Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 791–794
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des groupes

Cellules de Kazhdan–Lusztig et correspondance de Robinson–Schensted

Lacrimioara Iancu

Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France

Reçu le 6 février 2003 ; accepté après révision le 25 mars 2003

Présenté par Jacques Tits

Résumé

Kazhdan et Lusztig ont introduit des cellules (à gauche, à droite et bilatères) dans un groupe de Coxeter quelconque. Pour le groupe symétrique, ils ont montré que ces cellules sont données par la correspondance de Robinson–Schensted. Ici, nous décrivons une correspondance de Robinson–Schensted généralisée pour les groupes de réflexions complexes $G(e, 1, n)$. Dans un travail récent en commun avec C. Bonnafé, nous avons montré que, dans le cas $e = 2$ (où $G(2, 1, n)$ est le groupe de Coxeter de type B_n), cette correspondance détermine les cellules de Kazhdan–Lusztig à certains paramètres inégaux. ***Pour citer cet article : L. Iancu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Kazhdan–Lusztig cells and Robinson–Schensted correspondence. Kazhdan and Lusztig have introduced (left, right and two-sided) cells in an arbitrary Coxeter group. For the symmetric group, they showed that these cells are given by the Robinson–Schensted correspondence. Here, we describe a Robinson–Schensted correspondence for the complex reflection groups $G(e, 1, n)$. In a recent joint work with C. Bonnafé, we have shown that, in the case $e = 2$ (where $G(2, 1, n)$ is the Coxeter group of type B_n), this correspondence determines the Kazhdan–Lusztig cells with respect to certain unequal parameters. ***To cite this article: L. Iancu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Une correspondance de Robinson–Schensted pour les groupes de réflexions complexes

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, n\}$. La correspondance de Robinson–Schensted classique est une correspondance biunivoque entre les permutations $\pi \in \mathfrak{S}_n$, et les paires $(A(\pi), B(\pi))$ de tableaux standard de taille n, de même forme. Ici, le tableau $A(\pi)$ s'obtient par l'algorithme d'insertion de Knuth, et le tableau $B(\pi)$ tient compte de l'ordre dans lequel les cases ont été insérées dans $A(\pi)$. Pour plus de détails voir, par exemple, [8, 5.1.4]. Le but de ce paragraphe est de décrire une généralisation de cette correspondance au groupe de réflexions complexes $G(e, 1, n) = (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ où $e \geqslant 1$. Ce groupe a une présentation avec des générateurs $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ et les relations suivantes :

Adresse e-mail : iancu@desargues.univ-lyon1.fr (L. Iancu).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00172-9

$$\begin{array}{ll} t^e = 1, & s_i^2 = 1 \quad \text{pour } i \geqslant 1, \\ t s_1 t s_1 = s_1 t s_1 t, & t s_i = s_i t \quad \text{pour } i \geqslant 2, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{pour } i \geqslant 1, & s_i s_j = s_j s_i \quad \text{pour } |i-j| \geqslant 2\ ; \end{array}$$

voir Ariki et Koike [2] et Broué et Malle [5]. Ainsi, on voit que $G(2,1,n)$ est le groupe de Coxeter de type B_n.

Ici il est commode de travailler avec une réalisation de $G(e,1,n)$ comme sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{I(e,n)}$ sur l'ensemble $I(e,n) = \{\varepsilon i \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ \varepsilon^e = 1,\ \varepsilon \in \mathbb{C}\}$. En effet, il est facile de vérifier que

$$t \mapsto \bigl(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{e-1}\bigr),\ s_1 \mapsto \prod_{j=0}^{e-1} \bigl(\zeta^j\, 1, \zeta^j\, 2\bigr), \ldots, s_{n-1} \mapsto \prod_{j=0}^{e-1} \bigl(\zeta^j\, (n-1), \zeta^j\, n\bigr),$$

