Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 635–640

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie analytique

Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe dans $\mathbb{P}^2$: le cas de deux composantes

Hyperbolicity of the complements of plane algebraic curves: the two component case

Erwan Rousseau

Université de Bretagne Occidentale, faculté des sciences et techniques, laboratoire de mathématiques, unité CNRS FRE 2218, 6, avenue V. Le Gorgeu, B.P. 809, 29285 Brest cedex, France

Reçu le 7 mars 2003 ; accepté le 11 mars 2003

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

On démontre que le complémentaire d'une courbe complexe trés générique à deux composantes de degrés $d_1 \leqslant d_2$ dans $\mathbb{P}^2$ est hyperbolique au sens de Kobayashi pour : $d_1 \geqslant 5$; $d_1 = 4$ et $d_2 \geqslant 7$; $d_1 = d_2 = 4$; $d_1 = 3$ et $d_2 \geqslant 9$; $d_1 = 2$ et $d_2 \geqslant 12$. Pour cela, nous nous servons des jets logarithmiques développés par Dethloff et Lu (Osaka J. Math. 38 (2001) 185–237), qui ont généralisé à la situation logarithmique les fibrés de jets de Demailly (dans : Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 285–360), et utilisés par El Goul pour obtenir des résultats concernant l'hyperbolicité du complémentaire d'une courbe trés générique dans $\mathbb{P}^2$ dans le cas d'une seule composante. ***Pour citer cet article : E. Rousseau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We prove that the complement of a very generic complex curve with two components in $\mathbb{P}^2$ of degrees $d_1 \leqslant d_2$ is hyperbolic in the sense of Kobayashi in the following cases: $d_1 \geqslant 5$; $d_1 = 4$ and $d_2 \geqslant 7$; $d_1 = d_2 = 4$; $d_1 = 3$ and $d_2 \geqslant 9$; $d_1 = 2$ and $d_2 \geqslant 12$. We consider logarithmic jets developped by Dethloff and Lu (Osaka J. Math. 38 (2001) 185–237), who generalized to the logarithmic situation Demailly's jet bundles (in: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 285–360), and used by El Goul to obtain results about the hyperbolicity of the complement of a very generic curve in $\mathbb{P}^2$ in the case of a single component. ***To cite this article: E. Rousseau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Adresse e-mail : erwan.rousseau@univ-brest.fr (E. Rousseau).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00136-5

Abridged English version

Let $C = C_1 \cup C_2$, be a normal crossing complex algebraic curve in $\mathbb{P}^2$ with two smooth and irreducible components C_i of degrees $d_1 \leqslant d_2$, $d = d_1 + d_2$. Our starting point is the following theorem due to McQuillan and El Goul (see [3]): *Let (X, D) be a log surface of log general type such that its logarithmic Chern classes verify $\overline{c_1}^2 > \overline{c_2}$. Then every entire curve $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ is degenerate.* This leads us to our first theorem:

Theorem 0.1. *Let $C = C_1 \cup C_2$, be a complex algebraic curve in $\mathbb{P}^2$ with two smooth and irreducible components C_i of degrees $d_1 \leqslant d_2$ verifying either $d_1, d_2 \geqslant 5$ or $d_1 \geqslant 4$, $d_2 \geqslant 7$. Then for such very generic configurations, $\mathbb{P}^2 \setminus C$ is hyperbolic and hyperbolically imbedded in $\mathbb{P}^2$.*

The next point is to study the logarithmic 2-jets to obtain better results. Exploiting some ideas introduced by Demailly and El Goul (see [3]), we focus on good approximations of the 2-jet log-threshold $\bar{\theta}_2$, where the k-jet log-threshold $\bar{\theta}_k$ of a nonsingular projective variety of log general type is defined to be the infimum

$$\bar{\theta}_k = \inf_{m>0} \bar{\theta}_{k,m} \in \mathbb{R}$$

where $\bar{\theta}_{k,m}$ is the smallest rational number t/m such that there is a nonzero section in $H^0(X, E_{k,m}\overline{T}_X^* \otimes O(t\overline{K}_X))$, and $O(E_{k,m}\overline{T}_X^*)$ is the sheaf of logarithmic jet differentials of order k and degree m.

