Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 687–690
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse numérique

Sur une méthode d'éléments finis pour les écoulements de polymères

On a Finite Element method for the polymeric fluid flows

Dominique Sandri

LAN, bât. 101, Université de Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 6 décembre 2002 ; accepté après révision le 25 février 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note, nous présentons une méthode d'éléments finis (MEF) pour l'approximation du problème d'Oldroyd (cf. Bird et al., Dynamics of Polymeric Liquids I, Wiley, Amsterdam, 1987) qui permet de prendre en compte le modèle de Maxwell linéarisé. Construite sur le principe de la méthode exposée dans (Sandri, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 5045–5065), cette méthode permet d'introduire dans l'équation de comportement un décentrage dont le pas dépend du maillage, i.e., du type $\tau + \delta_K B(\tau)$, avec δ_K constant sur chaque triangle ou quadrangle. ***Pour citer cet article : D. Sandri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In this Note, we present a finite element method for the approximation of the Oldroyd's problem (cf. Bird et al., Dynamics of Polymeric Liquids I, Wiley, Amsterdam, 1987) which allows us to take into account the linearized Maxwell's problem. Based on (Sandri, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 5045–5065), this method allows us to introduce in the constitutive equation mesh dependent upwinding of the kind $\tau + \delta_K B(\tau)$, where δ_K is constant on each triangle. ***To cite this article: D. Sandri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Introduction

Nous considérons le problème d'Oldroyd a-dimensionnalisé (cf. [1]) sur un ouvert polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière Γ :

$$\begin{aligned}
&\sigma + \lambda\big[u\cdot\nabla\sigma + \sigma\omega(u) - \omega(u)\sigma - a\big(d(u)\sigma + \sigma d(u)\big)\big] = 2\alpha d(u) \quad \text{dans } \Omega,\\
&-\nabla\cdot\sigma - 2(1-\alpha)\nabla\cdot d(u) + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega,\\
&\nabla\cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \sigma = \sigma_0 \quad \text{sur } \Gamma^-_{u_0},
\end{aligned}$$

avec $f \in [L^2(\Omega)]^2$, $u_0 \in [H^1(\Omega)]^2$ vérifiant la condition de compatibilité $\int_\Gamma u_0 \cdot n \,\mathrm{ds} = 0$, n étant la normale unitaire extérieure à Γ, $n \cdot u_0$ le produit scalaire de n par u_0 et ds la mesure sur Γ, $\sigma_0 \in [L^2(\Gamma^-_{u_0})]^4$ où

Adresse e-mail : dsandri@maply.univ.-lyon1.fr (D. Sandri).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00103-1

$\Gamma^-_{u_0} = \{x \in \Gamma,\ n \cdot u_0(x) < 0\}$ est la partie de Γ par où entre le fluide.

Le tenseur σ_0 est supposé symétrique, σ est le tenseur des extra-contraintes (symétrique d'après les équations), u est le vecteur vitesse du fluide et p désigne la pression. Les paramètres α, λ et a vérifient $0 < \alpha \leqslant 1$, $\lambda > 0$ et $a \in [-1, 1]$. Pour $\alpha = 1$, ce problème est aussi appellé problème de Maxwell.

Nous notons, avec la convention de sommation sur les indices répétés, $\nabla \cdot \sigma = \sigma_{ij,j}$ la divergence de σ, $\sigma : \tau$ la somme $\sigma_{ij}\tau_{ij}$, $\nabla \cdot u = u_{i,i}$ la divergence de u, $u \cdot \nabla\sigma = u_k\sigma_{ij,k}$, $\nabla p = p_{,i}$ le gradient de p, $d(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ le tenseur des taux de déformation de u et $\omega(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ le tenseur de vorticité de u.

Dans la suite, pour un domaine K (en pratique K sera un triangle du maillage), nous noterons ∂K sa frontière, $(\cdot,\cdot)_K$ le produit scalaire sur $[L^2(K)]^n$, $n \in \mathbb{N}$, et $|\cdot|_K$ la norme correspondante. Nous omettrons l'indice lorsque $K = \Omega$.

L'approximation du problème d'Oldroyd soulève diverses difficultés dûes à sa non linéarité et aussi aux instabilités qui surviennent lorsque α est proche de 1. Ce cas est important en pratique puisqu'il modélise des polymères sans solvant. Nous examinons cette dernière difficulté sur le problème d'Oldroyd linéarisé suivant. Soit $b \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs tel que $\nabla \cdot b = 0$ dans Ω. On pose $\Gamma^- = \{x \in \Gamma, b \cdot n(x) < 0\}$ et soit σ_0 un tenseur symétrique tel que $\sigma_0 \in [L^2(\Gamma^-)]^4$.

