Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 493–498
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Structuration optimale de produits financiers et diversification en présence de sources de risque non-négociables

Optimal design of financial derivatives

Pauline Barrieu [a], Nicole El Karoui [b]

[a] *London School of Economics, Statistics department, Houghton Street, London WC2A 2AE, UK*
[b] *C.M.A.P., École polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

Reçu le 5 juillet 2002 ; accepté après révision le 23 janvier 2003

Présenté par Marc Yor

Résumé

Nous développons une méthodologie de choix optimal de produits financiers à émettre pour couvrir un risque non-échangeable sur les marchés financiers. Le problème est posé en termes de minimisation du risque supporté par l'émetteur sachant que l'acheteur ne rentre dans le contrat que si son niveau de risque reste inférieur à un certain seuil. Les deux agents ont également la possibilité d'investir sur les marchés. Le problème se réduit à un unique problème d'optimisation convexe dont la solution dans le cas entropique est proportionnelle à l'exposition initiale de l'émetteur. ***Pour citer cet article : P. Barrieu, N. El Karoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We develop a methodology to optimally design a financial issue to hedge non-tradable risk on financial markets. Modeling involves a minimization of the risk borne by issuer given a buyer constraint, who enters the transaction if and only if his risk level remains below a given threshold. Both agents have also the opportunity to invest all their residual wealth on financial markets. The problem is reduced to a unique convex optimization problem and its solution in the entropic framework is proportional to the issuer initial exposure. ***To cite this article: P. Barrieu, N. El Karoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

At a future date T, a given economic agent E is exposed towards a non-tradable risk Θ for an amount $X(\Theta, \omega)$, where ω denotes a market scenario. He wants to issue and sell a structure $F(\Theta, \omega)$ to another agent A for a price π. Both agents have also the opportunity to invest their residual wealth (π for E and $x - \pi$ for A) in a financial market.

Adresses e-mail : p.m.barrieu@lse.ac.uk (P. Barrieu), elkaroui@cmapx.polytechnique.fr (N. El Karoui).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00120-1

The set of all admissible strategies is characterized by the set $\mathcal{V}_T$ of their associated terminal gain. $\beta_{0,T}$ denotes the capitalization factor from 0 to T.

The agents assess their risk using a risk measure, convex in the sense of Föllmer and Schied [8], respectively denoted ρ_E and ρ_A.

The problem of agent E is then to minimize his risk

$$\min_{\substack{F,\pi \\ \xi_E \in \mathcal{V}_T}} \rho_E(X - F + \pi\beta_{0,T} + \xi_E)$$

under the constraint that agent A finds an interest in doing the transaction:

$$\min_{\xi_A \in \mathcal{V}_T} \rho_A\big(F + (x-\pi)\beta_{0,T} + \xi_A\big) \leqslant \min_{\eta_A \in \mathcal{V}_T} \rho_A(\eta_A + x\beta_{0,T}).$$

We prove that the presence of a financial market modifies the initial risk measures ρ_E and ρ_A and leads to the definition of new risk measures ρ_E^m and ρ_A^m (Eq. (6)). The pricing rule is then obtained (7) and the problem is reduced to a unique convex optimization problem

$$\min_F \big\{\rho_E^m(X-F) + \rho_A^m(F)\big\}.$$

In the entropic framework, when the initial risk measures are given by (9), the optimal structure F^* is explicitly obtained in the general case and in the restricted situation where agents take their financial decisions by simply considering the information contained in asset prices. In both cases, the optimal structure is given by (Theorems 2.1 and 2.2)

$$F^* = \frac{\gamma_E}{\gamma_E + \gamma_A} X.$$

1. Cadre d'étude

1.1. Notations et mesure de risque

Nous considérons deux agents économiques, notés respectivement E et A (« émetteur » et « acheteur »). A une date future T fixée, l'agent E est exposé pour un montant $X \stackrel{\triangle}{=} X(\Theta, \omega)$ à un risque non-négociable sur les marchés financiers, que nous désignons par Θ. ω est un scénario de marché quelconque. E cherche à émettre un produit financier $F \stackrel{\triangle}{=} F(\Theta, \omega)$ de prix π afin de réduire son exposition. D'autre part, les deux agents E et A peuvent également investir toute leur richesse résiduelle (π pour l'agent E et $x - \pi$ pour l'agent A) dans le marché financier à travers une stratégie optimale.

