



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 641–646



Topologie

Étude d'une forme volume naturelle sur l'espace de représentations du groupe d'un nœud dans $SU(2)$

A volume form on the $SU(2)$ -representation space of knot groups

Jérôme Dubois

Université Blaise Pascal, 24, avenue des Landais, 63177 Aubière cedex, France

Reçu et accepté le 16 janvier 2003

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Pour un nœud K dans S^3 on construit «à la Casson» – et plus précisément en s'inspirant des travaux ultérieurs de Lin (cf. *J. Differential Geom.* 35 (1992) 337–357) et Heusener (cf. *Topology Appl.* 127 (2003) 175–197) – une 1-forme volume sur l'espace des représentations du groupe de K dans $SU(2)$. On montre ensuite comment interpréter cette forme volume comme une torsion de Reidemeister. On termine en donnant le calcul explicite de cette forme volume pour les nœuds toriques. **Pour citer cet article :** *J. Dubois, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

For a knot K in S^3 , we construct in the line of Casson – or more precisely taking into account Lin's (*J. Differential Geom.* 35 (1992) 337–357) and Heusener's (*Topology Appl.* 127 (2003) 175–197) further works – a 1-volume form on the $SU(2)$ -representation space of the group of K and we show how to interpret this volume form as a Reidemeister torsion. In the last part of this Note, we give an explicit computation of this volume form for torus knots. **To cite this article :** *J. Dubois, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Abridged English version

Let K be a knot in S^3 represented as a $2n$ -plat $\hat{\xi}$. Set $M = S^3 \setminus V(K)$ the exterior of K , where $V(K)$ is an open tubular neighbourhood of the knot, and $G_K = \pi_1 M$ the knot group of K . Such a presentation of K as a plat gives rise to a splitting of its exterior of the form $M = B_1 \cup_S B_2$ where B_i , $i = 1, 2$, is a handlebody of genus n and $S = B_1 \cap B_2$ is a $2n$ -punctured 2-sphere (see Fig. 1). This decomposition is similar to the Heegaard splitting used in the construction of the Casson invariant and it gives rise to special systems of generators for $\pi_1 B_i$, $i = 1, 2$, and for $\pi_1 S$ respectively denoted by \mathcal{T}_i and \mathcal{S} (see Section 1 and Fig. 1).

Adresse e-mail : jerome.dubois@math.univ-bpclermont.fr (J. Dubois).

For a finitely generated group G , the $SU(2)$ -representation space of G , with the compact open topology, is denoted by $R(G)$; $\tilde{R}(G)$ (resp. $C(G)$) is the subspace of irreducible ones (resp. central ones). The compact Lie group $SO(3) = SU(2)/\{\pm 1\}$ acts on $R(G)$ by conjugation and we set $\widehat{R}(G) = \tilde{R}(G)/SO(3)$; moreover $SO(3)$ acts freely (and also properly) on $\tilde{R}(G)$ so we can regard $\widehat{R}(G)$ as the base space of a principal $SO(3)$ -bundle with total space $\tilde{R}(G)$. Let \mathcal{G} be a finite set of generators for the group G , we define the subset $R^{\mathcal{G}}(G) \subset R(G) \setminus C(G)$ by setting $R^{\mathcal{G}}(G) = \{\rho \in R(G) \setminus C(G) \mid \text{Tr } \rho(s) = \text{Tr } \rho(t) \forall s, t \in \mathcal{G}\}$ and we consider the quotient $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G) = \tilde{R}^{\mathcal{G}}(G)/SO(3)$, where $\tilde{R}^{\mathcal{G}}(G) = R^{\mathcal{G}}(G) \cap \tilde{R}(G)$. We can see that $\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ is a $(2n - 2)$ -manifold and $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ is a $(4n - 5)$ -manifold. We also notice that $\tilde{R}^{\mathcal{G}}(G)$ is the total space of a principal $SO(3)$ -bundle with base space $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$. Among irreducible representations we distinguish the *regular* ones. An irreducible representation $\rho: G_K \rightarrow SU(2)$ is called *regular* when $H^1_\rho(M) \cong \mathbb{R}$, in which $H^1_\rho(M) = H^1(M; Ad\rho)$ is the first twisted cohomology group of M with coefficients in the representation $Ad \circ \rho: G_K \rightarrow SU(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{su}(2)) - Ad$ being the adjoint representation.

