Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 483–486
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Sur la catégorie $\mathcal{D}^{b,G}(X)$ pour G réductif fini

On $\mathcal{D}^{b,G}(X)$ for a finite reductive group G

Sophie Térouanne

Université Grenoble 1, institut Fourier, BP 74, Saint Martin d'Hères, France

Reçu le 8 novembre 2002 ; accepté après révision 19 février 2003

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Dans cette Note, nous nous intéressons à la catégorie dérivée G-équivariante d'un schéma projectif lisse X sur un corps algébriquement clos k, sur lequel agit un groupe réductif fini G. Nous comparons la catégorie dérivée G-équivariante de X avec la catégorie dérivée du quotient en donnant un critère de descente. Ce résultat généralise un théorème de Lønsted en K-théorie G-équivariante sur des courbes (K. Lønsted, J. Math. Kyoto Univ. 23 (4) (1983) 775–793). Nous donnons également une version G-équivariante de l'équivalence de catégorie de Beĭlinson (Funct. Anal. Appl. 12 (1979) 214–216) et traitons l'exemple de la droite projective. ***Pour citer cet article : S. Térouanne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In this Note, we are interested in the G-equivariant derived category of a smooth projective scheme over an algebraically closed field k, on which a reductive finite group G is acting. We compare the G-equivariant derived category of X with the derived category of the quotient by giving a descent criterion. The result generalizes a theorem of Lønsted in G-equivariant K-theory on curves (K. Lønsted, J. Math. Kyoto Univ. 23 (4) (1983) 775–793). We also give an equivariant version of Beĭlinson's equivalence of categories (Funct. Anal. Appl. 12 (1979) 214–216) and treat the exemple of the projective line. ***To cite this article: S. Térouanne, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Introduction

De nombreux espaces modulaires M sont définis comme quotient d'une variété lisse par un groupe $M = X/G$. Dans ce cas, on peut s'intéresser à l'étude de la géométrie du champ quotient $[X/G]$, et plus particulièrement à l'écart entre la géométrie de ce champ (de Deligne–Mumford), et celle de son espace modulaire grossier M. C'est celui entre la géométrie G-équivariante de X et la géométrie du quotient X/G, de sorte que les théorèmes de comparaison sont des critères de descente au quotient. Déjà, dans [7], Mumford résout la question de la descente d'un faisceau inversible symétrique sur une variété abélienne X, le quotient $K_X = X/\langle\iota\rangle$ étant la variété de Kummer associée. Dans [6], Lønsted décrit le groupe $K_G^{\cdot}(X)$ en fonction de $K^{\cdot}(X/G)$, lorsque G agit sur une courbe projective lisse X de telle sorte que $X/G \cong \mathbb{P}^1$.

Adresse e-mail : Sophie.Terouanne@ujf-grenoble.fr (S. Térouanne).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00116-X

Les résultats récents de Bondal et Orlov démontrent que la catégorie dérivée des faisceaux cohérents sur un schéma est un objet pertinent pour étudier la géométrie birationnelle de celui-ci.

Au cours de cette Note, k est un corps algébriquement clos, X est un schéma projectif lisse sur k et G désigne un groupe fini agissant sur X, d'ordre premier à la caractéristique de k. En suivant les notations de [5], on notera pour $* = -$ ou b, $\mathcal{D}^*(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^*_{\mathrm{Coh}(X)}(\mathrm{Qco}(X))$.