Afin d'apprécier leurs positions, les deux agents utilisent une mesure du risque, notée respectivement ρ_E et ρ_A. Ces deux mesures sont convexes au sens de Föllmer et Schied [8] : ainsi, pour $\mathcal{X}$ un espace linéaire de fonctions bornées, les fonctions

$$\rho_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \ \Psi \to \rho_i(\Psi) \tag{1}$$

sont décroissantes, convexes et « invariantes par translation d'une constante » :

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \rho_i(\Psi + m) = \rho_i(\Psi) - m. \tag{2}$$

Intuitivement, $\rho_i(\Psi)$ peut s'interpréter comme le montant que l'agent i doit détenir afin d'annuler le risque de sa position risquée $\Psi : \rho_i(\Psi + \rho_i(\Psi)) = 0$ et tout risque acceptable a une mesure associée négative.

Dans toute la suite, $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble des variables aléatoires bornées $\mathcal{F}_T$-mesurables, définies sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]))$.

Les mesures de risques considérées sont relatives à des risques financiers. En particulier, ce sont des mesures de risque « forward » au sens où les flux constants, m, payés en T sont financés par un placement sans risque en 0 d'un montant $m/\beta_{0,T}$.

1.2. Problématique

Les deux agents peuvent investir dans un marché financier dont les actifs de base sont évalués par leur prix à terme en T, noté S. On suppose que $(S_t,\ t \in [0,T])$ est une semi-martingale vectorielle, localement bornée. Les stratégies de portefeuille autofinançantes sont des processus prévisibles, φ, pour lesquels les intégrales stochastiques par rapport à S sont bien définies et bornées inférieurement.

L'ensemble des stratégies *admissibles* est caractérisé par leurs gains terminaux associés :

$$\mathcal{V}_T \subseteq \mathcal{G}_T = \left(\xi_T = \int_0^T \langle \varphi_t, \mathrm{d}S_t \rangle \right). \tag{3}$$

On suppose que $\mathcal{V}_T$ est un sous-espace vectoriel de variables aléatoires bornées.

L'agent E cherche à déterminer la structure (F,π) ainsi que sa stratégie de portefeuille, de gain ξ_E, de façon à minimiser sa mesure de risque global :

$$\min_{\substack{F,\pi \\ \xi_E \in \mathcal{V}_T}} \rho_E(X - F + \pi\beta_{0,T} + \xi_E). \tag{4}$$

La contrainte de l'émetteur est de trouver un acheteur. Cela se traduit par le fait que l'agent A doit avoir un intérêt à faire cette transaction. Au minimum (i.e., dans le cas le moins favorable pour l'investisseur), la structure F ne doit pas augmenter sa mesure de risque. Ainsi, l'acheteur va simplement comparer deux mesures de risque, la première correspond au cas où il investit optimalement toute sa richesse initiale sur les marchés financiers et la seconde à la situation où il entre dans la F-transaction mais investit également sa richesse résiduelle sur les marchés.

Avec des notations évidentes, l'acheteur accepte la F-transaction si :

$$\min_{\xi_A \in \mathcal{V}_T} \rho_A\big(F + (x-\pi)\beta_{0,T} + \xi_A\big) \leqslant \min_{\eta_A \in \mathcal{V}_T} \rho_A(\eta_A + x\beta_{0,T}). \tag{5}$$

Notons que, par la propriété d'invariance par translation, cette contrainte ne dépend pas de la richesse initiale de l'acheteur. Celui-ci est actif dans le choix des stratégies financières mais a un rôle « passif » dans la F-transaction : il décide seulement s'il accepte d'acheter cette structure.

