



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 537–542



Mathematical Problems in Mechanics

Asymptotic transport models for heat and mass transfer in reactive porous media

Modèles asymptotiques de transport de masse et de chaleur en milieux poreux

Pierre Charrier^a, Bruno Dubroca^b

^a *Mathématiques appliquées de Bordeaux, UMR-CNRS 5466, LRC-CEA M03, Université Bordeaux I, 33405 Talence cedex, France*

^b *CEA-CESTA, BP 2, 33114 Le Barp, France*

Received 4 November 2002; accepted after revision 4 February 2003

Presented by Olivier Pironneau

Abstract

We propose an approach for deriving in a rigorous but formal way a family of models of mass and heat transfer in reactive porous media. At a microscopic level we set a model coupling the Boltzmann equation in the gas phase, the heat equation on the solid phase and appropriate interface conditions. An asymptotic expansion leads to a system of coupled diffusion equations where the effective diffusion tensors are defined from the microscopic geometry of the material through auxiliary problems. The ellipticity of the diffusion operator is addressed. **To cite this article:** *P. Charrier, B. Dubroca, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Nous proposons une méthode pour établir des modèles de transfert de masse et de chaleur en milieux poreux réactifs. Au niveau microscopique le modèle couple l'équation de Boltzmann pour le gaz, l'équation de la chaleur dans le solide et des conditions d'interface. Un développement asymptotique conduit à un système d'équation de diffusion dont les coefficients effectifs sont définis à partir de la géométrie microscopique grâce à des problèmes auxiliaires. On étudie l'ellipticité de l'opérateur de diffusion. **Pour citer cet article :** *P. Charrier, B. Dubroca, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Version française abrégée

Nous noterons Ω , le domaine de \mathbb{R}^3 occupé par le matériau poreux, $\Omega_s \subset \Omega$ le domaine de Ω occupé par la phase solide, Ω_f le domaine occupé par la gaz et Σ l'interface entre Ω_f et Ω_s . Par la suite $n = n(x)$, $x \in \Sigma$,

E-mail addresses: Pierre.Charrier@math.u-bordeaux.fr (P. Charrier), Bruno.Dubroca@cea.fr (B. Dubroca).

représentera la normale unitaire extérieure à la frontière Σ de Ω_s au point x . La phase solide est caractérisée par sa densité ρ_s , sa chaleur spécifique C_v , sa conductivité thermique λ_s et son champ de température $T(x, t)$ défini sur Ω_s . Le fluide, un gaz monoatomique est décrit au niveau microscopique par sa fonction de distribution $f = f(x, t, v)$ des particules. Nous prendrons pour hypothèse qu’une réaction d’absorption/désorption existe sur l’interface Σ entre le solide et le fluide (1). La masse par unité de surface des molécules de gaz collées sur l’interface est notée $N = N(x, t)$. La cinétique chimique de la réaction (1) est caractérisée par les coefficients k_f et k_b . La variation d’énergie due à la réaction sur la paroi est notée $e_p = e_p(T)$. Finalement, nous supposons aussi que la distribution des atomes de gaz quittant la surface Σ par désorption ou réflexion est une demi Maxwellienne de température T .

En écrivant le système sous forme adimensionnée, en supposant que les nombres de Mach et de Knudsen sont petits et que le temps caractéristique de la réaction (1) est comparable au temps de diffusion on obtient le système (2)–(6) où $M(T) = 1/(2\pi(RT)^2) \exp(-|v|^2/2)RT$, $r = 0$ si λ_s et la conductivité thermique du gaz, λ_g , sont du même ordre de grandeur et $r = 1$ si $\lambda_s \gg \lambda_g$.