Nous nous intéressons à la catégorie dérivée G-équivariante de X, i.e. la catégorie dérivée du champ $[X/G]$, et nous la comparons à la catégorie dérivée de la variété quotient X/G. Les catégories de G-faisceaux cohérents et quasi-cohérents étant abéliennes et $G-\mathrm{Qco}(X)$ ayant assez d'injectifs (cf. [4]), on définit $\mathcal{D}^{*,G}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^{*,G}_{G-\mathrm{Coh}(X)}(G-\mathrm{Qco}(X)) = \mathcal{D}^*([X/G])$. Notons $\pi : X \to X/G$ le morphisme quotient. Les foncteurs adjoints $\pi^G_* : \mathcal{D}^{-,G}(X) \to \mathcal{D}^-(X/G)$ et $\mathbf{L}\pi^* : \mathcal{D}^-(X/G) \to \mathcal{D}^{-,G}(X)$ apparaissent alors naturellement. Remarquons que le foncteur π^G_* est exact car π est affine et l'ordre de G est supposé inversible dans k. Ainsi, il est bien défini sur $\mathcal{D}^{-,G}(X)$.

Si X/G est lisse, π est plat de sorte que π^* est exact et envoit $\mathcal{D}^b(X/G)$ dans $\mathcal{D}^{b,G}(X)$. Dans le cas particulier où G agit librement sur un schéma X, on a $[X/G] = X/G$. En particulier, on démontre l'équivalence de catégories :

$$\mathcal{D}^{b,G}(X) \simeq \mathcal{D}^b(X/G).$$

En revanche, si l'action de G est triviale sur X, $G-\mathrm{Qco}(X)$ se décompose suivant les représentations irréductibles de G, induisant une décomposition semiorthogonale (au sens de [2]) de la catégorie dérivée

$$\mathcal{D}^{*,G}(X) \simeq \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{D}^{*,\rho}(X), \tag{1}$$

où pour tout ρ, le foncteur $\mathcal{D}^*(X) \overset{\otimes\rho}{\to} \mathcal{D}^{*,\rho}(X)$ est une équivalence de catégories. On appellera $\mathcal{D}^{*,\rho}(X)$ la composante suivant ρ de la catégorie dérivée. Si ρ est la représentation triviale, on parlera de composante triviale. Ainsi, lorsque l'action est triviale, l'image de $\mathbf{L}\pi^*$ dans $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ est la composante triviale $\mathcal{D}^{*,\rho_0}(X)$.

Le résultat de cette note (Théorème 2.4) caractérise dans le cas général l'image de $\mathbf{L}\pi^*$, en donnant un critère de descente des objets de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ à la catégorie dérivée du quotient. On peut l'énoncer ainsi.

Un complexe E de G-faisceaux sur X se descend en un complexe de faisceaux sur le quotient si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, la restriction de E au sous-schéma adhérence des points de stabilisateur H est dans la composante triviale de la catégorie dérivée des H-faisceaux sur ce sous-schéma.

Suite à sa parution sous forme de prépublication [9], ce travail a été repris par Thomas Nevins dans le cadre des quotients par des groupes algébriques réductifs [8].

2. Démonstration du critère

Pour démontrer le Théorème 2.4, donnant un critère de descente des complexes de G-faisceaux, nous nous ramenons à l'application du critère de descente des G-faisceaux localement libres (Proposition 2.1). Pour cela, nous effectuons deux réductions successives : la première consiste à se ramener au cas d'un complexe de G-faisceaux localement libres (Proposition 2.2), et la deuxième à se ramener à un critère de descente sur chaque faisceau du complexe (Proposition 2.3).

Le critère classique de descente d'un G-faisceau localement libre porte sur ses fibres au-dessus des points fixes fermés de X. Dans le cas général, ils ne sont pas isolés et on peut construire une stratification du lieu des points fixes indexée par les stabilisateurs. Pour tout sous-groupe H de G, notons $\Delta_H = \{x \in X \mid G_x = H\}$. Son adhérence $\bar{\Delta}_H$ est la réunion de certaines composantes irréductibles de X^H, sous-schéma des points fixes de X et possède donc une structure de sous-schéma fermé lisse de X. Notons $i_H : \bar{\Delta}_H \hookrightarrow X$. Comme H agit trivialement sur $\bar{\Delta}_H$, la catégorie des H-faisceaux quasi-cohérents sur $\bar{\Delta}_H$ admet une décomposition indexée par l'ensemble des représentations irréductibles de H,

$$H-\mathrm{Qco}(\bar{\Delta}_H) = \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(H)} \mathrm{Qco}^\rho(\bar{\Delta}_H). \tag{2}$$

Cette égalité, et sa restriction aux faisceaux cohérents induisent une décomposition de $\mathcal{D}^{*,H}(\bar{\Delta}_H)$ analogue à (1).