Le problème considéré dans cet article est alors le suivant :

$$\begin{cases} \sigma + B(\sigma) = 2\alpha d(u) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot \sigma - 2(1-\alpha)\nabla \cdot d(u) + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \sigma = \sigma_0 \quad \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

où B est donné par $B(\sigma) = b \cdot \nabla\sigma$ ou bien par $B(\sigma) = b \cdot \nabla\sigma + \sigma\omega(b) - \omega(b)\sigma - a(d(b)\sigma + \sigma d(b))$. On supposera que B vérifie :

$$\left| \big(B(\sigma), \sigma\big) - \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma : \sigma\, b \cdot n \,\mathrm{ds} \right| \leqslant \kappa_0|\sigma|^2, \quad \text{avec } \kappa_0 < 1. \tag{1}$$

Dans le cas où B est donné par $B(\sigma) = b \cdot \nabla\sigma$, une intégration par parties montre que l'inégalité (1) est satisfaite avec $\kappa_0 = 0$. Lorsque B est donné par $B(\sigma) = b \cdot \nabla\sigma + \sigma\omega(b) - \omega(b)\sigma - a(d(b)\sigma + \sigma d(b))$, l'inégalité (1) est aussi satisfaite avec $\kappa_0 = 0$ lorsque $a = 0$ (en remarquant que $(\sigma\omega(b) - \omega(b)\sigma) : \sigma = 0$ pour tout σ) et lorsque $a \neq 0$, l'inégalité (1) est satisfaite avec $\kappa_0 > 0$ si l'on suppose que les gradients de b sont suffisamment petits (cf. aussi [4]).

Pour l'approximation de $(\mathcal{P})$, on munit Ω d'une partition $\mathcal{T}$ en sous-domaines (triangles ou quadrilatères) notés K auxquels sont associées deux constantes $\delta_K > 0$ et $\theta_K \in]0, 1[$ permettant de définir la MEF considérée dans cet article. Pratiquement on pourra prendre, par exemple, $h_K = C^{\mathrm{ste}}\delta_K$ avec h_K diamètre de K. Dans le Paragraphe 2 nous présentons la formulation variationnelle, notée $(\mathcal{Q})$, utilisée pour l'approximation de $(\mathcal{P})$, ainsi que des résultats d'ellipticité et de continuité de la forme bilinéaire $\mathcal{A}$ (qui donc dépend de $\{(\theta_K, \delta_K)\}_{K\in\mathcal{T}}$) attachée à cette formulation. Ellipicité et continuité sont alors données en fonction des normes suivantes. Pour l'ellipicité, on définit la norme $\|\cdot\|_1$ (norme qui ici, la notation pouvant prêter à confusion, ne désigne pas une norme sur des produits d'espaces H^1, cf. aussi la définition (4)) par :

$$\big\|(\sigma, u)\big\|_1^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}} \big\|(\sigma, u)\big\|_{1,K}^2 + \frac{1}{4\alpha}\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle_\Gamma^2, \tag{2}$$

où $\|(\sigma, u)\|_{1,K}^2 = c_K \frac{\theta_K}{2\alpha}|\sigma|_K^2 + 2(1-\alpha)|d(u)|_K^2 + 2\alpha(1-\theta_K)|d(u) - \frac{B(\sigma)}{2\alpha}|_K^2 + |\nabla \cdot u|_K^2$, avec $c_K = 1 - \kappa_0/\theta_K$ et pour une courbe $\gamma : \langle\sigma, \tau\rangle_\gamma = \int_\gamma \sigma : \tau|b \cdot n| \,\mathrm{ds}$ et $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle_\gamma^2 = \langle\sigma, \sigma\rangle_\gamma$. L'ellipicité sera obtenue avec cette norme en prenant dans $\mathcal{A}$ pour tout K :

$$\delta_K = \frac{1-\theta_K}{\theta_K} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_K = \frac{1}{1+\delta_K}, \tag{3}$$

et, lorsque $\kappa_0 > 0$, en supposant que δ_K est suffisamment petit pour avoir :

$$\kappa_0 < \theta_K < 1, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \tag{H1}$$