La géométrie du milieu est supposée périodique où Y est la cellule élémentaire, $Y_f \subset Y$ est la partie de cette cellule occupée par le gaz, Y_s est la partie occupée par le solide, et γ l’interface entre les deux. On supposera que les fonctions T et f ont une dépendance spatiale de la forme $T = T(x, y)$, $f = f(x, y)$, où $x \in \Omega$ est la variable lente et $y \in Y$ est la variable rapide. On supposera de plus que les fonctions T et f sont périodiques en y . Dans le modèle (2)–(6) on recherche alors T^ε et f^ε comme une série en puissance de ε , $T^\varepsilon(x, y)|_{y=x/\varepsilon} = T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y) + \varepsilon^2 T_2(x, y) + \dots|_{y=x/\varepsilon}$, $f^\varepsilon(x, y, v)|_{y=x/\varepsilon} = f_0^\varepsilon(x, y, v) + \varepsilon f_1^\varepsilon(x, y, v) + \varepsilon^2 f_2^\varepsilon(x, y, v) + \dots|_{y=x/\varepsilon}$.

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous obtenons que T_0 est indépendant de y , f_0 est une Maxwellienne de vitesse nulle, indépendante de y , avec la température T_0 et N_0 est indépendant de y (voir Proposition 2.1). Puisque $\nabla_x f_0$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de $\nabla_x T_0$ et $\nabla_x \rho_0$, nous pouvons récrire f_1 et T_1 sous la forme suivante $f_1 = -f_0(\alpha \cdot \nabla_x T_0 + \beta \cdot \nabla_x \rho_0)$, $T_1 = \gamma \cdot \nabla_x T_0 + \omega \cdot \nabla_x \rho_0$, où $\alpha = \alpha(y, v) \in \mathbb{R}^3$, $\beta = \beta(y, v) \in \mathbb{R}^3$, $\gamma = \gamma(y) \in \mathbb{R}^3$, $\omega = \omega(y) \in \mathbb{R}^3$ sont solutions des problèmes auxiliaires élémentaires (7)–(12). α , γ (et aussi β , ω) sont définis par un système couplé d’équations elliptique et de Boltzmann linéarisée. Finalement, le modèle asymptotique de transport est décrit par les Éqs. (13)–(20). Cette fermeture conduit à un système asymptotique de diffusion qui est non linéaire dans les variables ρ_0 et T_0 .

Nous pouvons prouver que pour $r = 0$ que l’opérateur de diffusion dans le modèle de diffusion asymptotique est elliptique. De plus, nous pouvons donner les conditions suffisantes et nécessaires de dégénérescence de cet opérateur que nous pouvons relier à la constitution morphologique du milieu (voir Proposition 3.2).

Ce modèle a été construit sous l’hypothèse que le gaz dans les pores est régi par un régime transitionnel où les collisions avec le solide et les collisions binaires ont des fréquences comparables. Le modèle peut être étendue sans difficultés au régime raréfié dans les pores où n’existent plus de collisions binaires. Cependant, ce régime (connu comme la *diffusion de Knudsen*), nécessite un horizon fini et la preuve de la Proposition 2.1 est différente (voir [1,7]) mais le modèle asymptotique (7)–(12) reste le même (avec $Q(f, f) = 0$). L’extension au cas dense requiert plus de travail. Par exemple, considérons le cas simplifié $r = 1$ et $Q(f, f) = (1/\tau)(Mf - f)$. Nous rescalons le problème auxiliaire (11)–(12) et faisons tendre τ vers zéro. En recherchant une solution de (11)–(12) sous la forme $\beta_k = \beta_k^{(-1)}/\tau + \beta_k^{(0)} + \beta_k^{(1)}\tau + \dots$, nous avons,

Proposition 1. $\beta_k^{(-1)} = a_{0,k} + \rho_0 RT_0 a_{1,k} \cdot v + a_{2,k}|v|^2$ où $a_{1,k}$ est défini par

$$-\Delta_y a_{1,k} + \nabla_y \pi(y) = e^{(k)}, \quad \text{div}_y a_{1,k} = 0, \quad a_{1,k}|_\gamma = 0,$$

et $u = -\frac{\varepsilon D}{\mu} \nabla_x p$, où μ est la viscosité et D est donné par $D_{ij} = \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} a_{1,j}^i dy$.

La relation entre u et ∇p n’est autre que la loi de Darcy et (21) est la problème auxiliaire classique que l’on rencontre quand on dérive la loi de Darcy à partir de l’équation de Stokes par homogénéisation.

