Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 667–670
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Modèles de Markov Triplet et filtrage de Kalman
Triplet Markov models and Kalman filtering

François Desbouvries, Wojciech Pieczynski

GET/INT, département communications, image et traitement de l'information, 9, rue Charles Fourier, 91011 Evry, France

Reçu le 5 septembre 2002 ; accepté le 25 février 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Le filtrage de Kalman permet d'estimer un processus multivarié inobservable $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un processus multivarié observé $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Cet outil admet de multiples applications, en particulier en traitement du signal. Dans sa formulation classique, il s'appuie sur un modèle stochastique dynamique dans lequel $\mathbf{x}$ vérifie une équation d'évolution linéaire et la loi de $\mathbf{y}$ conditionnelle à $\mathbf{x}$ est donnée par les lois $p(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_n)$. Nous proposons dans cette Note deux généralisations successives du modèle classique. La première, qui mène au modèle dit « Couple », consiste à supposer que l'équation d'évolution de $\mathbf{x}$ est en fait vérifiée par le couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Nous montrons que le nouveau modèle est strictement plus général que le modèle classique et qu'il peut, néanmoins, servir de support à la mise en place d'un filtrage de type Kalman. La deuxième, qui mène au modèle dit « Triplet », consiste à supposer que l'équation d'état est vérifiée par un triplet $(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$, où $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus auxiliaire, éventuellement sans existence physique. Nous montrons que le modèle Triplet est strictement plus général que le modèle Couple, et permet encore la mise en place du filtrage de Kalman. ***Pour citer cet article : F. Desbouvries, W. Pieczynski, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Kalman filtering enables to estimate a multivariate unobservable process $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ from an observed multivariate process $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. It admits a lot of applications, in particular in signal processing. In its classical framework, it is based on a dynamic stochastic model in which $\mathbf{x}$ satisfies a linear evolution equation and the conditional law of $\mathbf{y}$ given $\mathbf{x}$ is given by the laws $p(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_n)$. In this Note, we propose two successive generalizations of the classical model. The first one, which leads to the "Pairwise" model, consists in assuming that the evolution equation of $\mathbf{x}$ is indeed satisfied by the pair $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. We show that the new model is strictly more general than the classical one, and yet still enables Kalman-like filtering. The second one, which leads to the "Triplet" model, consists in assuming that the evolution equation of $\mathbf{x}$ is satisfied by a triplet $(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$, in which $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is an (artificial) auxiliary process. We show that the Triplet model is strictly more general than the Pairwise one, and yet still enables Kalman filtering. ***To cite this article: F. Desbouvries, W. Pieczynski, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Adresses e-mail : Francois.Desbouvries@int-evry.fr (F. Desbouvries), Wojciech.Pieczynski@int-evry.fr (W. Pieczynski).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00152-3

1. Introduction

Considérons le modèle dynamique stochastique linéaire classique

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_n^1 \mathbf{x}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n, \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n^1 \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \end{cases} \tag{1}$$

dans lequel $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus d'intérêt inobservable (ou caché) et $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le processus observé. Les vecteurs aléatoires $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$ et $\mathbf{u}_n$ sont à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$, et les vecteurs aléatoires $\mathbf{w}_n = [\mathbf{u}_n^{\mathrm{T}}, \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ sont centrés, indépendants et indépendants de $\mathbf{x}_0$. Un tel modèle est, en particulier, un « processus de Markov caché » (le processus $\mathbf{x}$ est de Markov).

Dans de nombreuses applications, on cherche à calculer récursivement certaines lois liées à la loi de $\mathbf{x}$ conditionnelle à $\mathbf{y}$ (dite « a posteriori »), au fur et à mesure de l'arrivée de nouvelles observations. Considérons par exemple le problème de filtrage, où l'on souhaite calculer récursivement $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$, avec $\mathbf{y}_{0:n} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=0}^n$. Les Éqs. (1) impliquent $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n)$ et $p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_{0:n}) = p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})$, ce qui permet de calculer $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{0:n+1})$ à partir de $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$ par

$$p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{0:n+1}) = \frac{p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1}) \int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})\, \mathrm{d}\mathbf{x}_n}{\int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1}) \left[\int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})\, \mathrm{d}\mathbf{x}_n\right] \mathrm{d}\mathbf{x}_{n+1}}. \tag{2}$$

Si de plus $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{w}_n$ sont Gaussiennes, les densités a posteriori sont également Gaussiennes ; calculer récursivement les lois $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$ revient alors à calculer récursivement leurs moyennes et matrices de covariance, et (2) se ramène au célèbre filtre de Kalman [6] (voir également [1,5,3]). Si l'hypothèse Gaussienne n'est pas vérifiée, ou si (1) est remplacé par un modèle non linéaire, le calcul de (2) peut devenir impossible. Pour cette raison, des méthodes de calcul approché, à base de simulations Monte Carlo, ont été proposées [13,4,2].

