n$ (the case of quaternions corresponds to $n = 4$). It is surprising that a simple and fundamental notion such as that of a rational function has not yet been considered in the setting of quaternionic analysis. To explain the problem at hand we recall that a matrix-valued rational function of one complex variable is just a quotient $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ where q is a matrix-valued polynomial function and p is a scalar polynomial. We will suppose $p(0) \neq 0$. Rational functions analytic in a neighbourhood of the origin can be characterized as being the set of functions of the form

$$r(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B, \tag{1}$$

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), baruchs@math.bgu.ac.il (B. Schneider), shapiro@esfm.ipn.mx (M. Shapiro), volok@math.bgu.ac.il (D. Volok).

[1] The research of this author was supported by the Israel Science Foundation (Grant no. 322/00).

[2] Research partially supported by CONACYT projects as well as by Instituto Politécnico Nacional in the framework of COFAA and CGPI programs.

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00233-4

where $D = r(0)$ and A, B, C are matrices of appropriate sizes. Eq. (1) is called a realization and plays a fundamental role in the theory of linear systems; see, e.g., [11,7]. Another equivalent definition of a rational function makes use of the celebrated backward-shift operator $R_0 f(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$. A $\mathbb{C}^{m\times n}$-valued functions r analytic in a neighborhood of the origin is rational if and only if the linear span of the $\mathbb{C}^m$-valued functions $R_0^k(rc)$ where $k = 0, 1, \ldots$ and $c \in \mathbb{C}^n$ is a finite-dimensional vector space over $\mathbb{C}$.

To extend these notions to the hyperholomorphic case a number of obstacles arise: first, the quaternionic variable is not hyperholomorphic (in this note we use the notation of [4] and we will not review the definitions of the skew field of quaternions and of left and right hyperholomorphic functions; we consider only left hyperholomorphic functions and call them *hyperholomorphic* for simplicity). Next, it is not clear what the counterpart of the operator R_0 should be. Furthermore, the pointwise product of two hyperholomorphic functions need not be hyperholomorphic. Finally one is in a non-commutative setting. We address these problems in the following ways. Rather than the quaternionic variable x and polynomials in this variable we consider sums of Fueter polynomials. We replace pointwise products of hyperholomorphic functions by their Cauchy–Kovalevskaya product. This product allows also to define a hyperholomorphic inverse to a hyperholomorphic function which does not vanish at the origin. The non-commutativity forces to consider the ring generated by the Fueter polynomials.

1. Les polynômes de Fueter et le produit de Cauchy–Kovalevskaya

Nous dénotons par $\mathbb{H}$ le corps des quaternions et par

$$x = x_0 + x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + x_3\mathbf{e_3} = x_0 + x_1\mathbf{e_1} + (x_2 + x_3\mathbf{e_1})\mathbf{e_2}$$

la variable quaternionique. Les fonctions

$$\zeta_1(x) := x_1 - x_0\mathbf{e}_1, \qquad \zeta_2(x) := x_2 - x_0\mathbf{e}_2, \qquad \zeta_3(x) := x_3 - x_0\mathbf{e}_3$$

sont hyper-analytiques. Rappelons que $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e}_2^2 = -1$ et que $\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} + \mathbf{e_2}\mathbf{e_1} = 0$. Nous dénoterons en général $\zeta_j(x)$ par ζ_j sans mentionner la variable x. On identifie $\mathbf{e_1}\zeta_1 = x_0 + x_1\mathbf{e_1}$ avec la variable complexe. Cependant il est important de noter que les ζ_j ne commutent pas et ne jouent pas le rôle de trois variables complexes indépendantes. Par exemple, $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$ implique que $\zeta_1 \in \mathbb{R}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{H}$ et soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Le produit symétrique des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{H}$ est par définition (voir [10, p. 46])

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)}.$$

Définition 1.1. Soit $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{N}^3$. Le polynôme de Fueter ζ^ν est égal à

$$\zeta^\nu(x) := \zeta_1(x)^{\times\nu_1} \times \zeta_2(x)^{\times\nu_2} \times \zeta_3(x)^{\times\nu_3}.$$

Les fonctions ζ^ν sont hyper-analytiques à gauche et à droite (voir [12]). De plus, (voir [10]) toute fonction hyper-analytique (disons à gauche) dans un voisinage de l'origine admet un développement en série de polynômes de Fueter :

$$f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^3} \zeta^\nu a_\nu, \quad a_\nu \in \mathbb{H}.$$

Le produit de Cauchy–Kovalevskaya a une définition très naturelle lorsque les fonctions sont données par des séries de polynômes de Fueter ; voir [8].