We start with a vanishing theorem of log-symmetric differentials which gives the estimate:

$$0 \geqslant \overline{\theta_{1,m}} \geqslant \min\left(0; -\frac{1}{d-3} + \frac{d_1 - 2}{m(d-3)}\right) \quad \text{for all integer } m > 0.$$

As 1-jet tools are enough to deal with the case $\bar{\theta}_1 < 0$ (see [3]), we can suppose $\bar{\theta}_1 = 0$.

Then, thanks to the filtration of the bundle of 2-jet differentials (see [1]), we obtain for $m_0 \geqslant 4$ the estimate $\bar{\theta}_{2,m_0} \geqslant -\frac{1}{4}$.

Following the strategy of Demailly and El Goul, we use Nadel's method (see [6]) to build a meromorphic connection on $\overline{T}_{\mathbb{P}^2}$ respecting the logarithmic structure given by a well chosen configuration $C_1 + C_2$. We obtain a lower bound for a generic congiguration such that $1 \leqslant d_1 < d_2 \leqslant 14$, $4 \leqslant d$, $d_1 \leqslant 5$:

$$\bar{\theta}_{2,3} \geqslant -\frac{8}{3(d-3)}.$$

Using Fermat curves of degree 4, we obtain for a generic configuration such that $d_1 = d_2 = 4$:

$$\bar{\theta}_{2,3} \geqslant -\frac{4}{15}.$$

Now, we recall a theorem of Demailly and El Goul (see [3]): *Let (X, D) be a non singular surface of log-general type with* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. *Suppose that $\bar{\theta}_2 < 0$ and that the log-Chern numbers satisfy*

$$(13 + 12\bar{\theta}_2)\overline{c_1}^2 > 9\overline{c_2}.$$

Then every Zariski-dense holomorphic map $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ is a leaf of an algebraic muli-foliation on X.

Another theorem of McQuillan and El Goul (see [3]), says that *every entire curve $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ contained in a leaf of a foliation is degenerate.*

As a corollary we obtain our second theorem:

Theorem 0.2. *Let $C = C_1 \cup C_2$, be a complex algebraic curve in $\mathbb{P}^2$ with two smooth and irreducible components C_i of degrees $d_1 \leqslant d_2$ verifying either $d_1 = d_2 = 4$ or $d_1 = 3$, $d_2 \geqslant 9$ or $d_1 = 2$, $d_2 \geqslant 12$. Then for such very generic configurations, $\mathbb{P}^2 \setminus C$ is hyperbolic and hyperbolically imbedded in $\mathbb{P}^2$.*

1. Utilisation des jets d'ordre 1

Soit $C = C_1 \cup C_2$, une courbe algébrique complexe dans $\mathbb{P}^2$ à deux composantes, où C_i est une courbe algébrique irréductible et lisse. $C_i = \{P_i = 0\}$ où P_i est un polynôme de degré d_i, $d_1 \leqslant d_2$, $d = d_1 + d_2$. On supposera que C_1 et C_2 se coupent transversalement.

1.1. Calcul des classes de Chern logarithmiques

En utilisant Riemann–Roch (voir [4]), on montre que si (X, D) est une surface logarithmique de type général avec des classes de Chern logarithmiques telles que $\overline{c_1}^2 > \overline{c_2}$ alors il y a beaucoup de différentielles d'ordre 1, i.e., des sections de $E_{1,m}\overline{T_X}^* = S^m\overline{T_X}^*$. La différence avec le cas d'une seule composante est que les techniques d'ordre 1 permettent de traiter un certain nombre de cas. La Proposition 2.4.1 ci-dessous montre que contrairement au cas d'une composante, ici $H^0(X, S^m\overline{T_X}^*) \neq 0$ pour tout $m > 0$.