2. Modèle de Markov Couple

De manière analogue à celles qui ont permis de généraliser les champs, chaînes, et arbres de Markov cachés aux champs [9], chaînes [12], et arbres [10] de Markov Couple, nous proposons de considérer un modèle dans lequel le couple $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ vérifie les mêmes contraintes que $\mathbf{x}$ dans le modèle classique. Plus précisément, considérons le modèle vectoriel suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_n^1 & \mathbf{F}_n^2 \\ \mathbf{H}_n^1 & \mathbf{H}_n^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_n^{11} & \mathbf{G}_n^{12} \\ \mathbf{G}_n^{21} & \mathbf{G}_n^{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_n} \tag{3}$$

dans lequel $\{\mathbf{w}_n\}_{n \geqslant 0}$ sont des vecteurs aléatoires centrés, indépendants et indépendants de $\mathbf{x}_0$. Un tel processus $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$) sera appelé « Modèle linéaire de Markov Couple » (MLMCouple). Ce modèle est une généralisation directe du Modèle linéaire de Markov caché (MLMC) classique (1), ce dernier étant obtenu en posant $\mathbf{F}_n^2 = \mathbf{0}_{N \times q}$, $\mathbf{H}_n^2 = \mathbf{0}_{q \times q}$, $\mathbf{G}_n^{12} = \mathbf{0}_{N \times q}$, $\mathbf{G}_n^{21} = \mathbf{0}_{q \times p}$ et $\mathbf{G}_n^{22} = \mathbf{I}_{q \times q}$.

Proposition 2.1. *Pour le modèle défini par* (3)*, la loi* $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{0:n+1})$ *est obtenue à partir de* $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$ *par*

$$p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{0:n+1}) = \frac{p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) \int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}) p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})\, \mathrm{d}\mathbf{x}_n}{\int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) \left[\int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}) p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})\, \mathrm{d}\mathbf{x}_n\right] \mathrm{d}\mathbf{x}_{n+1}}. \tag{4}$$

La preuve se trouve en annexe. Notons que la formule (4) généralise bien (2) ; en effet, dans un MLMC $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}) = p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n)$, $p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) = p(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{x}_{n+1})$, et (4) devient (2).

Supposons maintenant que le processus $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est Gaussien et que $p(\mathbf{x}_0) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$. Les densités $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$ et $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{0:n})$ sont alors Gaussiennes. Posons

$$p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n}) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{n|n}, \mathbf{P}_{n|n}), \qquad p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{y}_{0:n}) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}, \mathbf{P}_{n+1|n}), \tag{5}$$

et soit

$$E\left(\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^{\mathrm{T}}\right)=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_n & \mathbf{S}_n\\ \mathbf{S}_n^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_n\end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_n},\quad \underbrace{\begin{bmatrix}\widetilde{\mathbf{G}}_n^{11} & \widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\\ \widetilde{\mathbf{G}}_n^{21} & \widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathcal{G}}_n}=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_n^{11} & \mathbf{G}_n^{12}\\ \mathbf{G}_n^{21} & \mathbf{G}_n^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_n & \mathbf{S}_n\\ \mathbf{S}_n^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}_n^{11} & \mathbf{G}_n^{12}\\ \mathbf{G}_n^{21} & \mathbf{G}_n^{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2 (Filtre de Kalman Couple). *Soit le modèle* (3). *Supposons que* $p(\mathbf{x}_0)\sim\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0,\mathbf{P}_0)$ *et que* $p(\mathbf{w}_n)\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathcal{Q}_n)$. $\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n+1}$ *et* $\mathbf{P}_{n+1|n+1}$ *sont obtenus à partir de* $\hat{\mathbf{x}}_{n|n}$ *et* $\mathbf{P}_{n|n}$ *par :*

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}=\left[\mathbf{F}_n^1-\widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\left(\widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\right)^{-1}\mathbf{H}_n^1\right]\hat{\mathbf{x}}_{n|n}+\widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\left(\widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\right)^{-1}\mathbf{y}_n+\left[\mathbf{F}_n^2-\widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\left(\widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\right)^{-1}\mathbf{H}_n^2\right]\mathbf{y}_{n-1}, \tag{7}$$