définissent un plongement $G(e,1,n) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{I(e,n)}$, où ζ est une racine primitive e-ième de l'unité. (Ainsi, t est envoyé sur un e-cycle, et tout s_i est envoyé sur un produit de e transpositions disjointes.) Via ce plongement, on a : $G(e,1,n) \simeq \{\pi \in \mathfrak{S}_{I(e,n)} \mid \forall \varepsilon, x\ \pi(\varepsilon x) = \varepsilon \pi(x)\}$. Remarquons que tout élément de $G(e,1,n)$ est uniquement déterminé par les images de $1, \ldots, n$. On va donc représenter $\pi \in G(e,1,n)$ simplement par la suite de ces images : $\pi = (\varepsilon_1 p_1, \varepsilon_2 p_2, \ldots, \varepsilon_n p_n)$ où $\{p_1, \ldots, p_n\}$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ et les ε_i sont des racines e-ième de l'unité. Étant donné une telle suite, nous lui associerons une paire de multi-tableaux

$$\mathbf{A}(\pi) = \bigl(A_0(\pi), \ldots, A_{e-1}(\pi)\bigr) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\pi) = \bigl(B_0(\pi), \ldots, B_{e-1}(\pi)\bigr).$$

Pour cela, on utilise le même principe que dans l'algorithme d'insertion de Knuth, avec la modification suivante : on insère une case contenant p_i dans le tableau $A_j(\pi)$ où $j \in \{0, \ldots, e-1\}$ est déterminé par la condition que $\varepsilon_i = \zeta^j$. Ceci donne une nouvelle case ajoutée sur la a_i-ème ligne et b_i-ème colonne (disons) de $A_j(\pi)$. Parallèlement, on ajoute une case contenant le nombre i dans $B_j(\pi)$, à la position (a_i, b_i).

Exemple 1. Soit $\pi = (6, 5, \zeta^2 1, \zeta\, 2, \zeta\, 7, \zeta\, 3, 4) \in G(3,1,7)$. Alors, on obtient :

$$\mathbf{A}(\pi) = \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 7 & \\ \cline{1-1} \end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \qquad \mathbf{B}(\pi) = \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \\ \cline{1-1} \end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right).$$

On appelle e-tableau standard de taille n une suite $\mathbf{T} = (T_0, \ldots, T_{e-1})$ où les T_j sont des tableaux standard et le nombre total des cases est égal à n (où les cases sont remplies par les nombres $1, \ldots, n$). On note $\widetilde{\mathbf{T}} = (T_0, T_{e-1}, \ldots, T_2, T_1)$. La forme de $\mathbf{T}$ est la suite des partitions $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{e-1})$ où λ_j spécifie la forme de T_j. Dans l'exemple ci-dessus, $\mathbf{A}(\pi)$ et $\mathbf{B}(\pi)$ sont des 3-tableaux standard de taille 7, de forme $((1^3), (21), (1))$.

Soit $\mathbf{T}$ un e-tableau standard de taille n. Alors l'ensemble $\mathbf{T}(e,1,n) := \{\pi \in G(e,1,n) \mid \mathbf{B}(\pi) = \mathbf{T}\}$ s'appelle une *cellule de Robinson–Schensted* de $G(e,1,n)$. Nous obtenons ainsi une partition $G(e,1,n) = \coprod_{\mathbf{T}} \mathbf{T}(e,1,n)$, où $\mathbf{T}$ parcourt l'ensemble des e-tableaux standard de taille n.

Proposition 1.1 (voir aussi [11, Théorème 3.3]). *Avec les notations ci-dessus, on a* :

(a) *L'application $\pi \mapsto (\mathbf{A}(\pi), \mathbf{B}(\pi))$ est une bijection entre $G(e,1,n)$ et les paires de e-tableaux standard de taille n, de la même forme.*
(b) *Pour tout $\pi \in G(e,1,n)$, on a $\mathbf{A}(\pi^{-1}) = \widetilde{\mathbf{B}}(\pi)$ et $\mathbf{B}(\pi^{-1}) = \widetilde{\mathbf{A}}(\pi)$.*
(c) *Toute cellule de Robinson–Schensted contient au plus une involution de $G(e,1,n)$.*