Définition 1.2. Le produit de Cauchy–Kovalevskaya $f \odot_L g$ des fonctions $f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^3} \zeta^\nu a_\nu$ et $g(x) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^3} \zeta^\mu b_\mu$ est donné par la série de Fueter :

$$f \odot_L g(x) = \sum_{\eta\in\mathbb{N}^3} \zeta^\eta c_\eta, \quad \text{avec } c_\eta := \sum_{0\leqslant\nu\leqslant\eta} a_\nu b_{\eta-\nu}, \ \eta := \nu + \mu.$$

Dans la dernière expression, $\nu \leqslant \eta$ signifie que $\nu_i \leqslant \eta_i$ pour $i = 1, 2, 3$. De plus, lorsque les fonctions f et g dépendent seulement de ζ_1 on reconnaît le produit de convolution des suites a_ν et b_ν, qui joue un rôle si important en théorie des systèmes linéaires ; voir [1]. On définit de même un produit $\odot_R$ dont le résultat est une fonction hyper-analytique à droite. Dans la suite nous considérons seulement des fonctions hyper-analytiques à gauche, que nous appelerons simplement *hyper-analytiques*.

Lemme 1.3. *Soit g une fonction hyper-analytique dans un voisinage de l'origine. Supposons que $g(0) = 0$. Alors la fonction*

$$(1-g)^{-\odot_L} := 1 + g + g \odot_L g + g \odot_L g \odot_L g + \cdots$$

est hyper-analytique dans un voisinage de l'origine et

$$(1-g) \odot_L \big((1-g)^{-\odot_L}\big) = \big((1-g)^{-\odot_L}\big) \odot_L (1-g) = 1$$

dans ce voisinage.

Soit f une fonction hyper-analytique dans un voisinage de l'origine ; on peut écrire :

$$f(x) - f(0) = \zeta_1 \odot_L f_1(x) + \zeta_2 \odot_L f_2(x) + \zeta_3 \odot_L f_3(x),$$

les fonctions f_i étant aussi hyper-analytiques dans un voisinage de l'origine. En effet, pour $\nu_1 > 0$

$$\zeta^{(\nu_1,\nu_2,\nu_3)} = \zeta_1 \odot_L \zeta^{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3)}$$

et de même pour ζ_2 et ζ_3. Soit $f(x) = \sum_\nu \zeta^\nu r_\nu$ le développement de f en série de polynômes de Fueter. Il suffit de prendre

$$f_1(x) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^3 \\ \nu_1 > 0}} \zeta^{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3)} r_\nu, \quad f_2(x) = \sum_{\substack{\nu=(0,\nu_2,\nu_3) \\ \nu_2 > 0}} z^{(0,\nu_2-1,\nu_3)}, \quad f_3(x) = \sum_{\substack{\nu=(0,0,\nu_3) \\ \nu_3 > 0}} \zeta^{(0,0,\nu_3-1)} r_\nu.$$

La formule du rayon de convergence du développement en série de polynômes de Fueter (voir [10]) implique que les séries définissant les g_j convergent aussi dans un voisinage de l'origine. On a là donc la solution d'un problème de type Gleason associé au produit de Cauchy–Kovalevskaya. La démonstration est beaucoup plus facile que pour le cas où l'on considère le produit ponctuel de fonctions (c'est-à-dire lorsque le produit de deux fonctions est défini par $(fg)(x) = f(x)g(x)$; rappelons que fg ne sera pas en général hyper-analytique même si f et g le sont) ; voir [4] pour ce dernier cas.