It is shown in Section 1 that $\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ and $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ carry natural volume forms. If $\rho: G_K \rightarrow SU(2)$ is regular then the sequence: $0 \rightarrow T_{[\rho]} \widehat{R}(M) \rightarrow T_{[\rho_1]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \times T_{[\rho_2]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \rightarrow T_{[\rho_S]} \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S) \rightarrow 0$ is exact, thus $T_{[\rho]} \widehat{R}(M)$ inherits a 1-volume form $\omega_{[\rho]}^{\zeta}$. We prove that this volume form does not depend on the braid ζ and is an invariant of the knot (see Theorem 1.1). So $\mathcal{R}eg(K)$ carries a well-defined 1-volume form denoted by ω^K . Moreover, ω^K changes its sign if we replace K by its mirror image (see Remark 1).

The cocomplex $C^*(M; Ad\rho) = \text{Hom}_{G_K}(C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2))$ where \tilde{M} is the universal covering of M can be identified with the following: $0 \rightarrow \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)^{2n} \rightarrow \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \rightarrow 0$, where the coboundary operators are induced by the usual ones of $C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z})$ and where $\mathfrak{su}(2)^k$ carries the product volume form. This complex is not acyclic and to define a Reidemeister torsion form on $H^1_\rho(M)$ we must exhibit a distinguished basis for $H^2_\rho(M)$.

If $\rho: G_K \rightarrow SU(2)$ is regular, then $H^2_\rho(M) \cong \mathbb{R}$ and we construct a distinguished generator $h_\rho^{(2)}$ for $H^2_\rho(M)$ using the fact that $H^2_\rho(M) \cong H^2(\partial M; \mathbb{R}) \cong H^2(\partial M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ (see Section 2). We identify $T_{[\rho]} \widehat{R}(M)$ and $H^1_\rho(M)$ by an isomorphism denoted by $\varphi_{[\rho]}$ and we define the torsion density $\tau_\rho^K: T_{[\rho]} \widehat{R}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+$ by setting $\tau_\rho^K(v) = |\text{tor}(M; Ad\rho, \{\varphi_{[\rho]}(v), h_\rho^{(2)}\})|$. We establish in Theorem 2.1 that τ^K is the density associated to ω^K .

Finally in Section 3, we give an explicit formula for the volume form ω^K where K is a torus knot of type $(2, q)$ (see Theorem 3.1). Using surgery techniques, we find again the Reidemeister torsion of the Brieskorn spheres in the adjoint representation associated to an acyclic $SU(2)$ -representation (see [2] and Theorem 3.2).

1. Forme volume associée à un nœud

Commençons par le rappel d'algèbre linéaire suivant (cf. [5]). Une *forme volume* v sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie n est un générateur de la n ième puissance extérieure $\bigwedge^n E^*$, où $E^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$. Considérons la suite exacte de \mathbb{R} -espaces vectoriels: $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \rightarrow 0$. Soient v', v et v'' des formes volume sur E', E et E'' respectivement et notons s une section de j , de sorte que $i \oplus s: E' \oplus E'' \rightarrow E$ est un isomorphisme. On dit que les trois formes volume précédentes sont *compatibles* lorsque $v' \wedge v'' = (i \oplus s)^*(v)$ et on montre que cette notion est indépendante de la section choisie. Si c'est le cas, on écrit $v' = v/v''$ pour indiquer la dépendance de v' en v et v'' . Ainsi, lorsque deux des trois espaces vectoriels E', E et E'' sont munis de formes volume, le troisième en possède une unique qui est compatible avec les deux autres.

