Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 365–370
Comptes Rendus Mathematique

Problèmes mathématiques de la mécanique

Lemme du mouvement rigide infinitésimal en coordonnées lipschitziennes et application aux coques de régularité minimale

The infinitesimal rigid displacement lemma in Lipschitz coordinates and application to shells with minimal regularity

Sylvia Anicic [a], Hervé Le Dret [b], Annie Raoult [c,d]

[a] *MOX, Dipartimento di Matematica F. Brioschi, Politecnico di Milano, Piazza L. da Vinci 32, 20133 Milano, Italie*
[b] *Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris cedex 05, France*
[c] *Laboratoire TIMC/IMAG, Domaine de la Merci, 38706 La Tronche cedex, France*
[d] *Laboratoire de modélisation et calcul/IMAG, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France*

Reçu le 7 janvier 2003 ; accepté le 14 janvier 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous établissons une version du lemme du déplacement rigide infinitésimal en coordonnées curvilignes lipschitziennes et en donnons une application aux modèles de coques linéairement élastiques dont la surface moyenne est lipschitzienne et le vecteur normal est également lipschitzien. ***Pour citer cet article : S. Anicic et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We establish a version of the infinitesimal rigid displacement lemma in curvilinear Lipschitz coordinates. We give an application to linearly elastic shells whose midsurface and normal vector are both Lipschitz. ***To cite this article: S. Anicic et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

The infinitesimal rigid displacement lemma in Lipschitz coordinates

Let Ω be a bounded connected open subset of $\mathbb{R}^n$ and $\Psi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ be such that $\det \nabla\Psi \geqslant \gamma > 0$ almost everywhere. Let $\mathbb{A}_n$ be the set of $n \times n$ skew-symmetric matrices.

Adresses e-mail : sylvia.anicic@mate.polimi.it (S. Anicic), ledret@ccr.jussieu.fr (H. Le Dret), annie.raoult@imag.fr (A. Raoult).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00058-X

Theorem 0.1. *Let $U \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ satisfy*

$$\nabla U^{\mathrm{T}}\nabla\Psi + \nabla\Psi^{\mathrm{T}}\nabla U = 0 \quad \textit{almost everywhere in } \Omega.$$

There exist a dense open subset O of Ω and locally constant mappings a and W from O into $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{A}_n$ respectively such that $U(x) = a(x) + W(x)\Psi(x)$ in O.

This is a generalization of the well-known result that a distribution whose gradient is skew-symmetric is an affine function. It follows from an almost everywhere inverse function theorem for Sobolev mappings [11].

Corollary 0.2. *Under the previous hypotheses, if Ψ is locally bilipschitz, then $O = \Omega$ and the mappings a and W are constant.*

Shells of minimal regularity: Geometrical aspects

We generalize here successive attempts at lowering the required regularity for the midsurface of a shell, starting from C^3 in [3] down to $W^{2,\infty}$ in [4,5] and [6] and piecewise $W^{2,\infty}$ in [2].

Let ω be a bounded open connected Lipschitz subset of $\mathbb{R}^2$ and $\varphi: \overline{\omega} \to \mathbb{R}^3$ a bilipschitz chart for the midsurface of the shell. It can be shown that the normal vector $a_3(x) = \partial_1\varphi \wedge \partial_2\varphi / \|\partial_1\varphi \wedge \partial_2\varphi\|$ exists almost everywhere and we make an additional regularity hypothesis:

$$a_3 \in W^{1,\infty}\big(\omega;\mathbb{R}^3\big). \tag{1}$$

A significant difficulty of our work consists in showing that the mapping that classically defines a tubular neighborhood of the midsurface when φ is C^3,

$$\Phi(x,z) = \varphi(x) + z a_3(x), \tag{2}$$

is locally, and then globally, injective on $\omega \times \left]-h,h\right[$ for $h > 0$ small enough, even under our weak regularity hypotheses. In the course of the proof, we are led to show a result that can be construed as a kind of geometric regularity for the midsurface.

Lemma 0.3. *For all $x \in \overline{\omega}$, we have*

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{\|y - x\|} \cdot a_3(x) \to 0 \quad \textit{when } y \to x. \tag{3}$$

This result states that the contingent cone to the surface always remains orthogonal to the normal vector. To prove it, we use a mean value theorem for Lipschitz functions of Clarke [8] that makes use of generalized gradients.

