Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 315–318
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Solutions nulles d'opérateurs aux dérivées partielles à plusieurs variables fuchsiennes

Null-solutions for partial differential operators with several Fuchsian variables

Malika Belarbi [a], Takeshi Mandai [b], Mustapha Mechab [a]

[a] *Laboratoire de mathématiques, Université Djilali Liabès, BP 89, 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie*
[b] *Research Center for Physics and Mathematics, Osaka Electro-Communication University, 18-8 Hatsu-cho, Neyagawa-shi, Osaka 572-8530, Japan*

Reçu le 12 novembre 2002 ; accepté le 9 janvier 2003

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

Reprenant la notion d'opérateur de plusieurs variables fuchsiennes de N.S. Madi (Ann. Mat. Pura Appl. (4) 163 (1993) 1–15), on étend dans cette Note, les résultats de K. Igari (J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985) 341–355) pour démontrer l'existence de solutions nulles pour certains opérateurs à plusieurs variables fuchsiennes. ***Pour citer cet article : M. Belarbi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Taking the concept of operator with several Fuchsian variables of N.S. Madi (Ann. Mat. Pura Appl. (4) 163 (1993) 1–15), the results of K. Igari (J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985) 341–355) are extended in this Note to show the existence of null-solutions for some of these operators. ***To cite this article: M. Belarbi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Position du problème et notations

Un exemple d'opérateurs différentiels à singularités régulières le long de l'hypersurface initiale ($t = 0$) est donné par les opérateurs fuchsiens. Les premiers résultats les plus significatifs, relativement aux opérateurs aux dérivées partielles fuchsiens, ont été donnés par Baouendi et Goulaouic dans [1]. Dans leur article, ils montrent l'existence et l'unicité locales d'une solution holomorphe du problème de Cauchy pour certains opérateurs fuchsiens. Si on

Adresses e-mail : mkbelarbi@yahoo.fr (M. Belarbi), mandai@isc.osakac.ac.jp (T. Mandai), mechab@mail.univ-sba.dz (M. Mechab).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00064-5

réduit la régularité des solutions, le résultat de [1] n'est plus valable. Dans [2], Igari a pu construire des solutions-distributions nulles, d'opérateurs fuchsiens, moyennant certaines conditions supplémentaires. L'existence de telles solutions nulles induit la non unicité de la solution du problème de Cauchy dans ces espaces fonctionnels. Dans [4], le deuxième auteur a pu étendre la classe d'opérateurs fuchsiens admettant des solutions-distributions nulles.

À partir de [1], Madi a introduit dans [3] la notion d'opérateurs à plusieurs variables fuchsiennes et établit les mêmes types de résultats pour le problème de Goursat correspondant.

Dans cette Note on a repris la notion d'opérateurs à plusieures variables fuchsiennes pour lesquels on a établi l'existence de solutions-distributions nulles en imposant des conditions équivalentes à celles de [2].

2. Notations et résultat principal

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, le point générique de $\mathbb{C}^p$ est noté $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et, si x et y sont deux points de $\mathbb{C}^p$, on note $x \cdot y = \sum_i x_i \overline{y_i}$, $|x| := \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ et $\langle x \rangle = \sum_i x_i$. La partie réelle de $x_i \in \mathbb{C}$ est notée $\Re\mathrm{e}\, x_i$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ est un multi-indice, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$, la longueur de α, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_1}$ et $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_p}^{\alpha_p}$, où $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$ est la dérivée par rapport à x_i. Si α et β sont deux multi-indices, on dit que α est inférieur (strictement) à β si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour tout i et $\alpha \neq \beta$.

Pour un ensemble non vide $\Omega \subset \mathbb{C}^q$, l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de Ω est noté $\mathcal{O}(\Omega)$. On conviendra d'écrire $f = \mathrm{O}(x^\gamma)$ s'il existe une fonction holomorphe $\tilde{f}$ telle que $f(x, y) = x^\gamma \tilde{f}(x, y)$ ou si $f(x)/x^\gamma$ est bornée quand x est voisin de 0.