2. L'anneau des fonctions rationnelles à gauche

Définition 2.1. Une fonction rationnelle à gauche est une fonction obtenue à partir d'un nombre fini d'opérations du type suivant faites à partir des monômes ζ^α et des constantes :

(1) Addition.
(2) Multiplication de Cauchy–Kovalevskaya.
(3) Si la fonction ne s'annulle pas à l'origine, inversion.

On obtient un anneau de fonctions hyper-analytiques à gauche. Par exemple la fonction

$$\Big(\big((1-\zeta_1\mathbf{e_2})^{-\odot_L} + 2\big)^{-\odot_L} + \zeta_1 \odot_L \zeta_2^{\odot_L 3}\Big)^{-\odot_L} + \zeta_3^{\odot_L 5}\mathbf{e_3}$$

est rationnelle à gauche.

On définirait de même les fonctions rationnelles à droite en utilisant le produit $\odot_R$. Dans cette Note nous considérons seulement le cas du produit $\odot_L$ et nous appellerons les fonctions obtenues *rationnelles*.

3. Réalisation des fonctions hyper-analytiques

Nous dirons qu'une fonction de la variable quaternionique x et à valeurs dans $\mathbb{H}^{m\times n}$ admet une réalisation si elle peut s'écrire de la manière

$$r(x)=D+C\odot_L(I-\zeta_1A_1-\zeta_2A_2-\zeta_3A_3)^{-\odot_L}\odot_L(\zeta_1B_1+\zeta_2B_2+\zeta_3B_3),$$

où $A_i,\ B_i,\ C$ et D sont des matrices de dimensions compatibles et dont les éléments sont dans $\mathbb{H}$.

Les fonctions d'une variable complexe rationnelles et analytiques dans un voisinage de l'origine correspondent au cas où $A_2=A_3=0,\ B_2=B_3=0$ et $C\in\mathbb{C}^{m\times\ell},\ A_1=\mathbf{e_1}a,\ B_1=\mathbf{e_1}b$ où a et b sont des matrices complexes.

Nous définissons $Z_\ell=(\,\zeta_1I_\ell\quad\zeta_2I_\ell\quad\zeta_3I_\ell\,)$. L'Éq. (1) devient :

$$r(x)=D+C\odot_L(I_\ell-Z_\ell A)^{-\odot_L}\odot_L(Z_\ell B)\quad\text{avec } A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\text{ et } B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1. *Supposons la matrice D inversible et définissons avec $A^\times=A-BD^{-1}C$. La fonction $r(x)$ a alors un inverse, dont une réalisation est* :

$$r(x)^{-\odot_L}=D^{-1}-D^{-1}C\odot_L\left(I_\ell-Z_\ell A^\times\right)^{-\odot_L}\odot_L\left(Z_\ell BD^{-1}\right). \tag{2}$$

Dans le théorème suivant nous utilisons :

$$\operatorname{diag}(Z_\ell,Z_m)=Z_{\ell+m}U\quad\text{où } U=\begin{pmatrix}I_\ell&0&0&0&0&0\\0&0&0&I_m&0&0\\0&I_\ell&0&0&0&0\\0&0&0&0&I_m&0\\0&0&I_\ell&0&0&0\\0&0&0&0&0&I_m\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Théorème 3.2. *Soient R_1 et R_2 deux fonctions rationnelles, à valeurs dans $\mathbb{H}^{n_1\times m}$ et $\mathbb{H}^{m\times n_2}$ et ayant les réalisations*

$$R_i(x)=D^{(i)}+C^{(i)}\odot_L\left(I-ZA^{(i)}\right)^{-\odot_L}\odot_L Z_{\ell_i}B^{(i)}\quad(i=1,2).$$