Proposition 2.1. *Soit E un G-faisceau localement libre sur X. Alors E est l'image réciproque d'un faisceau localement libre sur X/G si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, $i_H^*(E)$ appartient à la composante triviale de $H-\mathrm{Qco}(\bar{\Delta}_H)$.*

Démonstration. Ce critère se déduit du critère classique ponctuel. Une première version de celui-ci se trouve dans [7]. Il a été généralisé par Kempf aux groupes algébriques réductifs (preuve dans [3]), et c'est sur cette généralisation que s'appuie le critère de descente de Nevins [8]. □

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{L} \subset G-\mathrm{Coh}(X)$ la sous-catégorie pleine des G-faisceaux cohérents localement libres sur X et $\mathcal{M}^b \subset \mathcal{D}^{b,G}(X)$ (respectivement $\mathcal{M}^- \subset \mathcal{D}^{-,G}(X)$) la sous-catégorie pleine des complexes de faisceaux dans $\mathcal{L}$. On a les équivalences de catégories $\mathcal{M}^- \simeq \mathcal{D}^{-,G}(X)$ et $\mathcal{M}^b \simeq \mathcal{D}^{b,G}(X)$.*

Démonstration. Dans le cas borné supérieurement, il s'agit d'une application du lemme [5, I.4.6]. Les hypothèses impliquent en effet que tout G-faisceau cohérent admet une résolution finie par des G-faisceaux cohérents localement libres. Le cas borné se déduit alors du fait que la catégorie $G-\mathrm{Coh}(X)$ est de dimension homologique finie, majorée par la dimension de X. □

Proposition 2.3. *Soit $L = (\cdots \to L_i \to \cdots)$ un objet de $\mathcal{D}^{*,G}(X)$ formé de G-faisceaux localement libres. Alors L est image réciproque d'un objet de $\mathcal{D}^*(X/G)$ si et seulement si pour tout i, L_i est image réciproque d'un faisceau localement libre de* $\mathrm{Coh}(X/G)$.

Démonstration. On démontre que pour tout G-morphisme $L_1 = \pi^*(E_1) \xrightarrow{\phi} L_2 = \pi^*(E_2)$ avec E_1 et E_2 localement libres dans $\mathrm{Coh}(X/G)$ provient d'un morphisme $E_1 \to E_2$ puis on en déduit le résultat pour les complexes. □

Le critère de descente s'énonce alors comme suit.

Théorème 2.4. *Un objet $E \in \mathcal{D}^{-,G}(X)$ est l'image par $\mathbf{L}\pi^*$ d'un objet de $\mathcal{D}^-(X/G)$ si et seulement si pour tout sous-groupe H de G, la restriction $\mathbf{L}i_H^*(E)$ du complexe E au sous schéma des points de stabilisateur H appartient à la composante triviale de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^{-,H}(\bar{\Delta}_H)$.*

Autrement dit, la flèche $\mathcal{D}^{-,G}(X) \xrightarrow{\oplus_H \mathbf{L}i_H^*} \bigoplus_H \mathcal{D}^{-,H}(\bar{\Delta}_H)$ est à but dans $\bigoplus_H \mathcal{D}^{-,\rho_0}(\bar{\Delta}_H)$.

Démonstration. Il s'agit de déterminer sous quelles conditions E est quasi-isomorphe à $\mathbf{L}\pi^*(\pi_*^G(E))$.