Si $\mathcal{V}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, l'ensemble des fonctions infiniment différentiables sur $\mathcal{V}$ à support compact est noté $\mathcal{D}(\mathcal{V}) = C_0^\infty(\mathcal{V})$ et on note $\mathcal{D}'(\mathcal{V}; \mathcal{O}(\Omega))$ l'ensemble des distributions à valeurs dans $\mathcal{O}(\Omega)$. La valeur de $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{V}; \mathcal{O}(\Omega))$ en $g \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ est notée :

$$\langle f, g \rangle = \big\langle f(x, y), g(x) \big\rangle_x \quad \text{ou} \int\limits_{\mathcal{V}} f(x, y) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ désigne l'espace des fonctions de Schwartz (C^∞ à décroissance rapide) et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p; \mathcal{O}(\Omega))$ l'espace des distributions tempérées à valeurs dans $\mathcal{O}(\Omega)$. On pose aussi :

$$\mathcal{D}'_+\big(\mathcal{V}; \mathcal{O}(\Omega)\big) = \big\{ f \in \mathcal{D}'\big(\mathcal{V}; \mathcal{O}(\Omega)\big);\ \operatorname{supp}_x f \subset (\mathbb{R}_+)^p \big\},$$

où $\operatorname{supp}_x f$ est le support de f par rapport à $x \in \mathcal{V}$. De la même manière, on définit $C_+^N(\mathcal{V}; \mathcal{O}(\Omega))$ et $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^p; \mathcal{O}(\Omega))$. Enfin, on note $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ et $\mathcal{V}_+ = \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}_+)^p$.

On considère l'opérateur aux dérivées partielles :

$$\mathcal{P} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant m} a_{\alpha,\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta, \tag{1}$$

où $(x, y) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ et $a_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine $(0, 0) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$.

On appelle poids du monôme $a_{\alpha,\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta$ par rapport à x, le plus petit $\tau \in \mathbf{Z}^p$ tel que $a_{\alpha,\beta} = \mathrm{O}(x^{\alpha-\tau})$ et $\alpha - \tau \in \mathbb{N}^p$.

Définition 2.1 [3]. On dit que $\mathcal{P}$ est un opérateur fuchsien, de poids $\mu \in \mathbb{N}^p$ par rapport à x, si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(H_1) Le poids de tout monôme $a_{\alpha,\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta$ est inférieur ou égal à μ.
(H_2) Si $\beta \neq 0$, le poids du monôme $a_{\alpha,\beta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta$ est plus petit que μ.
(H_3) Si $\mu_i \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors le poids, par rapport à x_i, de tout monôme $a_{\alpha,\beta} D_x^\alpha D_y^\beta$ est plus petit que μ_i.

Pour $w \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{C}_l(w)$ par : $\mathcal{C}_0(w) = 1$ et $\mathcal{C}_l(w) = \prod_{j=0}^{l-1}(w-j)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^p$ et $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on pose : $\mathcal{C}_\alpha(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{C}_{\alpha_i}(\lambda_i)$.

Définition 2.2 [3]. Soit $\mathcal{P}$ un opérateur fuchsien. D'après l'hypthèse (H_1) il existe des fonctions holomorphes $\tilde{a}_{\alpha,0}$ telles que $a_{\alpha,0}(x,y) = x^{\alpha-\mu}\tilde{a}_{\alpha,0}(x,y)$. On appelle polynôme caractéristique fuchsien de $\mathcal{P}$, le polynôme en λ défini par : $\widetilde{\mathcal{Q}}(y,\lambda) = \sum_{\alpha \geqslant \mu} \tilde{a}_{\alpha,0}(0,y)\mathcal{C}_{\alpha-\mu}(\lambda)$.

Définition 2.3. On dit qu'un opérateur de Fuchs $\mathcal{P}$ vérifie la condition (A_0), s'il existe un domaine Ω contenant $y=0$ dans $\mathbb{C}^q$, une fonction $\lambda_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ et une constante $C>0$ telles que

$$\widetilde{\mathcal{Q}}\big(y;\lambda_0(y)\big) \equiv 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

$$\big|\widetilde{\mathcal{Q}}\big(0;\lambda_0(0)+k\big)\big| \geqslant C\big(1+|k|\big)^{m-|\mu|} \quad \text{pour tout } k \in \big(\mathbb{N}^p\big)^*. \tag{3}$$

On note : $\lambda^0 = \lambda_0(0)$.

