Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 801–804

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs

Aïssa Guesmia

ISGMP, bat. A, UFR MIM, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01, France

Reçu le 29 janvier 2003 ; accepté après révision le 22 avril 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On montre en premier lieu quelques inégalités intégrales nouvelles permettant d'obtenir une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive *non nécessairement décroissante*. Ceci étend des inégalités intégrales dues à A. Haraux, V. Komornik et P. Martinez concernant des fonctions *décroissantes*. Ensuite on donne des applications à la stabilisation (interne ou frontière) de certains systèmes distribués d'évolution non dissipatifs. ***Pour citer cet article : A. Guesmia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

New integral inequalities and applications to stabilization of nondissipative distributed systems. First we prove some new integral inequalities to obtain an estimate on behavior at infinity of a positive and *non necessarly decreasing* function. This extends some integral inequalities due to A. Haraux, V. Komornik and P. Martinez concerning *decreasing* functions. Then we give applications to (internal or boundary) stabilization of certain nondissipative distributed systems. ***To cite this article: A. Guesmia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Rappel de quelques inégalités intégrales connues

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes *dissipatifs* sont basés sur le [7, Lemme 1, p. 425] (qui correspond à notre Lemme 2.1 dans le cas $\lambda = 0$ et $a =$ const), dû à Haraux [4,5], Komornik [6] et Martinez [7].

Ce lemme a été utilisé par Haraux [4] dans le cas $r = 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour l'étude de la stabilisation de certains problèmes linéaires *dissipatifs*, et V. Komornik [6] l'a généralisé au cas $r > 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour étudier la stabilisation des problèmes *dissipatifs* non nécessairement linéaires.

Quand $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ la fonction E est forcément intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et converge vers 0 au moins polynômialement. P. Martinez [7] a démontré [7, Lemme 1, p. 425] ce qui lui a permis de considérer des fonctions

Adresse e-mail : guesmia@poncelet.sciences.univ-metz.fr (A. Guesmia).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00214-0

décroissantes qui convergent vers 0 plus lentement que tout polynôme (comme, par exemple, $E(t)=1/\ln(t+2)$).

Or dans l'étude de la stabilisation des divers systèmes distribués, on tombe sur une fonction positive *non nécessairement décroissante* ce qui fait la motivation de ce travail où les résultats de [1] et [2] consistent une première tentative.

2. Nouvelles inégalités intégrales

On commence par généraliser [7, Lemme 1, p. 425] dans plusieurs directions.

Lemme 2.1. *Soient $E:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ dérivable, $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^{+*}$ continue et $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ strictement croissante de classe C^1 vérifiant $\phi(0)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}\phi(t)=+\infty$. Supposons qu'il existe $r,\lambda\geqslant 0$ tels que*

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty}\phi'(t)E^{r+1}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant a(s)E(s), & \forall s\geqslant 0,\\ E'(t)\leqslant \lambda E(t), & \forall t\geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Soient $\omega(t)=1/a(\phi^{-1}(t))$, $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ et $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ définies par

$$\int_s^{\phi(g(s))} \mathrm{e}^{\lambda(r+1)\phi^{-1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{e}^{\lambda(r+1)\phi^{-1}(s)}}{(\omega(s))^{r+1}}\left(\left(\frac{\omega(0)}{E(0)}\right)^r+r\int_0^s\big(\omega(\tau)\big)^{r+1}\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{2}$$

$$h(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\in\big[0,g(0)\big[,\\ \max g^{-1}(\{t\}) & \text{si } t\geqslant g(0).\end{cases} \tag{3}$$

Alors E vérifie, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, les estimations suivantes :

$$E(t)\leqslant\frac{E(0)}{\omega(0)}\omega\big(h(t)\big)\,\mathrm{e}^{\lambda(t-\phi^{-1}(h(t)))}\,\mathrm{e}^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\quad \text{si } r=0, \tag{4}$$

$$E(t)\leqslant\omega\big(h(t)\big)\,\mathrm{e}^{\lambda(t-\phi^{-1}(h(t)))}\left(\left(\frac{\omega(0)}{E(0)}\right)^r+r\int_0^{h(t)}\big(\omega(\tau)\big)^{r+1}\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1/r}\quad \text{si } r>0. \tag{5}$$

Remarques. (1) $g\in C(\mathbb{R}^+)$ et $\lim_{s\to+\infty}g(s)=+\infty$, et donc h est bien définie. (2) Si $\lambda=0$, $a(t)=\text{const}$ et $\phi(t)=t$, alors (4) et (5) sont optimales (voir [6]).