On commence par se ramener au cas où le complexe est formé de faisceaux cohérents localement libres. D'après la Proposition 2.2 il existe un tel complexe L quasi-isomorphe à E. Alors le complexe $\pi_*^G(L)$ est quasi-isomorphe à $\pi_*^G(E)$ et il est formé de faisceaux localement libres, donc π^*-acycliques. Ainsi, $\mathbf{L}\pi^*(\pi_*^G(E)) \simeq \pi^*(\pi_*^G(L))$. Il suffit donc de déterminer à quelle condition sur E le complexe L est quasi-isomorphe au complexe $\pi^*(\pi_*^G(L))$.

D'après la Proposition 2.3 un complexe de faisceaux localement libres se descend si et seulement si chacun des faisceaux qui le composent se descend. Ainsi, en appliquant la Proposition 2.1, on obtient que E provient du quotient si et seulement si pour tout sous-groupe H de G et pour tout indice k, le H-faisceau $i_H^*(L_k)$ sur $\bar{\Delta}_H$ appartenant à la composante triviale de $H-\mathrm{Coh}(\bar{\Delta}_H)$. Or les faisceaux localement libres sont i_H^*-acycliques, donc cette condition s'écrit encore $\mathbf{L}i_H^*(E) \in \mathcal{D}^{-,\rho_0}(\bar{\Delta}_H)$.

Si le quotient X/G est lisse, alors π est plat, et $\mathbf{L}\pi^* = \pi^*$ envoie $\mathcal{D}^b(X/G)$ sur $\mathcal{D}^{b,G}(X)$. Le critère pour qu'un objet de $\mathcal{D}^{b,G}(X)$ provienne du quotient est le même que dans le cas borné supérieurement. □

3. Exemple : l'espace projectif

Dans cette partie, nous adaptons la démarche de Beĭlinson [1] pour décrire la catégorie dérivée G-équivariante d'un espace projectif en terme de catégorie dérivée de modules sur un anneau, puis nous exprimons le Théorème 2.4 en ces termes algébriques dans le cas de la droite projective.

Soit $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit $S = S(V)$ l'algèbre symétrique sur V et $\Lambda = \Lambda(V)$ l'algèbre extérieure. Pour $A = S$ ou Λ, notons $M_A^G([0,n])$ la catégorie des (A-G)-modules libres de type fini dont les générateurs sont de degrés compris entre 0 et n, et $K_A^G([0,n])$ la catégorie triangulée des complexes d'objets de $M_A^G([0,n])$ à homotopie près.

Considérons alors le foncteur additif $F_A : M_A^G([0,n]) \to G-\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$ défini par

$$M = \bigoplus_{\alpha=0}^{n} V_\alpha \otimes A(-\alpha) \to \begin{cases} \bigoplus_{\alpha=0}^{n} V_\alpha \otimes \mathcal{O}(-\alpha) & \text{si } A = S, \\ \bigoplus_{\alpha=0}^{n} V_\alpha \otimes \Omega^\alpha(\alpha) & \text{si } A = \Lambda. \end{cases}$$

Il se prolonge à la catégorie triangulée des complexes $K_A^G([0,n])$, et après composition avec le foncteur de localisation, on peut voir F_A comme étant un foncteur de $K_A^G([0,n])$ dans $\mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^n)$. On obtient une version G-équivariante du théorème de Beĭlinson, puis, avec les notations qui suivent, une reformulation du Théorème 2.4 dans le cas de la droite projective.

Théorème 3.1. (1) *Les foncteurs* $F_S : K_S^G([0,n]) \to \mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^n)$ *et* $F_\Lambda : K_\Lambda^G([0,n]) \to \mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^n)$ *sont des équivalences de catégories.* (2) *Soit G un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. *Un complexe* $M \in K_{k[x,y]}^G([0,1])$ *provient du quotient si et seulement si pour toute forme linéaire f de stabilisateur H un sous groupe non trivial de G, le complexe $\pi_f(M)$ est formé de représentations triviales de H.*