Définition 2.4. On dira qu'une distribution u dans un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est une solution nulle de l'opérateur $\mathcal{P}$ en $(0,0)$ si $\mathcal{P}u = 0$ dans un voisinage de $(0,0)$ et $(0,0) \in \operatorname{supp} u \subset (\overline{\mathbb{R}_+})^p \times \mathbb{R}^q$.

Dans ce qui suit, on va énoncer le résultat principal de cette Note.

Théorème 2.5. *Etant donné un opérateur aux dérivées partielles fuchsien $\mathcal{P}$ de poids* 0 *par rapport à x, satisfaisant la condition* (A_0), *alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $0 \in \mathbb{R}^p$, un domaine Ω contenant $0 \in \mathbb{C}^q$ et une solution nulle u de $\mathcal{P}$ telle que $u \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{V};\mathcal{O}(\Omega)) \cap C^\infty(\mathcal{V}_+;\mathcal{O}(\Omega))$.*

3. Ébauche de la démonstration

On commence par introduire la distribution $\mathcal{G}$ qui est l'un des outils essentiels pour la construction de notre solution nulle.

Définition 3.1. Pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}\, w > -1$, on pose :

$$G(w;t) = \frac{t_+^w}{\Gamma(w+1)}, \quad \text{avec} \quad t_+ = \begin{cases} t & (t>0),\\ 0 & (t \geqslant 0),\end{cases}$$

où $\Gamma(w)$ est la fonction Gamma d'Euler. Pour l'ordre supérieur $(p>1)$, on définit :

$$\mathcal{G}(z;x) = \bigotimes_{i=1}^{p} G(z_i;x_i).$$

Les propriétés fondamentales de cette distribution sont regroupées dans le lemme ci-dessous.

Lemme 3.2.

(1) $\mathcal{G}(z;x) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^p;\mathcal{O}(\mathbb{C}^p)) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^p;\mathcal{O}(\mathbb{C}^p))$.
(2) *Pour $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on a $D_x^\alpha\mathcal{G}(z;x) = \mathcal{G}(z-\alpha;x)$ et $x^\alpha\mathcal{G}(z;x) = \mathcal{C}_\alpha(z+\alpha)\mathcal{G}(z+\alpha;x)$.*
(3) *Soit $F(\lambda)$ un polynôme en λ, alors $F(xD_x)\mathcal{G}(z;x) = F(z)\mathcal{G}(z;x)$.*
(4) *Pour tout $\eta \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, on a $\langle \mathcal{G}(z;x), \exp(-\sum_{i=1}^{p} x_i/\eta_i)\rangle_x = \eta^{z+\mathbb{1}}$, où $\mathbb{1} = (1,\dots,1)$.*

3.1. Construction de la solution

On cherche la solution sous la forme : $u(x,y)=\int_\Gamma \mathcal{G}(\xi;x)v(x,y;\xi)\,\mathrm{d}\xi$ où $\Gamma=\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_p$, les Γ_i sont des courbes fermées simples convenables dans $\mathbb{C}$ et v une solution holomorphe dans un voisinage de $\{(0,0)\}\times\Gamma$ de l'équation :

$$p(x,y;xD_x+\xi,D_y)v(x,y;\xi)=\frac{\widetilde{Q}(y;\xi)}{(\xi_1-\lambda_{0,1}(y))\cdots(\xi_p-\lambda_{0,p}(y))},\tag{4}$$

où on a noté $\mathcal{P}=p(x,y;xD_x,D_y)$, car $\mathcal{P}$ est de poids nul. L'existence de cette solution est assurée par la condition (A_0) et le résultat principal de [3]. En utilisant (4) dans l'expression de u et la première partie de la condition (A_0), on obtient :