Soit U définie par (3). *On a* :

$$\begin{aligned}&(R_1\odot_L R_2)(x)\\&\quad=D^{(1)}D^{(2)}+\left(C^{(1)}D^{(1)}C^{(2)}\right)\odot_L\left(I-Z_{\ell_1+\ell_2}U\begin{pmatrix}A^{(1)}&B^{(1)}C^{(2)}\\0&A^{(2)}\end{pmatrix}\right)^{-\odot_L}\odot_L Z_{\ell_1+\ell_2}U\begin{pmatrix}B^{(1)}D^{(2)}\\B^{(2)}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. Le résultat principal

Théorème 4.1. *Une fonction de la variable quaternionique est rationnelle si et seulement si elle admet une réalisation.*

Démonstration. Dans une direction il suffit de noter que les fonctions élémentaires ζ_jM avec $M\in\mathbb{H}^{m\times n}$ admettent une réalisation et d'utiliser les résultats de la section précédente. Mais l'on a

$$\zeta_jM=\left(M\,(\,I_n\quad0\,)\right)\odot_L\left(I_{2n}-\zeta_j\begin{pmatrix}0&I_n\\0&0\end{pmatrix}\right)^{-\odot_L}\odot_L\left(\zeta_j\begin{pmatrix}0\\I_n\end{pmatrix}\right).$$

Dans la direction opposée, il suffit de démontrer le résultat par récurrence sur ℓ pour la fonction $I_\ell - Z_\ell A$. Pour $\ell = 1$ la fonction est rationnelle par définition. Pour passer de $\ell - 1$ à ℓ on dénote $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ for $j = 1, 2, 3$ avec $a_j \in \mathbb{H}$ et $d_j \in \mathbb{H}^{(\ell-1)\times(\ell-1)}$ et on utilise la formule

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-\odot_L} = \begin{pmatrix} (\alpha^\times)^{-\odot_L} & -(\alpha^\times)^{-\odot_L} \odot_L \beta \odot_L \delta^{-\odot_L} \\ -\delta^{-\odot_L} \odot_L \gamma \odot_L (\alpha^\times)^{-\odot_L} & \delta^{-\odot_L} + \delta^{-\odot_L} \odot_L \gamma \odot_L (\alpha^\times)^{-\odot_L} \odot_L \beta \odot_L \delta^{-\odot_L} \end{pmatrix},$$

où $\alpha^\times = \alpha - \beta \odot_L \delta^{-\odot_L} \odot_L \gamma$ (voir [9, formula (0.12), p. 4]) avec

$$\alpha = 1 - \sum_1^3 \zeta_j a_j, \quad \beta = -\sum_1^3 \zeta_j \beta_j, \quad \gamma = -\sum_1^3 \zeta_j c_j, \quad \delta = I_{\ell-1} - \sum_1^3 \zeta_j d_j.$$

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour $\ell - 1$. La fonction $\delta^{-\odot_L}$ est alors rationnelle et donc $\alpha^\times$ et $(\alpha^\times)^{-\odot_L}$ sont aussi rationnelles. On en déduit que $(I_\ell - Z_\ell A)^{-\odot_L}$ est rationnelle.

5. Fonctions rationnelles et problème de Gleason

Il s'agit de trouver l'analogue de l'opérateur R_0. Un espace $\mathcal{M}$ de fonctions hyper-analytiques sera dit invariant à gauche si pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$ il existe des fonctions g_1, g_2 et g_3 dans $\mathcal{M}$ telles que

$$f(x) - f(0) = \zeta_1 \odot_L g_1(x) + \zeta_2 \odot_L g_2(x) + \zeta_3 \odot_L g_3(x).$$

En d'autres termes le problème de Gleason est résoluble dans $\mathcal{M}$. Notons qu'à la différence de [4] nous utilisons le produit de Cauchy–Kovalevskaya. La preuve du résultat suivant est analogue à la preuve d'un théorème de réalisation de [2].