La preuve utilise essentiellement le même argument que pour le cas du groupe symétrique (voir [8, 5.1.4, Théorèmes A et B]). En effet, il est clair par construction que, pour tout $\pi \in G(e,1,n)$, les multi-tableaux $\mathbf{A}(\pi), \mathbf{B}(\pi)$ sont des e-tableaux standard de la même forme. Réciproquement, étant donnée une paire de multi-tableaux $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de la même forme, l'élément $\pi \in G(e,1,n)$ correspondant est défini de la façon suivante :

pour $i = n, \ldots, 2, 1$ soit (j, a, b) la position de i, c'est-à-dire i apparaît sur la a-ème ligne et b-ème colonne du tableau B_j. Nous posons $\varepsilon_i = \zeta^j$. Ensuite, p_i est l'élément qui est effacé quand on applique l'inverse de l'algorithme d'insertion à la case (j, a, b) de A. Pour prouver (b) on utilise l'implication $\pi(i) = \zeta^j p_i \Rightarrow p_i = \pi(\zeta^{e-j} i)$ et on raisonne ensuite comme pour $\mathfrak{S}_n$ [8, 5.1.4, Théorème B]. L'affirmation (c) est une conséquence directe de (a) et (b).

Remarque 1. La correspondance ci-dessus a été introduite et étudiée par les combinatoristes ; voir, par exemple, Okada [11] qui l'introduit pour tout produit en couronne $G \wr \mathfrak{S}_n$, où G est un groupe fini quelconque. Au delà de ses propriétés purement combinatoires, le point important pour nous est le fait que cette correspondance peut être utilisée pour définir une partition du groupe $G(e, 1, n)$. Si $e = 2$, nous verrons que cette partition correspond à certaines cellules de Kazhdan–Lusztig. Il serait très intéressant de trouver une interprétation similaire pour la partition dans le cas $e > 2$.

Un premier pas dans cette direction est la proposition suivante, qui généralise un théorème de Knuth concernant les cellules de Robinson–Schensted pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (voir [1]). Pour cela nous avons besoin de quelques ingrédients supplémentaires. Nous utilisons les notations suivantes :

$$S := \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}, \quad t_{1,k} := t^k, \quad t_{i,k} := s_{i-1} t_{i-1,k} s_{i-1}, \quad i \in \{2, \ldots, n\},\ k \in \{0, 1, \ldots, e-1\} ;$$
$$S' := S \cup \bigl\{t_{i,k} \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, e-1\}\bigr\}.$$

Enfin, notons $\mathcal{L}'(\pi) := \{u \in S' \mid \ell(u\pi) < \ell(\pi)\}$ pour $\pi \in G(e, 1, n)$, où on utilise la fonction longueur ℓ définie par Bremke et Malle [4]. Soient $\pi, \rho \in G(e, 1, n)$ et $s \in S$; définissons :

$$\pi \xrightarrow{s} \rho \quad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad \rho = s\pi, \quad \ell(\rho) > \ell(\pi) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'(\pi) \nsubseteq \mathcal{L}'(\rho),$$

et $\pi \overset{s}{\longleftrightarrow} \rho$ si $\pi \xrightarrow{s} \rho$ ou $\rho \xrightarrow{s} \pi$. Enfin nous écrivons $\pi \leftrightarrow \rho$ s'il existe une chaîne d'éléments $\pi = \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m = \rho$ et $s_i \in S$ tels que $\pi_i \overset{s_i}{\longleftrightarrow} \pi_{i+1}$ pour chaque i.

Proposition 1.2. *Soient $\pi, \rho \in G(e, 1, n)$. Alors $\mathbf{B}(\pi) = \mathbf{B}(\rho)$ si et seulement si $\pi \leftrightarrow \rho$.*

La preuve est analogue à celle donnée pour le cas $e = 2$ (cf. [3]), mais dans le cas général on utilise la fonction longueur ℓ et les expressions réduites pour $\pi \in G(e, 1, n)$ définies par Bremke et Malle [4].