Shells of minimal regularity: The infinitesimal rigid displacement lemma

Let $a_\alpha = \partial_\alpha\varphi$ and a^α be the covariant and contravariant basis vectors. The function space for Koiter's model introduced in [5] and generalized in [2] is

$$V = \big\{u \in H^1\big(\omega;\mathbb{R}^3\big),\ \theta(u) \in H^1\big(\omega;\mathbb{R}^3\big)\big\}, \quad \text{where } \theta(u) = (\partial_\alpha u \cdot a_3)a^\alpha,$$

with its natural Hilbert norm $\|u\|_V = (\|u\|_{H^1}^2 + \|\theta(u)\|_{H^1}^2)^{1/2}$. The change of metric and change of curvature tensors then read $\gamma_{\alpha\beta}(u) = (\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha)/2$ and $\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = (\partial_\alpha \theta(u) \cdot a_\beta + \partial_\beta \theta(u) \cdot a_\alpha - \partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 - \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3)/2$.

Theorem 0.4. *Let φ be a chart as above and $u \in V$ be such that $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) = 0$. Then there exist two vectors a and b of $\mathbb{R}^3$ such that*

$$u(x) = a + b \wedge \varphi(x).$$

The idea is to use the Kirchhoff–Love displacement associated with u

$$U(x,z) = u(x) - z\theta(u)(x),$$

on $\Omega = \omega \times]-h,h[$, with h such that Φ is locally injective. It is readily checked that $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) = 0$ is equivalent to $\nabla U^{\mathrm{T}} \nabla \Phi + \nabla \Phi^{\mathrm{T}} \nabla U = 0$, and we conclude by Corollary 0.2.

1. Le lemme du mouvement rigide infinitésimal en coordonnées lipschitziennes

Le lemme du mouvement rigide infinitésimal en coordonnées cartésiennes affirme qu'une distribution sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont le gradient est antisymétrique est en fait une fonction affine de la forme $x \mapsto a + Wx$ où W est une matrice $n \times n$ antisymétrique et a un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Nous nous proposons d'établir un résultat analogue en coordonnées curvilignes peu régulières, à savoir ici lipschitziennes. On note $\mathbb{A}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ antisymétriques.

Théorème 1.1. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ et $\Psi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ telle que* $\det \nabla \Psi \geqslant \gamma > 0$ *presque partout et soit $U \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ vérifiant*

$$\nabla U^{\mathrm{T}} \nabla \Psi + \nabla \Psi^{\mathrm{T}} \nabla U = 0 \quad \textit{presque partout dans } \Omega.$$

Alors, il existe un ouvert dense O de Ω et des applications a de O dans $\mathbb{R}^n$ et W de O dans $\mathbb{A}_n$, constantes sur les composantes connexes de O, telles que $U(x) = a(x) + W(x)\Psi(x)$ dans O.

Ce résultat découle d'un théorème d'inversion locale presque partout de Fonseca et Gangbo [11] pour des applications appartenant à l'espace de Sobolev $W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, que l'on applique ici à Ψ, et du lemme du mouvement rigide classique appliqué à la composée de U par les inverses locaux de Ψ.

Si l'on relaxe l'hypothèse de positivité du Jacobien en $\det \nabla \Psi > 0$ presque partout, on peut construire des exemples où l'ouvert O a plusieurs composantes connexes et où les fonctions a et W prennent plusieurs valeurs. Néanmoins, le corollaire suivant se déduit de la preuve du Théorème 1.1.

Corollaire 1.2. *Sous les hypothèses précédentes, si Ψ est de plus partout localement bilipschitzienne, alors $O = \Omega$ et les fonctions a et W sont constantes.*

Dans le cas $\Psi = \mathrm{id}$, on retrouve le lemme du mouvement rigide classique, pour une application U de classe H^1.

2. Coques de régularité minimale : aspects géométriques

Le modèle de coques minces de Koiter et ses variantes sont classiquement traités en supposant que la surface moyenne de la coque considérée est de classe C^3, voir [3]. Une généralisation aux coques de surface moyenne

$W^{2,\infty}$ a été d'abord proposée dans [4] et [5], voir aussi [6], ainsi que [9] pour une approche différente dans le même cadre de régularité. Une dernière généralisation a enfin été proposée dans [2], mais seulement étudiée en termes d'existence et d'unicité dans le cas particulier des surfaces $W^{2,\infty}$ par morceaux. C'est essentiellement dans le cadre général de [2] que nous nous plaçons ici.