Calculons donc les classes de Chern logarithmiques, qui sont par définition les classes de Chern du fibré tangent logarithmique :

$$\overline{c_1} := c_1\big(\overline{T_X}\big), \qquad \overline{c_2} := c_2\big(\overline{T_X}\big).$$

Proposition 1.1. *On a les égalités*

$$\overline{c_1}^2 = (d-3)^2, \qquad \overline{c_2} = d^2 - 3d + 3 - d_1 d_2.$$

1.2. Premiers résultats d'hyperbolicité

Les techniques d'ordre 1 vont pouvoir être exploitées grâce à la généralisation au cas logarithmique du théorème principal de [5] que l'on trouve dans [3]. On utilise le Corollaire 2.4.3 de [3] :

Proposition 1.2 [3]. *Soit (X, D) une surface de type général logarithmique telle que ses classes de Chern logarithmiques vérifient $\overline{c_1}^2 > \overline{c_2}$. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ est dégénérée.*

Comme conséquence on obtient le :

Théorème 1.3. *Soit C la réunion de deux courbes lisses C_i, $i = 1, 2$, dans $\mathbb{P}^2$ de degré d_i tels que $d_1, d_2 \geqslant 5$ ou $d_1 \geqslant 4$, $d_2 \geqslant 7$. Alors pour de telles configurations très génériques, $\mathbb{P}^2 \setminus C$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2$.*

2. Utilisation des jets d'ordre 2

Rappelons tout d'abord une définition utile :

Définition 2.1. Soit (X, D) une variété projective lisse de type logarithmique général. On définit :

$$\bar{\theta}_k = \inf_{m>0} \bar{\theta}_{k,m} \in \mathbb{R},$$

où $\bar{\theta}_{k,m}$ est le plus petit rationnel $\frac{t}{m}$ tel qu'il y ait une section non nulle dans $H^0(X, E_{k,m}\overline{T}_X^* \otimes O(t\overline{K}_X))$, et $O(E_{k,m}\overline{T}_X^*)$ est le faisceau des différentielles de jets logarithmiques d'ordre k et de degré m.

L'étude du lieu de base des 2-jets $\overline{B_2}$ est généralisée au cas logarithmique grâce à [3]. Citons d'abord le Théorème 1.2.1 de [3] :

Théorème 2.2 [3]. *Si (X, D) est une surface algébrique de type général logarithmique et A un fibré en droites ample au-dessus de X, alors* :

$$h^0\big(X, E_{2,m}\overline{T_X}^* \otimes O(-A)\big) \geqslant \frac{m^4}{648}\big(13\overline{c_1}^2 - 9\overline{c_2}\big) - \mathrm{O}\big(m^3\big).$$

En particulier : *si $13\overline{c_1}^2 - 9\overline{c_2} > 0$, $\bar{\theta}_2 < 0$ et $\overline{B}_2 \neq \overline{X}_2$, où $\overline{X}_2$ est le second fibré de jets logarithmique* (*voir* [3], *pour la construction de ces fibrés*).

Corollaire 2.3. *Si $d_1 \geqslant 3$, $d_2 \geqslant 3$ ou $d_1 = 2$, $d_2 \geqslant 5$ alors $\bar{\theta}_2 < 0$ et $\overline{B}_2 \neq \overline{X}_2$.*

Comme conséquence du calcul ci-dessus toute courbe entière holomorphe $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ a un relevé $f_{[2]} : \mathbb{C} \to \overline{X}_2$ dont l'image est contenue dans une composante irréductible Z de $\overline{B}_2$.

L'étude de la restriction du fibré tautologique à Z (voir [3]) aboutit au Théorème 2.10 ci-dessous et montre la nécessité d'avoir de bonnes estimations de $\bar{\theta}_i$, $i = 1, 2$.

2.1. Estimation de $\bar{\theta}_1$

Une grande différence avec le cas d'une seule composante est le résultat suivant obtenu en prenant la dérivée logarithmique de la fonction méromorphe $f = P_1^{d_2}/P_2^{d_1}$:

Proposition 2.4. $\bar{\theta}_1 \leqslant 0$.

