Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 467–470
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Valeurs propres relatives à un cône convexe : caractérisation et résultats de cardinalité

On eigenvalues induced by a convex cone

Alberto Seeger [a], Mounir Torki [b]

[a] *Université d'Avignon, département de mathématiques, 33, rue Louis Pasteur, 84000 Avignon, France*
[b] *Université d'Avignon, I.U.P. 339, chemin des Meinajaries, 84911 Avignon, France*

Reçu et accepté le 8 février 2003

Présenté par Haïm Brézis

Résumé

Étant donné une matrice A de taille $n \times n$ et un cône convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^n$, on désigne par $\sigma(A, K)$ l'ensemble des K-valeurs propres de A. Par définition, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une K-valeur propre de A si le système de complémentarité linéaire

$$x \in K, \quad Ax - \lambda x \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda x\rangle = 0$$

admet une solution $x \in \mathbb{R}^n$ non nulle. Nous étudions un certain nombre de propriétés relatives à la fonction multivoque $\sigma(\cdot, K)$, mettant en lumière quelques différences structurelles entre le cas polyédral et le cas non-polyédral. ***Pour citer cet article : A. Seeger, M. Torki, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Let A be an $n \times n$ real matrix, and $K \subset \mathbb{R}^n$ be a closed convex cone. The spectrum of A relative to K, denoted by $\sigma(A, K)$, is the set of all $\lambda \in \mathbb{R}$ for which the linear complementarity problem

$$x \in K, \quad Ax - \lambda x \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda x\rangle = 0$$

admits a nonzero solution $x \in \mathbb{R}^n$. The aim of this Note is to study the main properties of the set-valued mapping $\sigma(\cdot, K)$, and discuss some structural differences existing between the polyhedral case (i.e., K is finitely generated) and the non-polyhedral case. ***To cite this article: A. Seeger, M. Torki, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Adresses e-mail : alberto.seeger@univ-avignon.fr (A. Seeger), mounir.torki@iup.univ-avignon.fr (M. Torki).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00106-7

1. Notations et préliminaires

Soit M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des cônes convexes fermés non vides de $\mathbb{R}^n$. Un réel λ est une K-valeur propre de A s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifiant

$$x \in K, \quad Ax - \lambda x \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0,$$

où K^+ désigne le cône polaire (positif) de K. On note $\sigma(A, K)$ le K-spectre de A. Un certain nombre de propriétés générales sur $\sigma(A, K)$ ont été mises à jour dans [1–3]. Dans cette Note, nous nous intéressons notamment à l'existence de K-valeurs propres ainsi qu'à la cardinalité du K-spectre.

Théorème 1.1. *Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un sous-espace vectoriel, alors $\sigma(A, K) \neq \emptyset$, quel que soit $A \in M_n$.*

Un résultat similaire a été établi dans [3] sous l'hypothèse $K \neq \{0\}$ saillant (i.e., $K \cap -K = \{0\}$). Cette hypothèse peut être relaxée en utilisant le résultat de densité suivant :

Lemme 1.2. *Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un sous-espace vectoriel, il existe alors une suite $(K_\nu)_\nu \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, avec $K_\nu \neq \{0\}$ saillant, qui converge vers K au sens de Painlevé–Kuratowski.*

Remarque 1.3. Le Théorème 1.1 n'est pas valable dans le contexte d'un espace hilbertien de dimension infinie.

Dorénavant, nous distinguons deux cas fondamentalement différents. Lorsque K est polyédral, nous montrons que $\sigma(A, K)$ est fini et nous établissons des bornes fines sur sa cardinalité. Concernant l'analyse du cas non-polyédral, nous nous focalisons sur le cône de Lorentz. En dehors de son importance intrinsèque, le cône de Lorentz montre bien les difficultés qui surgissent lorqu'on abandonne l'hypothèse de polyédralité. L'ensemble $\sigma(A, K)$ n'est plus fini, mais il admet, toutefois, une structure particulière que l'on arrive à identifier.