On considère donc un ouvert borné lipschitzien connexe ω de $\mathbb{R}^2$ et une carte $\varphi:\overline{\omega}\to\mathbb{R}^3$ de la surface moyenne de la coque que nous supposons bilipschitzienne, c'est-à-dire telle qu'il existe $0<\alpha\leqslant\beta$ tels que

$$\forall x, y \in \overline{\omega}, \quad \alpha\|y-x\| \leqslant \big\|\varphi(y)-\varphi(x)\big\| \leqslant \beta\|y-x\|. \tag{4}$$

Par le théorème de Rademacher, φ est différentiable presque partout et l'on montre que

Lemme 2.1. *Presque partout dans ω, on a*

$$\|\partial_1\varphi\wedge\partial_2\varphi\| \geqslant \alpha^2.$$

Ceci permet donc de définir presque partout le vecteur normal unitaire $a_3(x)=\partial_1\varphi\wedge\partial_2\varphi/\|\partial_1\varphi\wedge\partial_2\varphi\|$. On fait alors l'hypothèse de régularité supplémentaire

$$a_3 \in W^{1,\infty}\big(\omega;\mathbb{R}^3\big). \tag{5}$$

Il convient de noter que c'est le vecteur normal *unitaire* que nous supposons lipschitzien et non pas le vecteur $\partial_1\varphi\wedge\partial_2\varphi$ lequel est a priori seulement dans $L^\infty(\omega;\mathbb{R}^3)$.

Soit $h>0$ et définissons une application $\Phi:\overline{\omega}\times[-h,h]\to\mathbb{R}^3$ par

$$\Phi(x,z)=\varphi(x)+za_3(x). \tag{6}$$

Sous les hypothèses de régularité classiques, il est bien connu que l'application Φ définit un voisinage tubulaire de la surface moyenne $S=\varphi(\omega)$ pour h assez petit. Sous les seules hypothèses (4), (5), c'est un point délicat. La démonstration se déroule en plusieurs étapes.

Lemme 2.2. *Il existe $h>0$ tel que pour tout $|z|\leqslant h$, l'application $\Phi(\cdot,z)$ est bilipschitzienne sur $\overline{\omega}$.*

En effet, il suffit de prendre $h\leqslant\alpha/(2M)$ où $M=\|\nabla a_3\|_{L^\infty}$ est la constante de Lipschitz de a_3. Pour ce choix de h, on obtient alors

Lemme 2.3. *L'application Φ est localement bilipschitzienne sur $\overline{\omega}\times[-h,h]$.*

Pour établir le Lemme 2.3, on est amené à montrer la propriété suivante de régularité de la surface S :

Lemme 2.4. *Pour tout $x\in\overline{\omega}$, on a*

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{\|y-x\|}\cdot a_3(x)\to 0 \quad \textit{quand } y\to x. \tag{7}$$

Cette propriété, qui exprime que le cône contingent de Bouligand à la surface S est toujours inclus dans l'orthogonal du vecteur normal, découle elle-même d'un théorème des accroissements finis pour des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ de Clarke [8], selon lequel

$$\varphi(y)-\varphi(x)\in \operatorname{co}\partial\varphi\big([y,x]\big)(y-x),$$

où $\partial\varphi$ désigne le gradient généralisé de Clarke de φ et $\partial\varphi([y,x])$ désigne l'ensemble des matrices J appartenant à $\partial\varphi(s)$ pour un s appartenant au segment $[y,x]$.

Une fois obtenue l'injectivité locale de l'application Φ, on obtient facilement la propriété de voisinage tubulaire global en suivant le raisonnement de [10].

Lemme 2.5. *Il existe* $0 < h' < h$ *tel que l'application* Φ *est injective sur* $\overline{\omega} \times [-h', h']$.

Cette propriété est importante pour assurer que le cadre de régularité (4), (5) permet une modélisation géométrique et mécanique correcte de la coque d'épaisseur $2h'$.

3. Coques de régularité minimale : le lemme du mouvement rigide infinitésimal

Au cœur des preuves d'existence et d'unicité pour les modèles de coques se trouve souvent un lemme du mouvement rigide infinitésimal pour la surface moyenne. C'est une propriété utile pour montrer l'ellipticité de la forme bilinéaire de la formulation variationnelle du problème.