$$\mathcal{P}u(x,y)=\int_\Gamma \frac{\mathcal{G}(\xi;x)\widetilde{Q}(y;\xi)}{(\xi_1-\lambda_{0,1}(y))\cdots(\xi_p-\lambda_{0,p}(y))}\,\mathrm{d}\xi=(2\pi\mathrm{i})^p\mathcal{G}\big(\lambda_0(y);x\big)\widetilde{Q}\big(y;\lambda_0(y)\big)=0$$

et utilisant certaines propriétés de $\mathcal{G}$, on montre que $u\in\mathcal{D}'_+(\mathcal{V};\mathcal{O}(\Omega))\cap C^\infty(\mathcal{V}_+;\mathcal{O}(\Omega))$ est une solution de l'équation $\mathcal{P}u=0$, où $\mathcal{V}$ est la projection sur $\mathbb{R}^p$ d'un domaine $\omega\subset\mathbb{C}^p$ contenant l'origine.

3.2. Support de la solution

On montre que $(0,0)\in\operatorname{supp}u$. Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on peut écrire les développements suivants :

$$v(x,0;\xi)=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p,\ |\gamma|\leqslant N} v_\gamma(\xi)x^\gamma+\tilde{v}_{N+1}(x,\xi),$$

et

$$u(x,0)=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p,\ |\gamma|\leqslant N} u_\gamma(x)x^\gamma+\tilde{u}_{N+1}(x),$$

où : $u_\gamma(x)=\int_\Gamma\mathcal{G}(\xi;x)v_\gamma(\xi)\,\mathrm{d}\xi$; $|\gamma|\leqslant N$ et $\tilde{u}_{N+1}(x)=\int_\Gamma\mathcal{G}(\xi;x)\tilde{v}_{N+1}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

Posons $r_i=\min\{\Re\mathrm{e}\,\xi_i;\ \xi_i\in\Gamma_i\}$ et prenons $\eta_i\in\mathbb{N}$ tel que $\eta_i\geqslant\max\{-r_i,0\}$.

Lemme 3.3. *Soit $\mathcal{X}\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{V})$, on a :*

$$\big\langle\mathcal{X}(x)\tilde{u}_{N+1}(x),\mathrm{e}^{-\langle x\rangle/\varepsilon}\big\rangle_x=\mathrm{O}\big(\varepsilon^{N+1-|\eta|+p}\big)\quad\textit{quand } \varepsilon\to+\infty.$$

En choisissant le diamètre de Γ_i inférieur à $1/p$ et $(\langle r\rangle+1)>\Re\mathrm{e}(\langle\lambda^0\rangle)$; si $N+1>|\eta|+\max\{\langle\Re\mathrm{e}\,\lambda^0\rangle,0\}$ on a :

$$\begin{aligned}\big\langle\mathcal{X}(x)u(x,0),\mathrm{e}^{-\langle x\rangle/\varepsilon}\big\rangle_x&=\sum_{|\gamma|\leqslant N}\big\langle u_\gamma(x)x^\gamma,\mathrm{e}^{-\langle x\rangle/\varepsilon}\big\rangle_x+\Big\langle\big(\mathcal{X}(x)-1\big)\sum_{|\gamma|\leqslant N}u_\gamma(x)x^\gamma,\mathrm{e}^{-\langle x\rangle/\varepsilon}\Big\rangle_x\\&\quad+\big\langle\mathcal{X}(x)\tilde{u}_{N+1}(x),\mathrm{e}^{-\langle x\rangle/\varepsilon}\big\rangle_x=(2\pi\mathrm{i})^p\varepsilon^{\langle\lambda^0\rangle+p}+\mathrm{o}\big(\varepsilon^{\langle\lambda^0\rangle+p}\big)\neq0,\end{aligned}$$

ce qui montre que $0\in\operatorname{supp}u(\cdot,0)$.

Références

[1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973) 455–475.
[2] K. Igari, Non unicité dans le problème de Cauchy caractéristique – cas de type de Fuchs, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985) 341–355.
[3] N.S. Madi, Solutions locales pour des opérateurs holomorphes fuchsiens en plusieurs variables, Ann. Math. Pura Appl. (4) 163 (1993) 1–15.
[4] T. Mandai, Existence of distribution null-solutions for every Fuchsian partial differential operator, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 5 (1998) 1–18.