1. Microscopic model with adsorption–desorption

We denote by Ω , the open set in \mathbb{R}^3 occupied by the porous material, $\Omega_s \subset \Omega$ the open subset of Ω occupied by the solid phase, Ω_f the open subset occupied by the gas and Σ the interface between Ω_f et Ω_s . *In the following $n = n(x)$, $x \in \Sigma$, denotes the outer unit normal to the boundary Σ of Ω_s at point x .*

The solid phase is characterised by its density ρ_s , its specific heat at constant volume C_v , its thermal conductivity λ_s and the temperature field $T(x, t)$ defined on Ω_s . The fluid phase, a single component mono-atomic gas, is described on a kinetic level by the distribution function $f = f(x, t, v)$. We assume that an adsorption–desorption reaction occurs on the interface Σ between the solide phase and the gas,



and we denote $N = N(x, t)$ the mass per surface unit of gas molecules stucked on the interface. The kinetic of the absorption-desorption reaction is characterized by the coefficients k_f and k_b and $e_p = e_p(T)$ denotes the energy variation due to the adsorption or desorption of a gas molecule. Finally we assume that the distribution of gas molecule leaving the interface Σ by desorption or reflexion is a half absolute Maxwellian at temperature T . Writing the system in dimensionless form, assuming that the Mach and Knudsen numbers are small (that is to say that collisions with the solid phase and binary collisions have comparable frequencies), and that the characteristic time of the adsorption–desorption reaction is comparable to the diffusion time leads to the following scaled system

$$\varepsilon^2 \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = Q(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \tag{2}$$

$$\rho_s C_v \partial_t T^\varepsilon = (\text{div}_x \lambda_s \nabla_x T^\varepsilon), \tag{3}$$

$$f^\varepsilon(x, v)_{|v \cdot n > 0, x \in \gamma} = \left((1 - \varepsilon^2 k_f) \int_{w \cdot n < 0} |w \cdot n| f^\varepsilon(x, w) dw + \varepsilon^2 k_b N^\varepsilon(x, t) \right) M(T^\varepsilon), \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt} N^\varepsilon(x, t) = \left(k_f \int_{v \cdot n < 0} |v \cdot n| f^\varepsilon(x, v, t) dv - k_b N^\varepsilon(x, t) \right), \quad x \in \gamma, \tag{5}$$

$$\lambda_s \nabla_x T^\varepsilon \cdot n = -\varepsilon^{-1+r} \int \frac{1}{2} |v|^2 f^\varepsilon(x, v, t) v \cdot n dv - \varepsilon^{1+r} \frac{d}{dt} N^\varepsilon(x, t) e_p(T), \tag{6}$$

where $Q(f, f)$ is the collision term in the Boltzmann equation, $M(T) = 1/(2\pi(RT)^2) \exp(-|v|^2/2) RT$, $r = 0$ if λ_s and the thermal conductivity the gas, λ_g , are of the same order and $r = 1$ if $\lambda_s \gg \lambda_g$.

2. The asymptotic transport model

We recall that the geometry of the porous medium is periodic. We use the following notations: Y is the elementary cell, $Y_f \subset Y$ the part of this cell occupied by the gas, Y_s the part of this cell occupied by the solid phase and γ is the interface. We assume that the unknown functions T and f have a dependence in space of the following form $T = T(x, y)$, $f = f(x, y)$, where $x \in \Omega$ is the slow variable, $y \in Y$ is the fast variable, and we assume that T and f are y -periodic functions. In the scaled model we look for T^ε and f^ε as a power series in ε $T^\varepsilon(x, y)_{|y=x/\varepsilon} = T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y) + \varepsilon^2 T_2(x, y) + \dots_{|y=x/\varepsilon}$, $f^\varepsilon(x, y, v)_{|y=x/\varepsilon} = f_0^\varepsilon(x, y, v) + \varepsilon f_1^\varepsilon(x, y, v) + \varepsilon^2 f_2^\varepsilon(x, y, v) + \dots_{|y=x/\varepsilon}$. When $\varepsilon \rightarrow 0$ we both change the scale in space by an homogeneization process, and derive an hydrodynamic limit of the kinetic model chosen for the fluid. So, the method used here is the classical homogeneization technics introduced in [3] for the solid phase, and for the gas phase is inspired from [1]. The main difficulty, here comes from the coupling of this two different technics. We have the following result