1.3. Modification des mesures de risque initiales et règle d'évaluation

Dans toute la suite, nous supposerons que $\inf_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho_i(\xi) > -\infty$.

Le point de vue de l'acheteur. Introduisons les mesures de risque recentrées et invariantes par translation, ρ_i^m, définies comme :

$$\min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho_i(\Psi + \xi) - \min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho_i(\xi) \stackrel{\triangle}{=} \rho_i^m(\Psi). \tag{6}$$

La contrainte de l'acheteur s'écrit naturellement en termes de mesure de risque modifiée comme

$$\rho_A^m(F - \pi\beta_{0,T}) \leqslant 0$$

et traduit simplement le fait que le risque lié à la F-transaction doit être acceptable pour l'acheteur. Ceci est équivalent à dire que le prix de la structure F est déterminé par l'agent A :

Proposition 1.1. *La règle d'évaluation de la structure F est donnée par* :

$$\pi\beta_{0,T} = -\rho_A^m(F). \tag{7}$$

Cette règle d'évaluation correspond à un prix d'indifférence pour l'agent A. En effet, pour cette fonction de prix et du point de vue de la mesure de risque de marché ρ_A^m, l'agent A est indifférent entre faire la transaction et ne pas la faire.

Le point de vue de l'émetteur face à un acheteur rationnel. Le programme de l'émetteur (4) est équivalent au programme utilisant la mesure modifiée $\rho_E^m(X - F + \pi\beta_{0,T})$. L'invariance par translation et la rationalité de l'acheteur permettent alors de réécrire le programme comme :

$$\min_F \bigl\{\rho_E^m(X - F) + \rho_A^m(F)\bigr\}. \tag{8}$$

2. Résultats principaux

Pour des motivations économiques et interprétatives, nous nous intéressons ici à la caractérisation de la solution et, pour cela, nous étudions le cas où les mesures de risque initiales des deux agents sont de type entropique :

$$\rho_i(\Psi) \stackrel{\triangle}{=} \rho(\gamma_i, \Psi) = \frac{1}{\gamma_i} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigl[\exp(-\gamma_i \Psi)\bigr] = \sup_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\Psi) - \frac{1}{\gamma_i} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\}, \tag{9}$$

où γ_i est le coefficient d'aversion pour le risque de l'agent i et $h(\mathbb{Q}/\mathbb{P})$ est l'entropie relative[1] de $\mathbb{Q}$ par rapport à la probabilité prior $\mathbb{P}$.

2.1. Mesure de risque modifiée

La première étape consiste alors à montrer que les mesures modifiées associées $\Psi \to \rho_i^m(\Psi)$ sont des mesures de risque *convexes*, en étudiant les propriétés de $\min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho_i(\Psi + \xi)$.

D'après (9), l'inégalité suivante prévaut :

$$\rho(\gamma_i, \Psi + \xi) \geqslant \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_T} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\Psi) - \frac{1}{\gamma_i} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\},$$

où $\mathcal{Q}_T$ est l'ensemble des probabilités $\mathbb{Q}$ telles que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{V}_T$.

Ce minorant ne dépendant pas de ξ, il vient :

$$\min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho(\gamma_i, \Psi + \xi) \geqslant \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_T} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\Psi) - \frac{1}{\gamma_i} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\}.$$