Soit K un nœud dans S^3 présenté sous la forme d'un $2n$ -plat $\hat{\zeta}$, où ζ appartient à l'ensemble B_{2n} des tresses à $2n$ brins. On note $M = S^3 \setminus V(K)$ l'extérieur du nœud, $-V(K)$ désignant un voisinage tubulaire ouvert de K – et $G_K = \pi_1 M$ son groupe. Une telle présentation du nœud K sous forme de plat induit un scindement de son extérieur en $M = B_1 \cup_S B_2$, où B_1, B_2 sont deux corps en anses de genre n et où S désigne la sphère trouée $S^2 \setminus V(K)$. Remarquons que ce scindement de M joue le même rôle que le scindement de Heegaard utilisé dans la construction originale de l'invariant de Casson. De plus, une telle décomposition permet de mettre en évidence des

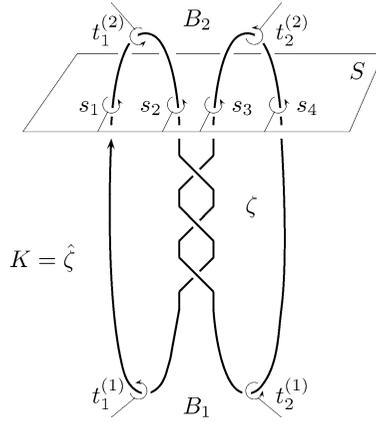


Fig. 1. Systèmes spéciaux de générateurs.
 Fig. 1. Special systems of generators.

systèmes spéciaux de générateurs $\mathcal{T}_i = \{t_j^{(i)}, 1 \leq j \leq n\}$ et $\mathcal{S} = \{s_j, 1 \leq j \leq 2n\}$ pour les groupes fondamentaux de $B_i, i = 1, 2$, et S respectivement (voir Fig. 1).

Si G est un groupe de type fini, on désigne par $R(G)$ l'espace des représentations de G dans $SU(2)$ que l'on munit de la topologie compacte-ouverte; on note $C(G)$ le sous-espace des représentations centrales, i.e. à valeurs dans le centre $\{\pm 1\}$ de $SU(2)$, $\tilde{R}(G)$ le sous-espace des représentations irréductibles et enfin $\hat{R}(G)$ le quotient $\tilde{R}(G)/SO(3)$. Si \mathcal{G} est un système fini de générateurs de G , on note $R^{\mathcal{G}}(G)$ l'ensemble des représentations $\rho \in R(G) \setminus C(G)$ vérifiant : $\text{Tr } \rho(s) = \text{Tr } \rho(t)$, pour tous $s, t \in \mathcal{G}$. On pose $\tilde{R}^{\mathcal{G}}(G) = R^{\mathcal{G}}(G) \cap \tilde{R}(G)$ puis $\hat{R}^{\mathcal{G}}(G) = \tilde{R}^{\mathcal{G}}(G)/SO(3)$ et on utilise les notations $\hat{R}(M)$ pour $\hat{R}(G_K)$, $\hat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ pour $\hat{R}^{\mathcal{T}_i}(\pi_1 B_i)$ et $\hat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ pour $\hat{R}^{\mathcal{S}}(\pi_1 S)$. On peut vérifier que $\hat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ est une variété de dimension $2n - 2$, que $\hat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ est une variété de dimension $4n - 5$ et que $\tilde{R}^{\mathcal{G}}(G)$ est l'espace total d'un $SO(3)$ -fibré principal de base $\hat{R}^{\mathcal{G}}(G)$.

Les inclusions $S \hookrightarrow B_i$ et $B_i \hookrightarrow M, i = 1, 2$, fournissent le diagramme (1) d'homomorphismes surjectifs. Comme de plus, pour tout $j, \kappa_i(s_j)$ est conjugué à un élément de $\mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_i^{-1}$, on a le diagramme (2) d'immersions entre espaces de représentations (pour plus de détails on renvoie à [3], Section 3) :