Proposition 2.1. *T_0 is independent of y , f_0 is an absolute Maxwellian distribution, independent of y , with temperature T_0 and N_0 is independent of y .*

Since $\nabla_x f_0$ can be written as a linear combination of $\nabla_x T_0$ and $\nabla_x \rho_0$, we can seek f_1 and T_1 in the following form $f_1 = -f_0(\alpha \cdot \nabla_x T_0 + \beta \cdot \nabla_x \rho_0)$, $T_1 = \gamma \cdot \nabla_x T_0 + \omega \cdot \nabla_x \rho_0$, where $\alpha = \alpha(y, v) \in \mathbb{R}^3$, $\beta = \beta(y, v) \in \mathbb{R}^3$, $\gamma = \gamma(y) \in \mathbb{R}^3$, $\omega = \omega(y) \in \mathbb{R}^3$ are solutions of the following problems called *cell auxiliary problems*

$$-\operatorname{div}_y(\lambda_s \nabla_y \gamma_j) = 0 \quad \text{in } Y_s, \quad \lambda_s \nabla_y \gamma_j \cdot n = (1-r) \int \frac{1}{2} |v|^2 v \cdot n f_0 \alpha_j \, dv - (\lambda_s n)_k \quad \text{on } \gamma, \quad (7)$$

$$-L(f_0 \alpha_j) + v \cdot \nabla_y f_0 \alpha_j = f_0 v_j \left(\frac{|v|^2}{2RT_0^2} - \frac{3}{2T_0} \right), \quad (8)$$

$$\alpha_j(y, v)|_{y \in \gamma, v \cdot n > 0} = \int_{(w \cdot n) < 0} |w \cdot n| \alpha_j(w) M(T_0)(w) \, dw - \left(\frac{|v|^2}{2RT_0^2} - \frac{2}{T_0} \right) \gamma_j(y), \quad (9)$$

$$-\operatorname{div}_y(\lambda_s \nabla_y \omega_j) = 0 \quad \text{in } Y_s, \quad \lambda \nabla_y \omega_j \cdot n = (1-r) \int \frac{1}{2} |v|^2 v \cdot n f_0 \beta_j \, dv \quad \text{on } \gamma, \quad (10)$$

$$-L(f_0 \beta_j) + v \cdot \nabla_y f_0 \beta_j = v_j f_0 \frac{1}{\rho_0}, \quad (11)$$

$$\beta_j(y, v)|_{y \in \gamma, v \cdot n > 0} = \int_{(w \cdot n) < 0} |w \cdot n| \beta_j(w) M(T_0)(w) \, dw - (1-r) \left(\frac{|v|^2}{2RT_0^2} - \frac{2}{T_0} \right) \omega_j(y). \quad (12)$$

Where L is the linearized collision term defined by $L(g) = Q(f_0, g) + Q(g, f_0)$. We remark that α and γ (and also β and ω) are defined by a coupled system of linear elliptic equations and of linearized stationary Boltzmann equations. Finally, the asymptotic transport model (ATM) takes the following form

$$\partial_t \varepsilon \rho_0 - \operatorname{div}_x(D \nabla_x \rho_0) - \operatorname{div}_x(\tilde{D} \nabla_x T_0) = -\frac{|\gamma|}{|Y|} \left(k_f \rho_0 \left(\frac{RT_0}{2\pi} \right)^{1/2} - k_b N_0 \right), \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} N_0 - k_f \rho_0 \left(\frac{RT_0}{2\pi} \right)^{1/2} + k_b N_0 = 0, \quad (14)$$

$$\partial_t E_0 - \operatorname{div}_x(K \nabla_x T_0) - \operatorname{div}_x(\tilde{K} \nabla_x \rho_0) = 0, \quad (15)$$