La continuité sera obtenue en fonction de la norme définie en (2) et de la norme :

$$\|(\tau,v)\|_{1,\star}^2=\sum_{K\in\mathcal{T}}\left[\|(\tau,v)\|_{1,\star,K}^2+\alpha^{-1}\theta_K^2(1+\delta_K)^2\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle_{\partial K\cap\Gamma^-}^2\right], \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned}\|(\tau,v)\|_{1,\star,K} &= \sqrt{\frac{\theta_K}{2\alpha}}\left(\frac{1}{\sqrt{c_K}}+\sqrt{\frac{\theta_K}{1-\theta_K}}\right)\left|\tau+\delta_K B(\tau)\right|_K\\ &\quad+\left(\sqrt{\frac{\alpha\theta_K}{c_K}}+\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{\alpha(1-\theta_K)}+1\right)\sqrt{2}\left|d(v)\right|_K.\end{aligned}$$

2. La formulation variationnelle considérée

On pose $T=\{\tau,\tau\in[H^1(\Omega)]^4,\tau$ symétrique$\}$, l'espace des tenseurs, $X=[H_0^1(\Omega)]^2$ l'espace des vitesses nulles au bord et $M=L_0^2(\Omega)=\{q\in L^2(\Omega),\ (1,q)=0\}$ l'espace des pressions de moyenne nulle. L'équation de comportement est approchée par une méthode de type SUPG, avec un décentrage du type $\tau+\delta_K B(\tau)_K$, avec δ_K constant sur chaque triangle, pour mieux prendre en compte de la taille des mailles.

En adaptant la méthode de [4] on est alors amené à considérer la formulation variationnelle :

$$\begin{cases}\text{Trouver } (\sigma,u-u_0,p)\in T\times X\times M \text{ tel que } \forall(\tau,v,q)\in T\times X\times M \text{ on a}\\ \mathcal{A}\big((\sigma,u),(\tau,v)\big)-(p,\nabla\cdot v)+(\nabla\cdot u,q)=(f,v)+\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}}\frac{\theta_K}{2\alpha}(1+\delta_K)\langle\sigma_0,\tau\rangle_{\partial K\cap\Gamma^-},\end{cases} \tag{$\mathcal{Q}$}$$

où $\mathcal{A}$ est la forme bilinéaire utilisée pour l'étude du problème approché :

$$\mathcal{A}\big((\sigma,u),(\tau,v)\big)=\sum_{K\in\mathcal{T}}\left[\mathcal{A}_K\big((\sigma,u),(\tau,v)\big)+\frac{\theta_K}{2\alpha}(1+\delta_K)\langle\sigma,\tau\rangle_{\partial K\cap\Gamma^-}\right],$$

où

$$\begin{aligned}A_K\big((\sigma,u),(\tau,v)\big) &= \frac{\theta_K}{2\alpha}\big(\sigma+B(\sigma)-2\alpha d(u),\tau+\delta_K B(\tau)\big)_K+\theta_K\big(\sigma,d(v)\big)_K\\ &\quad+2(1-\alpha)\big(d(u),d(v)\big)_K+2\alpha(1-\theta_K)\left(d(u)-\frac{B(\sigma)}{2\alpha},d(v)\right)_K+(\nabla\cdot u,\nabla\cdot v)_K.\end{aligned}$$

On a alors pour $\mathcal{A}$ le résultat suivant d'ellipticité et de continuité :

Proposition 2.1. *On suppose que* (H1) *est vérifiée. Soient* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_{1,\star}$ *les normes définies en* (2) *et* (4).
- Ellipticité. *On suppose que* $\delta_K=(1-\theta_K)/\theta_K$, $\forall K\in\mathcal{T}$. *On a alors* :

$$\mathcal{A}\big((\sigma,u),(\sigma,u)\big)\geqslant\|(\sigma,u)\|_1^2,\quad\forall(\sigma,u)\in T\times X.$$

- Continuité. *On suppose que* $\delta_K>0$, $\forall K\in\mathcal{T}$. *On a alors* :

$$\mathcal{A}\big((\sigma,u),(\tau,v)\big)\leqslant\|(\sigma,u)\|_1\|(\tau,v)\|_{1,\star},\quad\forall\big((\sigma,u),(\tau,v)\big)\in[T\times X]^2.$$

3. Approximation élement fini du problème $(\mathcal{P})$

On note $\{T_h\times X_h\times M_h\subset T\times X\times M\}_{h>0}$ une famille d'espaces de dimension finie. Le problème approché s'écrit alors :

$$\begin{cases}\text{Trouver } (\sigma_h,u_h-u_0,p_h)\in T_h\times X_h\times M_h \text{ tel que :}\\ \mathcal{A}\big((\sigma_h,u_h),(\tau,v)\big)-(p_h,\nabla\cdot v)+(\nabla\cdot u_h,q)\\ \quad=(f,v)+\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}}\frac{\theta_K}{2\alpha}(1+\delta_K)\langle\sigma_0,\tau\rangle_{\partial K\cap\Gamma^-},\quad\forall(\tau,v,q)\in T_h\times X_h\times M_h.\end{cases} \tag{$\mathcal{Q}_h$}$$