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1 B_1 & \\
 \kappa_1 \nearrow & & \searrow p_1 \\
 \pi_1 S & & \pi_1 M \\
 \kappa_2 \searrow & & \nearrow p_2 \\
 & \pi_1 B_2 &
 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) & \\
 \hat{\kappa}_1 \searrow & & \nearrow \hat{p}_1 \\
 \hat{R}^{\mathcal{S}}(S) & & \hat{R}(M) = \hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \cap \hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \\
 \hat{\kappa}_2 \searrow & & \nearrow \hat{p}_2 \\
 & \hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) &
 \end{array} \quad (2)$$

Si $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$ est une représentation, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$ possède une structure de $\mathbb{Z}[G_K]$ -module via la composée $Ad \circ \rho : G_K \rightarrow SU(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{su}(2))$, où Ad désigne la représentation adjointe et on note $\rho_i = \rho \circ p_i$ (resp. $\rho_S = \rho \circ p_i \circ \kappa_i$) la restriction de ρ à $\pi_1 B_i$ (resp. $\pi_1 S$).

Parmi les représentations irréductibles, on distingue les représentations régulières. Une représentation irréductible $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$ est dite régulière lorsque $H_\rho^1(M) \cong \mathbb{R}$, où $H_\rho^1(M) = H^1(M; Ad\rho)$ est le premier groupe de cohomologie tordue de M à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$. On démontre que la régularité est une notion invariante par conjugaison et que ρ est régulière si, et seulement si, les images des espaces $\hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)$ et $\hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ se coupent transversalement en $[\rho]$ dans $\hat{R}^{\mathcal{S}}(S)$, $[\rho]$ étant la classe de conjugaison de ρ (cf. [3], Proposition 3.3). On note $\text{Reg}(K)$ l'ensemble des classes de conjugaison des représentations régulières de G_K dans $SU(2)$ et on montre qu'il s'agit d'une variété unidimensionnelle (cf. [3]).

La construction de notre 1-forme volume sur $\text{Reg}(K)$ repose sur les deux points suivants :

- Si ρ est une représentation régulière, on a alors la suite exacte suivante (voir le diagramme (2) et le fait que $\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \pitchfork_{[\rho]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$) :

$$0 \longrightarrow T_{[\rho]} \widehat{R}(M) \xrightarrow{D_{[\rho]} \hat{\rho}} T_{[\rho_1]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \times T_{[\rho_2]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \xrightarrow{D_{[\rho]} \hat{\kappa}} T_{[\rho_S]} \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

- La variété $\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ (resp. $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$) possède une $(2n - 2)$ -forme volume naturelle $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)}$ (resp. une $(4n - 5)$ -forme volume naturelle $v^{\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)}$) (voir ci-dessous pour leur construction détaillée).

Ceci étant, la 1-forme volume $\omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}}$ est définie en posant : $\omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}} = (-1)^n (v_{[\rho_1]}^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)} \wedge v_{[\rho_2]}^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)}) / v_{[\rho_S]}^{\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)}$, où la normalisation donnée par $(-1)^n$ est nécessaire pour garantir l'invariance de $\omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}}$ lorsqu'on change ζ en $\zeta \sigma_{2n}$.

On construit ainsi localement une 1-forme volume $\omega^{\hat{\zeta}} : [\rho] \mapsto \omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}}$ sur la variété $\text{Reg}(\hat{\zeta})$.

Décrivons à présent la construction détaillées des formes volume naturelles que l'on peut définir sur les espaces de représentations $\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)$, $\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ et $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$:

- Le groupe $SU(2)$ est muni de sa 3-forme volume usuelle η induite par $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$. On note également η la 3-forme volume sur $SO(3) = SU(2)/\{\pm \mathbf{1}\}$ déduite de celle de $SU(2)$. En utilisant le fait que l'application $\text{Tr} : SU(2) \setminus \{\pm \mathbf{1}\} \rightarrow (-2, 2)$ est une submersion, on munit la sphère bidimensionnelle $S^2 = \{A \in SU(2) \mid \text{Tr} A = 0\}$ d'une 2-forme volume ν .
- Grâce au système de générateurs \mathcal{T}_i , l'application $R(B_i) \rightarrow SU(2)^n$, $\rho \mapsto (\rho(t_1^{(i)}), \dots, \rho(t_n^{(i)}))$, permet d'identifier $R(B_i)$ avec $SU(2)^n$ puis d'identifier¹ $R^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ avec le produit $(-2, 2) \times (S^2)^n$, et enfin de munir $R^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ de la forme volume produit $v^{R^{\mathcal{T}_i}(B_i)}$.