Preuve du Lemme 2.1. On pose $E_0(t)=E(\phi^{-1}(t))$. D'après (1) on a

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty}E_0^{r+1}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\omega(s)}E_0(s), & \forall s\geqslant 0,\\ E_0'(t)\leqslant\frac{\lambda}{\phi'(\phi^{-1}(t))}E_0(t), & \forall t\geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

La fonction $\psi(s):=\int_s^{+\infty}E_0^{r+1}(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie $\psi'(s)(\psi(s))^{-(r+1)}\leqslant-(\omega(s))^{r+1}$. D'autre part, pour $s\geqslant 0$, on pose $f_s(t)=\mathrm{e}^{-\lambda(r+1)\phi^{-1}(t)}\int_s^t\mathrm{e}^{\lambda(r+1)\phi^{-1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$ et on a

$$E_0^{r+1}(t)\geqslant\partial_t\big(f_s(t)E_0^{r+1}(t)\big),\quad \forall t\geqslant s. \tag{7}$$

Soient $t\geqslant g(0)$ et $s=h(t)$, donc $\psi(h(t))\geqslant\int_{h(t)}^{\phi(t)}E_0^{r+1}(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f_{h(t)}(\phi(t))E_0^{r+1}(\phi(t))$. Donc on conclut de l'inégalité différentielle de ψ que, pour tout $t\geqslant g(0)$,

$$E(t)\leqslant\frac{E(0)}{\omega(0)}\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\int_{h(t)}^{\phi(t)}\mathrm{e}^{\lambda\phi^{-1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\quad \text{si } r=0, \tag{8}$$

$$E(t) \leqslant e^{\lambda t}\left(\int_{h(t)}^{\phi(t)} e^{\lambda(r+1)\phi^{-1}(\tau)}\,d\tau\right)^{-1/(r+1)}\left(\left(\frac{\omega(0)}{E(0)}\right)^{r} + r\int_{0}^{h(t)} \big(\omega(\tau)\big)^{r+1}\,d\tau\right)^{-1/(r(r+1))} \tag{9}$$

si $r > 0$, d'où, d'après (2) et (3), (4) et (5) pour $t \geqslant g(0)$. Si $t \in [0, g(0)[$, alors on a $h(t) = 0$, et (1) implique que $E(t) \leqslant E(0)e^{\lambda t}$ ce qui coïncide avec (4) et (5).

Commentaire. Les termes à droite de (8) et (9) atteignent leur minimum au point $h(t)$. Mais (8) et (9) restent vraies pour tout h positive et inférieure à ϕ. Donc pour des choix simples de h, on obtient des estimations plus faibles que (4) et (5).

On généralise ici le Lemme 2.1 au cas d'une perturbation du second membre.

Lemme 2.2. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dérivable, $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $a_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ comme dans le Lemme* 2.1. *Supposons qu'il existe $\lambda, r, p \geqslant 0$ tels que $\sup_{t\geqslant 0} a_3(t) < +\infty$, $\lambda(r+1)\sup_{t\geqslant 0}\frac{a_3(t)}{\phi'(t)} < 1$ et*

$$\begin{cases} \int_s^T \phi'(t)E^{r+1}(t)\,dt \leqslant a_1(s)E(s) + a_2(s)E^{p+1}(s) + a_3(T)E^{r+1}(T), \quad \forall 0 \leqslant s \leqslant T, \\ E'(t) \leqslant \lambda E(t), \quad \forall t \geqslant 0. \end{cases} \tag{10}$$

On suppose aussi que $a_3(t) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$ ou $\lambda = 0$ ou ϕ' est décroissante.

Alors E vérifie (4) *et* (5) *où a est définie par* (11).

Remarques. (3) Dans le cas $\phi(t) = t$, $p = r = 0$ et $a_i =$ const, le Lemme 2.2 améliore une version démontrée et utilisée dans [1] et [2]. (4) Si $r = 0$ et $\lambda a_3(t) \geqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\phi'(\tau)$ sur $\mathbb{R}^+$, alors $E(t) = e^{\lambda t}$ satisfait (10).

Preuve du Lemme 2.2. Il suffit de montrer que E vérifie (1). D'après les hypothèses supposées sur a_3 on montre que $\int_s^T \phi'(t)E^{r+1}(t)\,dt \leqslant b(s)E(s)$ où

$$b(s) = \begin{cases} a_1(s) + a_2(s)E^p(s) & \text{si } a_3(t) \leqslant 0,\ \forall t \geqslant 0, \\ \dfrac{a_1(s) + a_2(s)E^p(s) + (\sup_{t\geqslant 0} a_3(t))E^r(s)}{1 - \lambda(r+1)\sup_{t\geqslant 0} a_3(t)/\phi'(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit f_0 définie précédemment. On intègre $\phi'(t)E^{r+1}(t) \geqslant \partial_t(f_0(\phi(t))E^{r+1}(t))$ sur $[0, s]$ et on obtient $E(s) \leqslant (b(0)E(0)/f_0(\phi(s)))^{1/(r+1)}$. Comme, de plus, $E(t) \leqslant E(0)\,e^{\lambda t}$, alors

$$E(s) \leqslant \min\left\{E(0)\,e^{\lambda s}, \left(\frac{b(0)E(0)}{f_0(\phi(s))}\right)^{1/(r+1)}\right\} := d(s), \quad \forall s \geqslant 0.$$