Passons maintenant au calcul d'une borne inférieure. Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ la surface définie comme intersection complète par les équations : $\{Z_3^{d_1} = P_1(Z_0, Z_1, Z_2);\ Z_4^{d_2} = P_2(Z_0, Z_1, Z_2)\}$. X est lisse car

$$\begin{pmatrix} \partial P_1/\partial Z_0 & \partial P_2/\partial Z_0 \\ \partial P_1/\partial Z_1 & \partial P_2/\partial Z_1 \\ \partial P_1/\partial Z_2 & \partial P_2/\partial Z_2 \\ -d_1 Z_3^{d_1-1} & 0 \\ 0 & -d_2 Z_4^{d_2-1} \end{pmatrix}$$

est bien de rang 2 : au-dessus d'un point n'appartenant pas à C c'est clair par les deux dernières composantes, sinon c'est dû au fait que C_1 et C_2 sont lisses et se coupent transversalement.

Ainsi, on a un recouvrement ramifié au dessus de $C = C_1 + C_2 : \pi : X \subset \mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^2$. On a alors un morphisme injectif en prenant le pullback : $H^0(\mathbb{P}^2, S^m\overline{T^*_{\mathbb{P}^2}} \otimes \mathcal{O}(k)) \hookrightarrow H^0(X, S^m T_X^*(\log L) \otimes \mathcal{O}(k))$ où $L = L_1 + L_2$, L_i étant la section hyperplane correspondant à C_i. D'où une injection :

$$H^0\big(\mathbb{P}^2, S^m\overline{T^*_{\mathbb{P}^2}} \otimes \mathcal{O}(k)\big) \hookrightarrow H^0\big(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(2m + k)\big).$$

L'intersection complète X nous donne les trois suites exactes :

$$(1)\quad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-d_2) \to \mathcal{I}_X \to 0,$$

$$(2)\quad 0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

$$(3)\quad 0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^4|X} \to \mathcal{O}_X(d_1) \oplus \mathcal{O}_X(d_2) \to 0.$$

On obtient alors :

Proposition 2.5.

$$0 \geqslant \overline{\theta_{1,m}} \geqslant \min\left(0; -\frac{1}{d-3} + \frac{d_1 - 2}{m(d-3)}\right) \quad \textit{pour tout } m > 0.$$

Il y a donc deux situations :

- soit $\bar{\theta}_1 < 0$: les techniques d'ordre 1 suffisent car alors on a un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une surface $\widetilde{X} \subset X_1$ et on applique le Théorème 2.4.2 de [3] pour conclure à la dégénerescence des courbes entières.
- soit $\bar{\theta}_1 = 0$: on a alors besoin des techniques d'ordre 2.

On suppose donc maintenant : $\bar{\theta}_1 = 0$.

2.2. *Estimation de $\bar{\theta}_2$*

Pour l'estimation de $\bar{\theta}_2$ on distingue le cas des différentielles de 2-jets de grand degré m des différentielles de 2-jets de petit degré. Pour les grands degrés on obtient par la filtration des jets d'ordre 2 (voir [1]) :

Proposition 2.6. *Supposons que le lieu de base des 2-jets, $\overline{B}_2$, associé à $(X, D) = (P^2, C)$ est de la forme $Z_\sigma = Z_0 \cup \Gamma_2$, où Z_σ est le lieu des zéros d'une section $\sigma \in H^0(\overline{X}_2, O_{\overline{X}_2}(m_0) \otimes O(t_0 \overline{K}_X))$, $t_0 < 0$ et Z_0 une section irréductible.*

Pour $m_0 \geqslant 4$ on a l'estimation

$$\bar{\theta}_{2,m_0} \geqslant -\frac{1}{4}.$$

On utilise la méthode de Nadel (voir [6]) pour construire une connection méromorphe sur $\overline{T}_{\mathbb{P}^2}$ par rapport à la structure logarithmique donnée par une configuration bien choisie $C_1 + C_2$. Pour cela on a besoin du :

Lemme 2.7. *Considérons le système linéaire de courbes* :

$$C_\lambda = \{\lambda_0 s_0(z) + \lambda_1 s_1(z) + \lambda_2 s_2(z) = 0\},$$

où $s_0 = z_0^{d_2}$, $s_1 = z_1^{d_2}$, $s_2 = z_2^{d_2-d_1}(\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1})$, $\varepsilon_i \in \mathbb{C}^*$. Soit :

$$C_1 = \{P_1 = \varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1} = 0\},$$
$$C_2 = \{P_2 = z_0^{d_2} + z_1^{d_2} + z_2^{d_2-d_1}(\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1}) = 0\}.$$

Alors on peut choisir ε_0 et ε_1 tels que C_2 soit lisse coupant C_1 transversalement.