Pour munir l'espace $R^{\mathcal{S}}(S)$ d'une forme volume naturelle on procède ainsi. Soit D^* le disque troué $S \setminus \infty$ dont le groupe fondamental est le groupe libre à $2n$ générateurs s_1, \dots, s_{2n} (voir Fig. 1). L'application $\varphi : R^{\mathcal{S}}(D^*) \rightarrow SU(2)$ définie par $\varphi(\rho) = \rho(s_1 \cdots s_{2n})$ est surjective, l'ensemble de ses points critiques coïncide avec l'ensemble des représentations abéliennes de $\pi_1 D^*$ dans $SU(2)$ (cf. [3], Lemme 3.1) et $R^{\mathcal{S}}(S) = \varphi^{-1}(\mathbf{1})$. On a donc la suite exacte : $0 \rightarrow T_\rho \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S) \rightarrow T_\rho \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(D^*) \rightarrow \mathfrak{su}(2) \rightarrow 0$, dans laquelle $\mathfrak{su}(2)$ est muni de $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ et $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(D^*)$ est muni d'une $(4n + 1)$ -forme volume naturelle.² On munit alors $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$ de l'unique $(4n - 5)$ -forme volume $v^{R^{\mathcal{S}}(S)}$ compatible avec les deux autres.

- Pour finir, si G est l'un des groupes $\pi_1 B_1$, $\pi_1 B_2$ ou $\pi_1 S$ et \mathcal{G} est l'un des ensembles \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 ou S respectivement, alors $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ est l'espace total d'un $SO(3)$ -fibré principal de base $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$, ce qui permet de le munir d'une forme volume en utilisant la convention «base \wedge fibre». Plus précisément, on a la suite exacte : $0 \rightarrow T_\rho(SO(3) \circ \rho) \rightarrow T_\rho \widehat{R}^{\mathcal{G}}(G) \rightarrow T_{[\rho]} \widehat{R}^{\mathcal{G}}(G) \rightarrow 0$, où $SO(3) \circ \rho = \{Ad_A \circ \rho \mid A \in SU(2)\}$. On munit $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ de l'unique forme volume compatible avec η et avec la forme volume sur $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ construite ci-dessus.

Avec ces notations, on établit le théorème suivant :

Théorème 1.1. Soient $K_1 = \hat{\zeta}_1$ et $K_2 = \hat{\zeta}_2$ deux nœuds présentés sous forme de plats. Si les nœuds $K_1 = \hat{\zeta}_1$ et $K_2 = \hat{\zeta}_2$ sont isotopes, alors $\omega^{\hat{\zeta}_1} = \omega^{\hat{\zeta}_2}$.

Il en résulte que $\text{Reg}(K)$ possède une 1-forme volume bien définie, on la note ω^K .

La démonstration de ce résultat s'appuie sur un théorème de Birman–Reidemeister (cf. [1]), qui est l'analogue pour les plats du théorème de Markov pour les tresses. Notons K_{2n} le sous-groupe de B_{2n} engendré par $\sigma_1, \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2$ et $\sigma_{2j} \sigma_{2j-1} \sigma_{2j+1} \sigma_{2j}$, $1 \leq j \leq n - 1$. Le théorème de Birman–Reidemeister affirme que deux nœuds K_1, K_2 tels que $K_i = \hat{\zeta}_i$ où $\zeta_i \in B_{2n_i}$, $i = 1, 2$, sont isotopes si, et seulement s'il existe un entier $N \geq \max(n_1, n_2)$ tel que pour

¹ L'inclusion est donnée par : $(-2, 2) \times (S^2)^n \rightarrow SU(2)^n$, $(2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_n) \mapsto (\cos(\theta) + \sin(\theta) P_i)_{1 \leq i \leq n}$.