On suppose que la condition inf-sup classique vitesse-pression est vérifiée :

$$\inf_{q\in M_h} \sup_{v\in X_h} \frac{(\nabla\cdot v, q)}{|d(v)||q|} \geqslant \beta > 0 \tag{5}$$

avec β indépendant de h. On pose $V_h = \{v_h, v_h - u_0 \in X_h,\ (\nabla\cdot v_h, q_h) = 0,\ \forall q_h \in M_h\}$. On a alors le résultat abstrait d'estimation d'erreur suivant :

Théorème 3.1. *On suppose que* (5) *et* (H1) *sont vérifiées. On suppose que pour tout $K \in \mathcal{T}$ on a $\delta_K = (1-\theta_K)/\theta_K$, alors le problème $(\mathcal{Q}_h)$ admet une solution unique $(\sigma_h, u_h - u_0, p_h) \in T_h \times X_h \times M_h$. D'autre part, si $(\mathcal{P})$ admet une solution $(\sigma, u - u_0, p) \in T \times X \times M$, alors on a l'estimation d'erreur suivante pour tout $(\tau_h, v_h, q_h) \in T_h \times V_h \times M_h$:*

$$\begin{aligned}
&\big\|(\sigma-\sigma_h, u-u_h)\big\|_1 \leqslant \sqrt{3}\big[\big\|(\sigma-\tau_h, u-v_h)\big\|_{1,\star} + |p-q_h|\big],\\
&|p-p_h| \leqslant \big(1+\sqrt{2}\beta^{-1}\big)|p-q_h| + \sqrt{2}\beta^{-1}\left(\max_{K\in\mathcal{T}} \frac{\theta_K}{(\theta_K-\kappa_0)^{1/2}} + 3\right)\big\|(\sigma-\sigma_h, u-u_h)\big\|_1.
\end{aligned}$$

Exemple. Si l'on considère l'exemple dans [4] de l'approximation du couple (u, p) par l'élément de Taylor–Hood et de σ par du P_1-continu, le théorème précédent conduit en prenant $\delta_K = h_K$ et $\theta_K = 1/(1+\delta_K)$ à une estimation du type :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\theta_0-\kappa_0}|\sigma-\sigma_h| + \sqrt{1-\alpha}\big|d(u-u_h)\big| + \sqrt{\theta_0}\left[\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K\big|2\alpha d(u-u_h) - B(\sigma-\sigma_h)\big|^2\right]^{1/2}\\
&\quad + \big|\nabla\cdot(u-u_h)\big| + \sqrt{\theta_0-\kappa_0}|p-p_h| \leqslant C\big(1+(\theta_0-\kappa_0)^{-1/2}\big)\left[\sum_{K\in\mathcal{T}} C_K^2(\sigma, u, p)h_K^3\right]^{1/2},
\end{aligned}$$

avec $C_K(\sigma, u, p) = \|\sigma\|_{H^2(K)} + \|u\|_{H^3(K)} + \|p\|_{H^2(K)}$ et C indépendant de $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, δ_K, h_K, θ_K, κ_0, $\theta_0 = \inf_K \theta_K$, et (σ, u, p).

4. Conclusion

La méthode présentée ici permet d'adapter le pas de décentrage au maillage, elle permet aussi, comme dans [4], de traiter le problème de Maxwell linéarisé, c'est à dire le problème $(\mathcal{P})$ avec $\alpha = 1$. Il est à noter que le problème de Maxwell linéarisé reste ouvert lorsque l'on utilise des méthodes de type EVSS comme dans [2], ou, comme dans [3], des espaces d'éléments finis vérifiant la condition inf-sup tenseur-vitesse attachée à l'approximation classique à trois champs du problème, $(\mathcal{P})$ avec $B = 0$, $\alpha = 1$ et $\Gamma^- = \emptyset$ dans les équations.

Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue.

Références

[1] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of Polymeric Liquids I, Wiley, Amsterdam, 1987.

[2] M. Fortin, R. Guénette, R. Pierre, Numerical analysis of the modified EVSS method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 143 (1997) 79–95.

[3] J.M. Marchal, M.J. Crochet, A new finite element for calculating viscoelastic flow, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 26 (1987) 77–114.

[4] D. Sandri, On a FEM method for a linearized version of the Oldroyd problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 5045–5065.