$$\mathbf{P}_{n+1|n}=\left[\widetilde{\mathbf{G}}_n^{11}-\widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\left(\widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}_n^{21}\right]+\left[\mathbf{F}_n^1-\widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\left(\widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\right)^{-1}\mathbf{H}_n^1\right]\mathbf{P}_{n|n}\left[\mathbf{F}_n^1-\widetilde{\mathbf{G}}_n^{12}\left(\widetilde{\mathbf{G}}_n^{22}\right)^{-1}\mathbf{H}_n^1\right]^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n+1}=\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}+\mathbf{P}_{n+1|n}\left(\mathbf{H}_{n+1}^1\right)^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\mathbf{G}}_{n+1}^{22}+\mathbf{H}_{n+1}^1\mathbf{P}_{n+1|n}\left(\mathbf{H}_{n+1}^1\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\left(\mathbf{y}_{n+1}-\mathbf{H}_{n+1}^1\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}-\mathbf{H}_{n+1}^2\mathbf{y}_n\right), \tag{9}$$

$$\mathbf{P}_{n+1|n+1}=\mathbf{P}_{n+1|n}-\mathbf{P}_{n+1|n}\left(\mathbf{H}_{n+1}^1\right)^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\mathbf{G}}_{n+1}^{22}+\mathbf{H}_{n+1}^1\mathbf{P}_{n+1|n}\left(\mathbf{H}_{n+1}^1\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathbf{H}_{n+1}^1\mathbf{P}_{n+1|n}. \tag{10}$$

La preuve se trouve en annexe. On vérifie que si $\mathbf{F}_n^2=\mathbf{0}_{N\times q}$, $\mathbf{H}_n^2=\mathbf{0}_{q\times q}$, $\mathbf{G}_n^{12}=\mathbf{0}_{N\times q}$, $\mathbf{G}_n^{21}=\mathbf{0}_{q\times p}$ et $\mathbf{G}_n^{22}=\mathbf{I}_{q\times q}$, le modèle (3) redevient le modèle classique (1), et les Éqs. (7)–(9) et (10) coïncident respectivement avec [1, Éq. (5.5), p. 115], [1, Éq. (5.12), p. 117], [1, Éq. (5.6), p. 116] et [1, Éq. (5.11), p. 117] qui constituent le filtre de Kalman classique.

Proposition 2.3. *Soit* $\mathbf{z}_n=[\mathbf{x}_n^{\mathrm{T}},\mathbf{y}_{n-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ *(avec* $\mathbf{z}_0=\mathbf{x}_0$*), et supposons que* $\{\mathbf{z}_n\}_{n\geqslant 0}$ *est un processus centré, Gaussien et Markovien. Alors* (1) *Supposons que* $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geqslant 0}$ *est un processus de Markov, et que* $q=1$. *Alors* $\forall n$, $p(y_n|\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_{n+2})=p(y_n|\mathbf{x}_{n+1})$, *ou* $p(y_n|\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_n)=p(y_n|\mathbf{x}_{n+1})$. (2) *Réciproquement, supposons que* $p(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_{n+2})=p(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_{n+1})$ $\forall n$, *ou que* $p(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_n)=p(\mathbf{y}_n|\mathbf{x}_{n+1})$ $\forall n$. *Alors* $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geqslant 0}$ *est un processus de Markov.*

La preuve se trouve en annexe.

Remarques.

(1) L'introduction de modèles Couple dans le contexte du filtrage de Kalman n'est pas entièrement originale. De manière indépendante, un modèle voisin a été proposé dans le cas Gaussien [7, Corollaire 1, p. 72]. Dans ce modèle, le couple $\mathbf{z}_n=[\mathbf{x}_n^{\mathrm{T}},\mathbf{y}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ (et non $\mathbf{z}_n=[\mathbf{x}_n^{\mathrm{T}},\mathbf{y}_{n-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$) vérifie une équation linéaire similaire à (3) et est donc de Markov. Les équations de filtrage optimal pour ce modèle ont également été établies [7, Éqs. (13.56) et (13.57)]. Cependant, les Éqs. (7) à (10) de la Proposition 2.2 (qui constituent le filtre optimal pour le modèle (3) dans le cas Gaussien) sont, à notre connaissance, originales. De même, aussi bien la formule (4), qui généralise (2), d'une part, et (7) à (10), d'autre part ; que la Proposition 2.3, qui précise le caractère strict de la plus grande généralité des modèles Couple par rapport aux modèles cachés classiques, sont, à notre connaissance, originales.

(2) La condition nécessaire de la Proposition 2.3 implique que l'on peut trouver des modèles de Markov Couple $\mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x}$ n'est pas de Markov, et donc, en particulier, que les MLMCouple (3) sont strictement plus généraux que les MLMC (1) classiques.

(3) La condition suffisante de la Proposition 2.3 est locale et peut donc se vérifier facilement dans le cadre d'un modèle dynamique stochastique (non nécessairement linéaire). A titre d'exemple, revenons au MLMCouple (3). On vérifie que si $\mathbf{F}_n^2=\mathbf{0}$, alors $p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_{n-1})=p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{x}_n)$ et le processus $\mathbf{x}$ est donc de Markov. Notons que le cas $\mathbf{F}_n^2=\mathbf{0}$, $\mathbf{H}_n^2\neq\mathbf{0}$ fournit un modèle plus général que (1), dans lequel $\mathbf{x}$ est cependant Markovien.