Théorème 5.1. *La fonction r est rationnelle si et seulement si il existe un $\mathbb{H}$-espace vectoriel à gauche $\mathcal{M}$ de dimension finie qui est invariant à gauche et tel que l'on ait*

$$r(x) - r(0) = \zeta_1 \odot_L g_1(x) + \zeta_2 \odot_L g_2(x) + \zeta_3 \odot_L g_3(x) \quad \textit{avec } g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{M}. \tag{4}$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un espace $\mathcal{M}$ répondant aux hypothèses de l'énoncé. Soit $F(x)$ une fonction matricielle dont les colonnes forment une base de $\mathcal{M}$. Il existe des matrices $A_1,\ A_2,\ A_3$ telles que

$$F(x) - F(0) = \zeta_1 \odot_L \big(F(x)A_1\big) + \zeta_2 \odot_L \big(F(x)A_2\big) + \zeta_3 \odot_L \big(F(x)A_3\big).$$

De l'égalité $\zeta_j \odot (F(x)A_j) = F(x) \odot (\zeta_j A_j)$ on déduit que

$$F(x) = (I - \zeta_1 A_1 - \zeta_2 A_2 - \zeta_3 A_3)^{-\odot_L}.$$

De plus il existe des matrices B_j telles que $g_j(x) = F(x)B_j$. Le résultat se déduit alors de (4). La démonstration de l'implication directe se fait à partir de la réalisation.

6. Un exemple

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{H} \mid 3x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Nous définissons

$$k_y(x) = \big(1 - \zeta_1(x)\overline{\zeta_1(y)} - \zeta_2(x)\overline{\zeta_2(y)} - \zeta_3(x)\overline{\zeta_3(y)}\big)^{-\odot_L}, \quad y \in \Omega.$$

La fonction $x \mapsto k_y(x)$ est rationnelle. Définissons $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ et $\nu! = \nu_1!\nu_2!\nu_3!$. Soient $x, y \in \mathbb{H}$. Nous avons :

$$k_y(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^3} \frac{|\nu|!}{\nu!} \zeta^\nu(x) \overline{\zeta^\nu(y)}.$$

La fonction $k_y(x)$ est donc positive dans Ω. Il existe un espace à noyau reproduisant associé. Ce dernier contient l'espace de Hardy du disque de manière isométrique et est l'analogue de l'espace d'Arveson de la boule ; voir [5] pour cet espace et [3] pour des problèmes d'interpolation dans l'espace d'Arveson.

7. Conclusions

Dans le cas classique d'une variable complexe la notion de réalisation permet de développer la théorie des systèmes linéaires. Ces concepts ont des généralisations au cas de plusieurs variables complexes. Voir par exemple [6]. C'est une direction différente que nous proposons dans cette Note. Lorsque l'on identifie $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{C}^2$ on obtient des notions nouvelles, tout à fait différentes des concepts classiques, et qui seront explicitées dans un travail ultérieur.

Références

[1] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, in: Panoramas et Synthèses, Vol. 6, Société Mathématique de France, Paris, 1998.
[2] D. Alpay, C. Dubi, A realization theorem for rational functions of several complex variables, System Control Lett. 49 (3) (2003) 225–229.
[3] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Some finite-dimensional backward shift-invariant subspaces in the ball and a related interpolation problem, Integral Equation Operator Theory 42 (2002) 1–21.
[4] D. Alpay, M. Shapiro, Problème de Gleason et interpolation pour les fonctions hyper-analytiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2003).
[5] W. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras. III. Multivariable operator theory, Acta Math. 181 (1998) 159–228.
[6] J. Ball, T. Trent, V. Vinnikov, Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces, in: Proceedings of Conference in Honor of the 60-th Birthday of M.A. Kaashoek, in: Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 122, Birkhäuser, 2001, pp. 89–138.
[7] H. Bart, I. Gohberg, M. Kaashoek, Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions, in: Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 1, Birkhäuser, Basel, 1979.
[8] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, Clifford Analysis, in: Pitman Res. Notes, Vol. 76, 1982.
[9] H. Dym, J-contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.
[10] K. Gürlebeck, W. Sprössig, Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, in: Mathematical Methods in Practice, Vol. 1, Wiley, 1997.
[11] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A.K. Arbib, Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York, 1969.
[12] H. Malonek, Hypercomplex differentiability its applications, in: Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Deinze, 1993, in: Fund. Theories Phys., Vol. 55, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993, pp. 141–150.