where

$$E_0 = E_0(\rho_0, T_0) = (1-\varepsilon) \rho_s C_v T_0 + (1-r) \varepsilon \frac{3}{2} \rho_0 RT_0 + (1-r) \frac{|\gamma|}{|Y|} N_0 e_p(T_0), \quad (16)$$

$$D = D(\rho_0, T_0) = \frac{\varepsilon}{|Y_f|} \left\langle f_0 v \otimes \int_{Y_f} \beta(y, v) \, dy \right\rangle, \quad (17)$$

$$\tilde{D} = \tilde{D}(T_0, \rho_0) = \frac{\varepsilon}{|Y_f|} \left\langle f_0 v \otimes \int_{Y_f} \alpha(y, v) \, dy \right\rangle, \quad (18)$$

$$K = K(T_0, \rho_0) = \frac{1}{|Y|} \left(\int_{Y_s} (\lambda + \lambda \nabla_y \gamma) \, dy + (1-r) \left\langle f_0 \frac{|v|^2}{2} v \otimes \int_{Y_f} \alpha(y, v) \, dy \right\rangle \right), \quad (19)$$

$$\tilde{K} = \tilde{K}(T_0, \rho_0) = \frac{1-r}{|Y|} \left(\int_{Y_s} \lambda \nabla_y \omega \, dy + \left\langle f_0 \frac{|v|^2}{2} v \otimes \int_{Y_f} \beta(y, v) \, dy \right\rangle \right). \quad (20)$$

This closure yields an asymptotic diffusion system which is non-linear in the variable ρ_0 and T_0 since E_0 , D , \tilde{D} , K and \tilde{K} are functions of ρ_0 and T_0 . This system contains crossed diffusion terms modeling a phenomenon similar

to the Soret effect and called thermal mass diffusion or thermal transpiration ($\text{div}_x(\tilde{D}\nabla_x T_0)$) and a phenomenon similar to the Dufour effect ($\text{div}_x(\tilde{K}\nabla_x \rho_0)$). We emphasize on the fact that these crossed diffusion coefficients are generally very difficult to measure and that, except in few cases, their accurate magnitude are not available (see [8,9]). One of the main interest of the proposed ATM model is that it gives a systematic procedure to compute them by solving the cell auxiliary problems.

3. Ellipticity and degeneracy conditions of the diffusion operator

We now prove that for $r = 0$ the diffusion operator of the asymptotic transport model is elliptic. For this purpose it is convenient to write the system in the entropic variables $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ (see for instance [6] or [2]), defined from the underlying Maxwellian distribution function of the model by $f_0(v) = \frac{\rho_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp(-\frac{|v|^2}{2RT_0}) = \exp(\mu_1 + \frac{|v|^2}{2}\mu_2)$. Then, dropping the right-hand side of the mass diffusion equation and the differential equation on N_0 , the asymptotic transport system may be written $\mathcal{M}\partial_t \vec{\mu} - \text{div}_x \mathcal{A}\nabla_x \vec{\mu} = 0$, and we can state the following result [4,5]

Theorem 3.1. *The asymptotic transport model for $r = 0$ is elliptic in the following sense: $\forall(\rho_0, T_0), \forall \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^6$, we have $(\mathcal{A}(\rho_0, T_0) + \mathcal{A}^T(\rho_0, T_0))\vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \geq 0$.*

In addition we are able to give necessary and sufficient conditions of degeneracy of this operator. For this, we introduce the oriented graph $G(V, E)$ (V is the set of vertices and $E \subset V \times V$ is the set of edges)

Definition 1. *The graph $G = (V, E)$ is defined in the following way*

- $V = \{1, 2, 3, \dots, ncc\}$ (i.e., we associate a vertex to each connected component of Y_f).
- $(i_1, i_2) \in E$ if and only if there exists $k \in \{1, 2, 3\}$, $y^1 \in Y_f^{(i_1)} \cap \partial Y$, $y^2 \in Y_f^{(i_2)} \cap \partial Y$ such that $y^{(1)} = y^{(2)} + \Delta y_k e^k$, and we assign the index k on the edge (i_1, i_2) .