Pour les petits degrés ($m = 3$) on obtient, par l'utilisation des wronskiens et de la semi-continuité de Zariski (voir [3]), la :

Proposition 2.8. *Pour une configuration générique telle que $1 \leqslant d_1 < d_2 \leqslant 14$, $4 \leqslant d$, $d_1 \leqslant 5$, on a*

$$\bar{\theta}_{2,3} \geqslant -\frac{8}{3(d-3)}.$$

On peut améliorer le résultat de 1.3 pour $d_1 = 4$ grâce à l'utilisation des courbes de Fermat de degrés 4 qui nous donne la proposition :

Proposition 2.9. *Pour une configuration générique telle que $d_1 = d_2 = 4$, on a*

$$\bar{\theta}_{2,3} \geqslant -\frac{4}{15}.$$

On utilise les Théorèmes 1.3.3 et 2.4.2 de [3] :

Théorème 2.10 (1.3.3 [3]). *Soit* (X, D) *une surface de type général logarithmique telle que* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$*. Supposons que* $\bar{\theta}_2 < 0$ *et les classes de Chern logarithmiques satisfassent* :

$$(13 + 12\bar{\theta}_2)\overline{c_1}^2 > 9\overline{c_2}.$$

Alors toute courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ *est une feuille d'un multi-feuilletage algébrique sur X.*

On obtient les deux corollaires :

Corollaire 2.11. *Toute courbe entière dans le complémentaire de* $C = C_1 \cup C_2$*, avec* $d_1 = 3$*,* $d_2 \geqslant 9$ *ou* $d_1 = 2$*,* $d_2 \geqslant 12$ *est une feuille d'un multi-feuilletage sur* $\mathbb{P}^2$*.*

Corollaire 2.12. *Toute courbe entière dans le complémentaire de* $C = C_1 \cup C_2$*, avec* $d_1 = d_2 = 4$ *est une feuille d'un multi-feuilletage sur* $\mathbb{P}^2$*.*

Théorème 2.13 (2.4.2 [3]). *Soit* X *une surface avec un feuilletage* $\mathcal{F}$ *et un diviseur* D *telle que* (X, D) *soit de type général logarithmique. Alors toute courbe entière* $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ *contenue dans une feuille de* $\mathcal{F}$ *est dégénérée.*

On en déduit :

Théorème 2.14. *Soit* C *la réunion de deux courbes lisses* C_i*,* $i = 1, 2$*, dans* $\mathbb{P}^2$ *de degré* d_i*. Alors pour les configurations* $d_1 = d_2 = 4$*,* $d_1 = 3$*,* $d_2 \geqslant 9$ *ou* $d_1 = 2$*,* $d_2 \geqslant 12$ *très génériques,* $\mathbb{P}^2 \setminus C$ *est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans* $\mathbb{P}^2$*.*

Références

[1] J.-P. Demailly, Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, in: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 62, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, pp. 285–360.
[2] G. Dethloff, S. Lu, Logarithmic jet bundles and applications, Osaka J. Math. 38 (2001) 185–237.
[3] J. El Goul, Logarithmic jets and hyperbolicity, Prépublication, 2000.
[4] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, in: Grundlehren Math. Wiss., Vol. 131, Springer, Heidelberg, 1966.
[5] M. McQuillan, Diophantine approximations and foliations, Publ. Math. IHES 87 (1998) 121–174.
[6] A.M. Nadel, Hyperbolic surfaces in $\mathbb{P}^3$, Duke Math. J. 58 (1989) 749–771.