2. Cellules de Kazhdan–Lusztig à paramètres inégaux

Commençons par quelques rappels dans un cadre général. Soit (W, S) un système de Coxeter quelconque. Dans [7], Kazhdan et Lusztig ont défini une partition de W en cellules (à gauche, à droite ou bilatères). Cette construction a été généralisée par Lusztig [9,10], en prenant en compte la possibilité d'associer des poids aux générateurs $s \in S$. Plus précisément, soit Γ un groupe abélien et $\varphi : W \to \Gamma$ une « fonction de poids », telle que $\varphi(w_1 w_2) = \varphi(w_1)\varphi(w_2)$ pour $w_1, w_2 \in W$ tels que $l(w_1 w_2) = l(w_1) + l(w_2)$. En plus, on suppose qu'il y a une partie $\Gamma_+ \subset \Gamma$ fermée multiplicativement telle que $\varphi(s) \in \Gamma_+$ $(s \in S)$ et $\Gamma = \Gamma_+ \amalg \{1\} \amalg \Gamma_-$ où $\Gamma_- := \{\gamma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma_+\}$. Soit H l'algèbre de Iwahori–Hecke associée à (W, S) sur l'anneau $A = \mathbb{Z}[\Gamma]$. Le choix de $\Gamma_+ \subset \Gamma$ détermine alors une base « canonique » $\{C'_w \mid w \in W\}$ de H ; voir [9, Proposition 2]. Le produit $C'_s C'_w$ $(s \in S,\ w \in W)$ est explicitement décrit dans [9, Proposition 4]. On écrit $C'_x C'_y = \sum_{z \in W} h_{xyz} C'_z$ où $h_{xyz} \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ pour tout $x, y \in W$.

Pour $y, w \in W$, on écrit $y \leqslant_L w$ s'il existe une suite $y = y_0, y_1, \ldots, y_k = w$ d'éléments dans W et une suite de générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S$ tels que $h_{\sigma_i y_i y_{i-1}} \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. La relation d'équivalence associée au préordre

$\leqslant_L$ est notée par $\sim_L$ et les classes d'équivalence correspondantes sont appelées les *cellules à gauche* de W (par rapport à $\varphi : W \to \Gamma$ et au choix de $\Gamma_+ \subset \Gamma$).

Exemple 2. Soit $W_n := G(2,1,n)$, c'est-à-dire que (W_n, S), où $S = \{t, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$, est un système de Coxeter de type B_n. Soit $A = \mathbb{Z}[V^{\pm 1}, v^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent en deux indéterminées V, v indépendantes. Soit $\Gamma = \{V^a v^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\Gamma_+ := \{V^a v^b \mid a > 0,\ b \in \mathbb{Z}\} \cup \{v^b \mid b > 0\}$. On définit $\varphi : W_n \to \Gamma$ par $\varphi(t) = V$ et $\varphi(s_i) = v$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Alors toutes les conditions mentionnées ci-dessus sont satisfaites et nous obtenons une partition de W_n en cellules à gauche.

Théorème 2.1 (voir [3]). *Avec les choix de $\varphi : W_n \to \Gamma$ et $\Gamma_+ \subset \Gamma$ spécifiés dans l'Exemple* 2, *deux éléments de W_n sont dans la même cellule à gauche de Kazhdan–Lusztig si et seulement si ils sont dans la même cellule de Robinson–Schensted* (*au sens du* §1).

Remarque 2. Si $e = 1$, alors on a $G(1,1,n) = \mathfrak{S}_n$ et c'est un groupe de Coxeter de type A_{n-1}, avec ensemble de générateurs $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Dans ce cas, toute fonction de poids $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \Gamma$ est de la forme $\varphi(w) = v^{l(w)}$ pour un élément fixé $v \in \Gamma_+$. Par conséquent, il existe exactement une partition de $\mathfrak{S}_n$ en cellules à gauche. D'après Kazhdan–Lusztig [7, §5], on a $\pi \sim_L \pi'$ si et seulement si $B(\pi) = B(\pi')$, où $B(\pi)$ est donné par la correspondance de Robinson–Schensted classique.