En utilisant cette inégalité, on conclut que E vérifie (1) avec

$$a(s) = \begin{cases} a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p & \text{si } a_3(t) \leqslant 0, \\ \dfrac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p + (\sup_{t\geqslant 0} a_3(t))(d(s))^r}{1 - \lambda(r+1)\sup_{t\geqslant 0} a_3(t)/\phi'(t)} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$

3. Applications à la stabilisation

On donne maintenant trois applications à la stabilisation uniforme (pour simplifier) des systèmes distribués d'évolution non nécessairement dissipatifs, c'est-à-dire l'énergie E n'est pas décroissante en général contrairement aux cas considérés auparavant, et par conséquent, le [7, Lemme 1, p. 425], n'est plus applicable.

3.1. Equation générale des ondes avec un potentiel négatif

$$\begin{cases} u'' - Au - au + u' = 0, & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), & \Omega, \end{cases} \tag{P1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ assez régulière, $a > 0$ et $Au = \sum_{i,j} \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u)$ un opérateur coercif et borné. Si $a \leqslant 0$, la stabilisation de (P1) est un résultat très connu (voir [6]). On définit l'énergie de (P1) par $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u'|^2 + \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{x_i} u \partial_{x_j} u)\,\mathrm{d}x$ et on a $E'(t) = \int_\Omega (auu' - |u'|^2)\,\mathrm{d}x \leqslant ac_0 E(t)$, où $c_0 > 0$ dépend uniquement de Ω et de A. On montre que, si a est assez petit, alors $\exists c, \omega > 0\colon\ E(t) \leqslant cE(0)\,\mathrm{e}^{-\omega t},\ \forall t \geqslant 0$.

3.2. Système couplé avec deux constantes de couplage différentes

$$\begin{cases} u_1'' - \Delta u_1 + u_1' + a_2 u_2 = 0, & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2'' - \Delta u_2 + u_2' + a_1 u_1 = 0, & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0, & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x), \quad i = 1,2, & \Omega, \end{cases} \tag{P2}$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Si $a_1 = a_2$, la stabilisation de (P2) est un résultat standard (voir [2]). En utilisant le Lemme 2.1, on montre que, si $\max\{|a_1|, |a_2|\}$ est assez petit, alors $\exists c, \omega > 0\colon\ E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_1'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_2|^2)\,\mathrm{d}x \leqslant cE(0)\,\mathrm{e}^{-\omega t},\ \forall t \geqslant 0$.

3.3. Système abstrait avec un terme perturbant d'ordre infériur

$$\begin{cases} u'' + Au + h\bigl(A^{1/2}u\bigr) + Bu' = 0, & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), & \Omega, \end{cases} \tag{P3}$$

où A est un opérateur linéaire coercif auto-adjoint, B est un opérateur linéaire borné et h est une fonction donnée. La stabilisation de (P3) est très connue dans le cas $h = 0$ (voir [6] est ses références). En introduisant une énergie équivalente (voir [1] et [2]), on montre que, si la partie non linéaire de h est globalement Lipschitz avec une constante de Lipschitz assez petite, alors

$$\exists c, \omega > 0\colon \quad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \bigl(|u'|^2 + \bigl|A^{1/2}u\bigr|^2\bigr)\,\mathrm{d}x \leqslant cE(0)\,\mathrm{e}^{-\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

La méthode présentée dans cette Note est directe et très souple ; elle peut être appliquée sur différents systèmes non dissipatifs et obtenir des estimations (exponentielle, polynômiale ou logarithmique par exemple) de stabilisation. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour les preuves détaillées et les différentes applications générales de cette méthode.

Références

[1] A. Guesmia, Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 332 (2001) 633–636.
[2] A. Guesmia, A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems, SIAM J. Control Optim., to appear.
[3] A. Guesmia, New integral inequalities and applications to stabilization of nondissipative distributed systems, en préparation.
[4] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaire périodiques, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No. 78011, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.
[5] A. Haraux, Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires, Laboratoire d'Analyse Numérique, Prépublication No. 78010, Université Paris 7, Paris, 1978.
[6] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Masson–Wiley, Paris, 1994.
[7] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM: Control. Optim. Calc. Var. 4 (1999) 419–444.