The geometric interpretation of this definition is that the components $Y_f^{(i_1)}$ and $Y_f^{(i_2)}$ are linked together through the periodic boundary condition (the orientation has been chosen so that one cross ∂Y_f from $Y_f^{(i_1)}$ to $Y_f^{(i_2)}$, in the sens of the basis vector orthogonal to the face).

Proposition 3.2. *(ξ, η) is a degeneracy direction if and only if $\eta = 0$ and there exists a cycle in the graph G such that $\sum_{k=1}^3 p_k \Delta_k \xi_k = 0$, where p_k is the algebraic number of edges in the cycle with index k , the edges being counted +1 if their orientation in G is in the sense of the cycle, and counted -1 otherwise.*

4. Rarefied and dense limit regimes

The ATM has been derived under the assumption that the gas in the pore is in a transition regime where collisions with the solid phase and binary collisions have comparable frequencies. The model can be extended without significant difficulties to rarefied flow in the pore with, in the limit, no more binary collisions. However, in this regime (known as *Knudsen diffusion*), a bounded horizon assumption is needed and the proof of Proposition 2.1 is different (see [1,7]) but the asymptotic model is unchanged and the effective transport coefficients are given by the auxiliary problems (7)–(12) (with $Q(f, f) = 0$). The extension to dense flow in the pore requires some more work. Let us consider the simplified case where $r = 1$ and $Q(f, f) = \frac{1}{\tau}(Mf - f)$. We perform a rescaling in

the auxiliary problem (11), (12) and make τ tends to zero. Then, looking for a solution of (11), (12) in the form $\beta_k = \beta_k^{(-1)}/\tau + \beta_k^{(0)} + \beta_k^{(1)}\tau + \dots$, we have the following result

Proposition 4.1. $\beta_k^{(-1)} = a_{0,k} + \rho_0 RT_0 a_{1,k} \cdot v + a_{2,k} |v|^2$ where $a_{1,k}$ is defined by

$$-\Delta_y a_{1,k} + \nabla_y \pi(y) = e^{(k)}, \quad \operatorname{div}_y a_{1,k} = 0, \quad a_{1,k}|_\gamma = 0, \quad (21)$$

and $u = -\frac{\varepsilon D}{\mu} \nabla_x p$, where μ is the viscosity and D is given by $D_{ij} = \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} a_{1,j}^i dy$.

The relation between u and ∇p is the well known Darcy law and (21) is the usual cell auxiliary problems encountered when deriving the Darcy law by homogenization of the Stokes equation.

References

- [1] C. Bardos, L. Dumas, F. Golse, Diffusion approximation for billiards with totally accommodating scatterers, J. Statist. Phys. 86 (1997) 351–375.
- [2] N. Ben Abdallah, P. Degond, S. Genieys, An energy-transport model for semiconductors derived from the Boltzmann equation, J. Statist. Phys. 84 (1–2) (1996).
- [3] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, in: Stud. Math. Appl., Vol. 5, North-Holland, 1978.
- [4] P. Charrier, F. Cheruette, B. Dubroca, Modèles de transfert de masse et de chaleur dans un matériau poreux avec réactions chimiques (I), Rapport LRC-01.07, MAB-LRC-CEA M03, Université Bordeaux I, 2001.
- [5] P. Charrier, B. Dubroca, Modèles de transfert de masse et de chaleur dans un matériau poreux avec réactions chimiques (II) : ellipticité du système, Rapport LRC-02.03, MAB-LRC-CEA M03, Université Bordeaux I, 2002, <http://www.math.u-bordeaux.fr/LRC-CEA/>.
- [6] P. Degond, Mathematical Modelling of Microelectronics Semiconductor Devices, in: AMS/IP Stud. Adv. Math., Vol. 15, 2000.
- [7] F. Golse, Transport dans les milieux composites fortement contrastés : modèle du billard, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 61 (4) (1994).
- [8] M. Kaviani, Principle of Heat Transfer in Porous Media, in: Mech. Engrg. Ser., Springer-Verlag, 1995.
- [9] E.A. Mason, A.P. Malinauskas, Gas Transport in Porous Media: The Dusty-Gas Model, Elsevier, 1983.