Pour obtenir l'égalité $\min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho(\gamma_i, \Psi + \xi) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_T} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\Psi) - \frac{1}{\gamma_i} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P})\}$, des hypothèses supplémentaires (cf. les Théorèmes 2.1, 2.2 ou 2.3 de Delbaen et al. [6]) sont nécessaires. De plus, comme dans El Karoui et al. [7], on déduit de l'existence d'une mesure entropique minimale $\mathbb{Q}_T^*$ l'identité suivante :

$$\rho^m(\gamma_i, \Psi) = \min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho(\gamma_i, \Psi + \xi) - \min_{\xi \in \mathcal{V}_T} \rho(\gamma_i, \xi) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_T} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\Psi) - \frac{1}{\gamma_i} h(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_T^*) \right\}. \tag{10}$$

Dès lors, la mesure de risque ρ_i^m est une mesure de risque convexe, centrée. C'est une mesure entropique pour laquelle l'ensemble des probabilités considérées est restreint à $\mathcal{Q}_T$.

[1] L'entropie relative de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ est définie par :

$$h(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \ln \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) & \text{si } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2. Structure optimale dans un marché incomplet

Théorème 2.1. *La structure optimale est donnée par* :

$$F^* = \frac{\gamma_E}{\gamma_E + \gamma_A} X.$$

De plus, après la F-transaction, les deux agents ont la même mesure de risque $\rho^m(\gamma_E\gamma_A/(\gamma_E+\gamma_A), X)$.

Etapes de la preuve. La preuve de ce résultat nécessite plusieurs étapes. Tout d'abord, nous étudions le cas où l'exposition initiale de l'agent E est nulle. La structure optimale est alors donnée par $F^* \equiv 0$. En effet, la fonction à minimiser dans le programme (8) est toujours négative ou nulle puisqu'elle vaut 0 en 0. D'autre part, suivant Éq. (10) :

$$\rho^m(\gamma, -\Psi) \geqslant E_{\mathbb{Q}_T^*}(\Psi) \tag{11}$$

la fonction à minimiser est également toujours positive. Par conséquent, 0 est optimal.

Lorsque l'exposition initiale de l'agent E n'est pas nulle, il est possible de se ramener à cette première étude grâce à la translation $F = \frac{\gamma_E}{\gamma_E+\gamma_A} X + \Phi$ dans le programme initial. Par le changement de probabilités

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^X}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \frac{\exp(-(\gamma_E\gamma_A/(\gamma_E+\gamma_A))X)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(-(\gamma_E\gamma_A/(\gamma_E+\gamma_A))X)]}$$

et l'introduction d'une nouvelle mesure de risque $\rho^X(\gamma_i, \Psi) = \frac{1}{\gamma_i} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}[\exp(-\gamma_i \Psi)]$, on retrouve la situation précédente par rapport à Φ mais en faisant référence à cette nouvelle mesure de risque. □

2.3. Extension au cas d'information partielle

Nous supposons désormais que les agents ont investi dans les marchés financiers à l'aide de stratégies dépendant des actifs de marché uniquement, i.e. prévisibles par rapport à la filtration régularisée à droite et complète engendrée par $S : \mathcal{F}_t^S = \sigma(S_u;\ 0 \leqslant u \leqslant t)$.

L'ensemble des stratégies *admissibles* est alors caractérisé par $\mathcal{V}_T^S$, l'espace vectoriel des variables aléatoires bornées de $\mathcal{G}_T^S$:

$$\mathcal{V}_T^S \subseteq \mathcal{G}_T^S = \left\{ \xi_T = \int_0^T \langle \varphi_t, \mathrm{d}S_t \rangle;\ \varphi \in \mathcal{P}^S \right\} \subseteq \mathcal{G}_T. \tag{12}$$

Nous supposons que la dynamique des actifs de marché est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu(t, S_t, \Theta_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, S_t)\,\mathrm{d}W_t, \tag{13}$$

où W est un $(\mathbb{P}, \Im_t)$-mouvement Brownien multi-dimensionnel et $\Theta = (\Theta_t;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ est un processus $\Im_t$-adapté, que l'on suppose indépendant de W (hypothèse standard en théorie du filtrage). En utilisant des techniques classiques en filtrage, on peut montrer que le S-marché est *complet* (cf. Barrieu [2], Becherer [3]).