2. Le cas polyédral

Un cône convexe fermé K est dit polyédral s'il existe un ensemble fini de vecteurs non nuls $\{g_1, \ldots, g_p\}$ tel que

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i \mid \alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_p \geqslant 0 \right\}. \tag{1}$$

Ceci équivaut à dire que K admet une représentation de la forme

$$K = \bigl\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \langle e_1, x \rangle \geqslant 0, \ldots, \langle e_r, x \rangle \geqslant 0 \bigr\}, \tag{2}$$

où $\{e_1, \ldots, e_r\}$ sont des vecteurs non nuls. La proposition suivante fournit une borne sur le nombre de valeurs propres relatives à un cône polyédral.

Proposition 2.1. *Soit $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ un cône polyédral. Si l'on note $f_K(d)$ le nombre de faces de K de dimension égale à d, alors*

$$\operatorname{card}\bigl[\sigma(A, K)\bigr] \leqslant \sum_{d=1}^{n} d f_K(d), \quad \forall A \in M_n.$$

Ce résultat abstrait donne lieu à des bornes explicites lorsque l'on dispose d'une représentation primale (ensemble des combinaisons linéaires positives d'un nombre fini de vecteurs) ou duale (intersection d'un nombre fini de demi-espaces) du cône polyédral K. Nous utilisons la notation usuelle $C_m^k := m!/k!(m-k)!$.

Corollaire 2.2. *Soit K un cône de la forme* (1). *Alors,*

$$\operatorname{card}\bigl[\sigma(A,K)\bigr] \leqslant \sum_{k=1}^{\min\{p,n\}} kC_p^k \ \bigl(\leqslant p2^{p-1}\bigr), \quad \forall A \in M_n.$$

Corollaire 2.3. *Soit K un cône de la forme* (2). *Alors,*

$$\operatorname{card}\bigl[\sigma(A,K)\bigr] \leqslant \sum_{k=0}^{\min\{r,n\}} (n-k)C_r^k \ \bigl(\leqslant 2^{r-1}[2n-r]\bigr), \quad \forall A \in M_n.$$

A présent, nous énonçons un résultat de localisation du K-spectre lorsque K admet la représentation (2). Si λ n'est pas valeur propre (classique) de A, on peut définir la matrice $B(\lambda) \in M_r$ dont les coefficients sont $B_{ij}(\lambda) := \langle e_i, (A-\lambda I_n)^{-1}e_j\rangle$ $\forall i,j \in \{1,\dots,r\}$. Pour toute partie non-vide J de l'ensemble d'indices $\{1,\dots,r\}$, on définit alors la matrice $B^J(\lambda)$ comme étant la sous-matrice principale de $B(\lambda)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la i-ème colonne, pour tout $i \notin J$.

Théorème 2.4. *Supposons que $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ soit représenté sous la forme duale* (2). *Si λ est une K-valeur propre de $A \in M_n$, alors nécessairement*

$$\begin{cases} \textit{soit } \lambda \textit{ est une valeur propre de } A, \textit{ soit il existe un sous-} \\ \textit{ensemble d'indices } J \subset \{1,\dots,r\} \textit{ tel que } \mathcal{P}_J(\lambda) = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{P}_J(\lambda) := [\det(A-\lambda I_n)]^{|J|}\det[B^J(\lambda)]$.

3. Le cas non-polyédral : étude du cône de Lorentz

Afin de mettre en avant les différences entre le cas polyédral et le cas non-polyédral, nous nous sommes focalisés sur l'étude du cône de Lorentz $\Lambda_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid [x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2]^{1/2} \leqslant x_n\}$. Dans le théorème suivant, nous caractérisons complètement le spectre d'une matrice A relatif à Λ_n. La notation $E^\dagger$ désigne l'inverse généralisé de E au sens de Moore–Penrose.

Théorème 3.1. *Considérons une matrice $A \in M_n$ partitionnée comme suit* :

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & u \\ v^{\mathrm{T}} & a \end{bmatrix} \quad \textit{avec } \tilde{A} \in M_{n-1},\ a \in \mathbb{R},\ \textit{et } u, v \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Le réel λ est une valeur propre de A relative à Λ_n si et seulement si :