Notons $a_\alpha = \partial_\alpha \varphi$ les vecteurs de la base covariante et a^α ceux de la base contravariante. Notons que ces vecteurs sont a priori seulement dans $L^\infty(\omega; \mathbb{R}^3)$. Le cadre fonctionnel pour le modèle de Koiter proposé dans [2] pour les surfaces de la régularité considérée dans cette Note, qui généralise celui initialement introduit dans [4,5], consiste à considérer l'espace

$$V = \left\{u \in H^1\left(\omega; \mathbb{R}^3\right),\ \theta(u) \in H^1\left(\omega; \mathbb{R}^3\right)\right\}, \quad \text{où } \theta(u) = (\partial_\alpha u \cdot a_3) a^\alpha,$$

muni de sa norme naturelle $\|u\|_V = (\|u\|_{H^1}^2 + \|\theta(u)\|_{H^1}^2)^{1/2}$ qui en fait un espace de Hilbert. Dans ce cadre fonctionnel, les composantes covariantes du tenseur de changement de métrique sont données par $\gamma_{\alpha\beta}(u) = (\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha)/2$ et celles du tenseur changement de courbure par $\Upsilon_{\alpha\beta}(u) = (\partial_\alpha \theta(u) \cdot a_\beta + \partial_\beta \theta(u) \cdot a_\alpha - \partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 - \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3)/2$.

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'établir le lemme du mouvement rigide infinitésimal pour la surface S.

Théorème 3.1. *Soit* φ *une carte vérifiant les hypothèses de régularité* (4), (5) *et soit* $u \in V$ *un déplacement tel que* $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) = 0$. *Alors il existe deux vecteurs* a *et* b *de* $\mathbb{R}^3$ *tels que*

$$u(x) = a + b \wedge \varphi(x).$$

L'idée est d'introduire le déplacement de Kirchhoff–Love associé à u

$$U(x, z) = u(x) - z\theta(u)(x),$$

défini sur $\Omega = \omega \times]-h, h[$, avec h donné par le Lemme 2.2. On vérifie que $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) = 0$ est équivalent à $\nabla U^{\mathrm{T}} \nabla \Phi + \nabla \Phi^{\mathrm{T}} \nabla U = 0$. Par le Corollaire 1.2 et le Lemme 2.3, on obtient que $U(x) = a + b \wedge \Phi(x)$. Il suffit alors de se placer en $z = 0$.

Une fois le lemme du mouvement rigide infinitésimal établi, on procède comme dans [5,6] pour montrer l'ellipticité du modèle de Koiter, donc l'existence et l'unicité de la solution de ce modèle.

Le lemme du mouvement rigide infinitésimal 3.1 implique également que tout déplacement u tel que $\gamma_{\alpha\beta}(u) = \chi_{\alpha\beta}(u) = 0$, où χ est le nouveau tenseur de changement de courbure introduit dans [2], est aussi un déplacement rigide. En effet, $\chi_{\alpha\beta}(u) = \Upsilon_{\alpha\beta}(u) - b_\alpha^\sigma \gamma_{\sigma\beta}(u) - b_\beta^\sigma \gamma_{\sigma\alpha}(u)$ où b_α^σ désigne les composantes mixtes de la seconde forme fondamentale de la surface.

L'idée d'introduire le déplacement tridimensionnel de Kirchhoff–Love associé au déplacement u de la coque afin d'utiliser des résultats tridimensionnels connus n'est pas nouvelle. Elle a notamment été utilisée dans [1] pour établir l'ellipticité du modèle de Koiter dans le cadre de régularité C^3 et dans [7] pour établir des inégalités de Korn sur la surface également dans le cas C^3.

Références

[1] J.-L. Akian, Analyse asymptotique de jonctions de coques en flexion, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2000.

[2] S. Anicic, Du modèle de Kirchhoff–Love exact à un modèle de coque mince et à un modèle de coque pliée, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2001.

[3] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter, in: R. Glowinski, J.-L. Lions (Eds.), Computing Methods in Sciences and Engineering, in: Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 134, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 89–136.

[4] A. Blouza, H. Le Dret, Sur le lemme du mouvement rigide, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 319 (1994) 1015–1020.

[5] A. Blouza, H. Le Dret, Existence et unicité pour le modèle de Koiter pour une coque peu régulière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 319 (1994) 1127–1132.

[6] A. Blouza, H. Le Dret, Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity, Quart. Appl. Math. LVII (1999) 317–337.

[7] P.G. Ciarlet, S. Mardare, Sur les inégalités de Korn en coordonnées curvilignes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 337–343.

[8] F.H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, 2nd edition, in: Classics in Appl. Math., Vol. 5, SIAM, 1990.

[9] M.C. Delfour, Intrinsic differential geometric methods in the asymptotic analysis of linear thin shells, in: Boundaries, Interfaces, and Transitions (Banff, AB, 1995), in: CRM Proc. Lecture Notes, Vol. 13, American Mathematical Society, Providence, 1998, pp. 19–90.

[10] M.P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[11] I. Fonseca, W. Gangbo, Degree Theory in Analysis and Applications, in: Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 2, Oxford University Press, 1995.