Reprenons la mesure de risque entropique définie en (9). La mesure de risque modifiée, $\rho^{m,S}$, peut être introduite comme précédemment : $\rho^{m,S}(\gamma_i, \Psi) = \min_{\xi \in \mathcal{V}_T^S} \rho(\gamma_i, \Psi + \xi) - \min_{\xi \in \mathcal{V}_T^S} \rho(\gamma_i, \xi)$. Puisque le S-marché est complet, pour tout $Z \in \mathcal{V}_T^S$, $\rho^{m,S}(\gamma_i, Z)$ est simplement égal à l'opposé de son prix forward, i.e. à $-\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}(Z)$, où $\widehat{\mathbb{Q}}_T$ est la probabilité forward-neutre associée au S-marché à la date T, définie par : $\mathrm{d}\widehat{\mathbb{Q}}_T/\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(H_T/\mathcal{F}_T^S)\beta_{0,T}$ avec H_T la densité des prix d'état de la date T.

De plus, en reprenant la définition même de la mesure entropique (9), on peut noter que

$$\min_{\xi \in \mathcal{V}_T^S} \rho(\gamma, \Psi + \xi) = \min_{\xi \in \mathcal{V}_T^S} \rho\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp(-\gamma \Psi)/\mathcal{F}_T^S\right) + \xi\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\rho^{m,S}(\gamma, \Psi) &= \rho^{m,S}\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp(-\gamma \Psi)/\mathcal{F}_T^S\right)\right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left\{\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp(-\gamma \Psi)/\mathcal{F}_T^S\right]\right\} \geqslant \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(-\Psi/\mathcal{F}_T^S\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on retrouve qu'après la F-transaction, les deux agents se comportent comme si ils avaient la même mesure de risque $\rho^{m,S}(\frac{\gamma_E}{\gamma_E+\gamma_A}, X)$ et on trouve à nouveau :

Théorème 2.2. *La structure optimale est donnée par* $F^* = \frac{\gamma_E \gamma_A}{\gamma_E+\gamma_A} X$.

2.4. Commentaires

La structure optimale ne dépend du marché financier qu'à travers la règle évaluation (7) qui est faite sous la mesure de risque modifiée par les actifs de marché. D'autre part, la distribution (marginale) de la source de risque non-échangeable n'a aucun impact sur la forme de la solution. De plus, l'émetteur a un intérêt à vendre une structure si et seulement s'il est initialement exposé (ou plus précisément, si son exposition initiale diffère de celle de l'acheteur). La logique sous-jacente à ce contrat est une logique d'assurance, de couverture et non une logique spéculative.

Remerciements

Nous remercions l'expert pour ses remarques constructives sur l'ensemble du papier.

Références

[1] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath, Coherent measures of risk, Math. Finance 9 (3) (1999) 203–228.
[2] P. Barrieu, Structuration optimale de produits financiers en marché illiquide et trois excursions dans d'autres domaines des probabilités, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2002.
[3] D. Becherer, Rational hedging and valuation with utility-based preferences, Thèse de doctorat, Université de Berlin, 2001.
[4] D. Becherer, Rational hedging and valuation of integrated risks under constant absolute risk aversion, Preprint, Imperial College London, 2002.
[5] F. Bellini, M. Frittelli, On the existence of minimax martingale measures, Math. Finance 12 (1) (2002) 1–21.
[6] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, C. Stricker, Exponential hedging and entropic penalities, Math. Finance 12 (2) (2002) 99–123.
[7] N. El Karoui, R. Rouge, Pricing via utility maximization and entropy, Math. Finance 10 (2) (2000) 259–276.
[8] H. Föllmer, A. Schied, Convex measures of risk and trading constraints, Finance and Stochastics 6 (4) (2002) 429–447.
[9] H. Föllmer, A. Schied, Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, in: De Gruyter Stud. Math., 2002.