- λ est une valeur propre (classique) de A associée à un vecteur propre situé dans l'intérieur de Λ_n, ou
- λ s'écrit sous la forme $\lambda = \mu + s$ avec $(\mu, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ vérifiant l'une des quatre conditions suivantes :

$$(\mathrm{S_I}) \qquad \begin{cases} \mathrm{I.1} & \mu \text{ n'est pas valeur propre de } \tilde{A}, \\ \mathrm{I.2} & \langle v, (\tilde{A}-\mu I_{n-1})^{-1}u\rangle = a - \mu - 2s, \\ \mathrm{I.3} & \|(\tilde{A}-\mu I_{n-1})^{-1}u\| = 1\,; \end{cases}$$

$$(\mathrm{S_{II}})\qquad \begin{cases} \text{II.1} & \mu \text{ est valeur propre de } \tilde{A},\\ \text{II.2} & u \in \mathrm{Im}(\tilde{A} - \mu I_{n-1}),\\ \text{II.3} & v \in \mathrm{Im}(\tilde{A}^{\mathrm{T}} - \mu I_{n-1}),\\ \text{II.4} & \langle v, (\tilde{A} - \mu I_{n-1})^{\dagger} u\rangle = a - \mu - 2s,\\ \text{II.5} & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A} - \mu I_{n-1} \\ v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} u \\ a - \mu - 2s \end{bmatrix} \right\| \leqslant 1\,; \end{cases}$$

$$(\mathrm{S_{III}})\qquad \begin{cases} \text{III.1} & \mu \text{ est valeur propre simple de } \tilde{A},\\ \text{III.2} & u \in \mathrm{Im}(\tilde{A} - \mu I_{n-1}),\\ \text{III.3} & v \notin \mathrm{Im}(\tilde{A}^{\mathrm{T}} - \mu I_{n-1}),\\ \text{III.4} & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A} - \mu I_{n-1} \\ v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} u \\ a - \mu - 2s \end{bmatrix} \right\| = 1\,; \end{cases}$$

$$(\mathrm{S_{IV}})\qquad \begin{cases} \text{IV.1} & \mu \text{ est valeur propre multiple de } \tilde{A},\\ \text{IV.2} & u \in \mathrm{Im}(\tilde{A} - \mu I_{n-1}),\\ \text{IV.3} & v \notin \mathrm{Im}(\tilde{A}^{\mathrm{T}} - \mu I_{n-1}),\\ \text{IV.4} & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{A} - \mu I_{n-1} \\ v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} u \\ a - \mu - 2s \end{bmatrix} \right\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Ce théorème donne lieu aux deux corollaires suivants. La notation $\lfloor \gamma \rfloor$ désigne la partie entière de $\gamma \in \mathbb{R}$.

Corollaire 3.2. *Quelle que soit $A \in M_n$, on peut toujours écrire $\sigma(A, \Lambda_n)$ comme union d'un nombre fini de parties connexes deux à deux disjointes. Plus précisement, dans cette décomposition*

(a) *chaque partie est soit un point soit un intervalle fermé*;
(b) *le nombre total de parties connexes ne peut excéder* $5n - 4$;
(c) *il y a au plus* $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ *intervalles non réduits à un point.*

Pour certaines classes de matrices, le spectre relatif à Λ_n est fini.

Corollaire 3.3. *Dans les situations suivantes, A admet un nombre fini de valeurs propres relatives au cône Λ_n.*

(a) *A est une matrice symétrique*;
(b) *la première sous-matrice principale de taille $(n-1) \times (n-1)$ n'admet pas de valeurs propres multiples* (*réelles*).

4. Conclusions

Dans cette Note, nous avons clarifié un certain nombre de questions concernant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice relative à un cône convexe fermé. Cependant, de nombreux domaines restent encore à explorer : étude des propriétés topologiques de l'ensemble $\sigma(A, K)$ (semi-continuité par rapport à chacun des arguments, ...), analyse approfondie de la structure du spectre relatif à un cône non-polyédral général. Enfin, la question du calcul numérique des K-valeurs propres reste complètement à étudier.

Références

[1] P. Lavilledieu, A. Seeger, Existence de valeurs propres pour les systèmes multivoques : résultats anciens et nouveaux, Ann. Sci. Math. Québec 25 (2001) 29–52.
[2] P. Quittner, Spectral analysis of variational inequalities, Comm. Math. Univ. Carolinae 27 (1986) 605–629.
[3] A. Seeger, Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions, Linear Algebra Appl. 292 (1999) 1–14.