3. Modèle de Markov Triplet

De manière analogue à celles qui ont permis de généraliser les champs et chaînes de Markov Couple aux champs [11] et chaînes [8] de Markov Triplet, nous proposons de considérer un modèle dans lequel le processus Couple est remplacé par un processus Triplet. Plus précisément, nous considérons le modèle vectoriel suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{r}_{n+1} \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_{n+1}} = \mathcal{F}_n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{r}_n \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \mathcal{G}_n \mathbf{w}'_n, \tag{11}$$

dans lequel $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est le processus Triplet, $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le processus caché que l'on cherche à estimer, $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le processus observé, et $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un processus supplémentaire, éventuellement sans existence physique. Les vecteurs aléatoires $\{\mathbf{w}'_n\}_{n\geqslant 0}$ sont centrés, indépendants et indépendants de $[\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Nous avons donc un processus Couple $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{y})$ avec $\mathbf{x}^\star = (\mathbf{x}, \mathbf{r})$.

Dans le cas Gaussien, les lois $p(\mathbf{x}_n^\star|\mathbf{y}_{0:n})$ peuvent être calculées récursivement par (7) à (10). Comme les lois $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$ en sont des lois marginales, cela signifie que le modèle Triplet (11) autorise la mise en oeuvre du même filtre que le modèle Couple (3). De plus, le modèle (11) est strictement plus général que le modèle (3). En effet, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Soit* $\mathbf{t}_n = [\mathbf{z}_n^{\mathrm{T}}, \mathbf{r}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ *(avec* $\mathbf{t}_0 = [\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}, \mathbf{r}_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$*), et supposons que* $\{\mathbf{t}_n\}_{n\geqslant 0}$ *est un processus centré, Gaussien et Markovien. Alors* (1) *Supposons que* $\{\mathbf{z}_n\}_{n\geqslant 0}$ *est un processus de Markov, et que* r_n *est à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Alors* $\forall n$, $p(r_n|\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_{n+1}) = p(r_n|\mathbf{z}_n)$*, ou* $p(r_n|\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_{n-1}) = p(r_n|\mathbf{z}_n)$. (2) *Réciproquement, supposons que* $p(\mathbf{r}_n|\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_{n+1}) = p(\mathbf{r}_n|\mathbf{z}_n)$ $\forall n$*, ou que* $p(\mathbf{r}_n|\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_{n-1}) = p(\mathbf{r}_n|\mathbf{z}_n)$ $\forall n$*. Alors* $\{\mathbf{z}_n\}_{n\geqslant 0}$ *est un processus de Markov.*

La preuve, omise, est analogue à celle de la Proposition 2.3. On peut ainsi considérer $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ vérifiant (11), donc Markovien, tel que $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ne soit pas Markovien (voir les remarques à la fin de la Section 2), donc ne vérifie pas (3).

Annexe. L'annexe, qui contient les preuves des Propositions 2.1, 2.2 et 2.3, sera conservée cinq ans dans les Archives de l'Académie. Une copie peut être obtenue sur demande.

Références

[1] B.D.O. Anderson, J.B. Moore, Optimal Filtering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
[2] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking, IEEE Trans. Signal Processing 50 (2) (2002) 174–188.
[3] T. Chonavel, Traitement du signal aléatoire, Collection Technique et Scientifique des Télécommunications, Springer, Paris, 2000.
[4] A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon (Eds.), Sequential Monte Carlo Methods in Practice, Statistics for Engineering and Information Science, Springer-Verlag, New York, 2001.
[5] A.C. Harvey, Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge University Press, 1989.
[6] R.E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME J. Basic Eng. Ser. D 82 (1) (1960) 35–45.
[7] R.S. Lipster, A.N. Shiryaev, Statistics of Random Processes, Vol. 2: Applications, Springer-Verlag, 2001.
[8] W. Pieczynski, D. Benboudjema, P. Lanchantin, Statistical image segmentation using Triplet Markov fields, in: SPIE International Symposium on Remote Sensing, Crete, Grece, September 22–27, 2002.
[9] W. Pieczynski, A.N. Tebbache, Pairwise Markov random fields and segmentation of textured images, Machine Graphics and Vision 9 (3) (2000) 705–718.
[10] W. Pieczynski, Arbres de Markov Couple, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 79–82.
[11] W. Pieczynski, Chaînes de Markov Triplet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 275–278.
[12] W. Pieczynski, Pairwise Markov chains, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, accepted.
[13] J.J.K.O. Ruanaidh, W.J. Fitzgerald, Numerical Bayesian Methods Applied to Signal Processing, Statistics in Computing, Springer-Verlag, New York, 1996.