Quelques ingrédients dans la démonstration du Théorème 2.1 (*les détails paraîtront dans* [3]) :

(1) Soit $w \in W_n$. Alors le nombre des facteurs égaux à t dans une expression réduite de w ne dépend pas du choix de l'expression réduite. On note ce nombre par $l_t(w)$. Dans [3], nous montrons l'implication $y \leqslant_L w \Rightarrow l_t(w) \leqslant l_t(y)$ pour tout $y, w \in W_n$. En particulier, ceci implique que $y \sim_L w \Rightarrow l_t(y) = l_t(w)$.

(2) On considère le sous-groupe parabolique $\mathfrak{S}_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \subseteq W_n$. Soit X_n l'ensemble de tous les $w \in W_n$ tels que w soit de longueur minimale dans $w\mathfrak{S}_n$. Soit $C \subset \mathfrak{S}_n$ une cellule à gauche. Alors on sait (d'après Geck [6]) que $X_n \cdot C$ est une réunion de cellules à gauche dans W_n. En combinaison avec (1), cela donne des restrictions très fortes sur la forme des cellules à gauche dans W_n.

(3) On fixe $0 \leqslant l \leqslant n$ et on considère le sous-groupe parabolique $\mathfrak{S}_l \times \mathfrak{S}_{n-l} \subseteq \mathfrak{S}_n$. Soit Y_n^l l'ensemble de tous les $\pi \in \mathfrak{S}_n$ tels que π soit de longueur minimale dans $(\mathfrak{S}_l \times \mathfrak{S}_{n-l})\pi$. Alors tout élément $w \in W_n$ s'écrit de façon unique $w = abc$ où $l(w) = l(a) + l(b) + l(c)$ et $a \in X_n$, $b \in \mathfrak{S}_l \times \mathfrak{S}_{n-l}$, $c \in Y_n^l$ et $l = l_{t(w)}$. Par un raffinement de l'argument de (2), nous montrons l'équivalence suivante :

$$w = abc \sim_L w' = a'b'c' \quad \Leftrightarrow \quad \ell_t(a) = \ell_t(a'), \quad b \sim_L b' \quad \text{et} \quad c = c'.$$

Finalement, nous montrons par un argument purement combinatoire que la condition de droite est équivalente à la condition que abc et $a'b'c$ sont dans la même cellule de Robinson–Schensted.

Références

[1] S. Ariki, Robinson–Schensted correspondence and left cells, in: Combinatorial Methods in Representation Theory, Kyoto, 1998, in: Adv. Stud. Pure Math., Vol. 28, 2000, pp. 1–20.

[2] S. Ariki, K. Koike, A Hecke algebra of $(Z/rZ) \wr S_n$ and construction of its irreducible representations, Adv. Math. 106 (1992) 216–243.

[3] C. Bonnafé, L. Iancu, Left cells in type B_n with unequal parameters, Preprint, 2003 arXiv:math.RT/0302037.

[4] K. Bremke, G. Malle, Reduced words and a length function for $G(e,1,n)$, Indag. Math. (N.S.) 8 (1997) 453–469.

[5] M. Broué, G. Malle, Zyklotomische Heckealgebren, Astérisque 212 (1993) 119–189.

[6] M. Geck, On the induction of Kazhdan–Lusztig cells, Bull. London Math. Soc., à paraître.

[7] D.A. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979) 165–184.

[8] D.E. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 3: Sorting and Searching, 2nd edition, Addison-Wesley, 1998.

[9] G. Lusztig, Left cells in Weyl groups, in: R.L.R. Herb, J. Rosenberg (Eds.), Lie Group Representations I, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1024, Springer-Verlag, 1983, pp. 99–111.

[10] G. Lusztig, Hecke Algebras with Unequal Parameters, in: CRM Monogr. Ser., Vol. 18, American Mathematical Society, 2003.

[11] S. Okada, Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's lattices, J. Combin. Theory Ser. A 55 (1990) 14–32.