Démonstration. Le foncteur F_S (respectivement F_Λ) envoie la famille génératrice $\{V \otimes A(-i),\ V \in \mathrm{Irr}(G),\ i \in [0,n]\}$ de $K_A^G([0,n])$ sur la famille $\{V \otimes \mathcal{O}(-i),\ V \in \mathrm{Irr}(G),\ i \in [0,n]\}$ de $\mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^n)$ (respectivement sur $\{V \otimes \Omega^i(-i),\ V \in \mathrm{Irr}(G),\ i \in [0,n]\}$). On démontre à l'aide du complexe de Koszul que ces familles sont génératrices. Enfin, on vérifie que les foncteurs F_A vérifient les conditions de pleine fidélité analogues à [1, Lemme 2] de sorte qu'en appliquant [1, Lemme 1], on obtient le premier point du théorème.

Le cas $n = 1$ fournit l'équivalence $\mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^1) \cong K_{k[x,y]}^G([0,1])$. Par ailleurs, le quotient $\mathbb{P}^1/G$ étant lisse, d'après la remarque suivant la preuve du Théorème 2.4, $F \in \mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^1)$ provient du quotient si et seulement si pour tout point P de stabilisateur non trivial H, le complexe $\mathbf{L}i_P^*(F)$ de représentations de H appartient à la composante triviale de $\mathcal{D}^H(\{P\})$. Or, en considérant $\{P\}$ comme l'espace projectif de dimension zéro $\mathrm{Proj}(k[u])$, la première partie du théorème donne $\mathcal{D}^{b,H}(\{P\}) \cong \mathcal{D}^b(\mathrm{R}_H(k)) \cong K_{k[u]}^H([0])$. Le foncteur $\mathbf{L}i_P^*$ est transformé par les équivalences de catégories ci-dessus en

$$\pi_f : \mathcal{D}^{b,G}(\mathbb{P}^1) \cong K_{k[x,y]}^G\bigl([0,1]\bigr) \to K_{k[u]}^H\bigl([0]\bigr) \cong \mathcal{D}^{b,H}\bigl(\{P\}\bigr),$$

où, si f est l'équation homogène de degré 1 de la droite de $\mathbb{A}^2$ définie par P, π_f est le prolongement du foncteur composé de $M_{k[x,y]}^G([0,1]) \to M_{k[u]}^H([0,1])$ induit par le morphisme quotient par f, avec le foncteur de $M_{k[u]}^H([0,1])$ dans $M_{k[u]}^H([0])$ défini par $(V_0 \otimes k[u]) \oplus (V_1 \otimes k[u](-1)) \to (V_0 \oplus (V_1 \otimes V_\chi)) \otimes k[u]$ où χ est le caractère par lequel agit H sur l'espace cotangent $k[u]_1 = \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. $\square$

Références

[1] A.A. Beĭlinson, Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problem of linear algebra, Funct. Anal. Appl. 12 (1979) 214–216.

[2] A. Bondal, M. Kapranov, Representable functors, Serre functors, and mutations, Math. USSR-Izv. 35 (1990) 519–541.

[3] J.-M. Drezet, M.S. Narasimhan, Groupe de picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, Invent. Math. 97 (1) (1989) 53–94.

[4] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. 9 (1957) 119–221.

[5] R. Hartshorne, Residues and Duality, in: Lecture Notes in Math., Vol. 20, Springer-Verlag, 1966.

[6] K. Lønsted, On G-linebundles and $K_G^{\cdot}(X)$, J. Math. Kyoto Univ. 23 (4) (1983) 775–793.

[7] D. Mumford, On the equations defining Abelian varieties I–III, Invent. Math. 1 (1966) 215–244.

[8] T. Nevins, Descent of coherent sheaves and complexes to geometric invariant theory quotients, Preprint, math.AG/0206297.

[9] S. Térouanne, Sur la catégorie $\mathcal{D}^G(X)$ pour l'action d'un groupe fini avec quotient lisse, Preprint, math.AG/0206144.