² En effet $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(D^*)$ est un ouvert de $R^{\mathcal{S}}(D^*) \cong (-2, 2) \times (S^2)^{2n}$ que l'on munit de la forme volume produit.

tout $n \geq N$ les tresses $\zeta'_i = \zeta_i \sigma_{2n_i} \sigma_{2n_i+2} \cdots \sigma_{2n} \in B_{2n+2}$, $i = 1, 2$, sont dans la même classe double de B_{2n+2} modulo le sous-groupe K_{2n+2} . La démonstration du Théorème 1.1 consiste donc à établir l'invariance de $\omega^{\hat{\zeta}}$ lorsque l'on change $\zeta \in B_{2n}$ par une tresse appartenant à la même classe double modulo K_{2n} et lorsque l'on change ζ en $\zeta \sigma_{2n}$.

Remarque 1. Soit $K \subset S^3$ un nœud.

- (1) Il est aisé de montrer que l'orientation induite par ω^K est l'orientation définie dans [3].
- (2) On peut aussi montrer que la forme volume ω^K ne dépend pas de l'orientation du nœud K et qu'en notant K^* son image miroir, on a $\omega^{K^*} = -\omega^K$.

2. Forme volume et torsion de Reidemeister

Dans cette partie, on explique comment interpréter la 1-forme volume ω^K sur $\mathcal{R}eg(K)$ comme la forme volume dont l'orientation induite est celle définie dans [3] (voir Remarque 1) et admettant pour densité une torsion de Reidemeister³ τ^K . Désormais $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$ désigne une représentation régulière.

On note \mathcal{X}^ρ le complexe tel que $\mathcal{X}_i^\rho = C^{2-i}(M; Ad\rho)$ avec $C^*(M; Ad\rho) = Hom_{G_K}(C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2))$, où \tilde{M} est le revêtement universel de M et où $C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z})$ est le $\mathbb{Z}[G_K]$ -module à gauche via l'action de G_K sur \tilde{M} comme groupe de revêtement.

Le complexe \mathcal{X}^ρ s'identifie à : $0 \rightarrow \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)^{2n} \rightarrow \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \rightarrow 0$ où les opérateurs bord sont induits par les opérateurs bord usuels du complexe $C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z})$ et où $\mathfrak{su}(2)^k$ est muni de la forme volume produit. Ce complexe n'est pas acyclique et son homologie $H_*(\mathcal{X}^\rho)$ est exactement la cohomologie tordue $H_\rho^{2-*}(M)$. Comme de plus ρ est irréductible, on a $H_\rho^0(M) = 0$. La torsion de Reidemeister de M dans la représentation adjointe associée à la représentation ρ , calculée dans les bases $\{h^{(i)}\}$ de $H_\rho^i(M)$, $i = 1, 2$, est la torsion de Reidemeister du complexe \mathcal{X}^ρ dans ces mêmes bases. On la note $tor(M; Ad\rho, \{h^{(1)}, h^{(2)}\})$.

Pour construire la densité τ^K on a besoin de déterminer un générateur pour $H_\rho^2(M)$. Lorsque ρ est régulière, on a $H_\rho^1(M) \cong \mathbb{R}$, mais aussi $H_\rho^2(M) \cong \mathbb{R}$ (car $\chi(\mathcal{X}^\rho) = 0$). L'axe commun des rotations $Ad\rho(\pi_1(\partial M))$, qui est défini au signe près, permet de fixer un élément $P^\rho \in S^2$ dans l'espace des vecteurs de $\mathfrak{su}(2)$ invariants sous l'action de $Ad\rho(\pi_1(\partial M))$. En utilisant la non dégénérescence du produit cup $\smile : H_\rho^0(\partial M) \times H_\rho^2(\partial M) \rightarrow H^2(\partial M; \mathbb{R})$ induit par le produit scalaire usuel de $\mathfrak{su}(2)$, cet élément permet de construire un isomorphisme naturel $\phi_{P^\rho}^{(2)} : H_\rho^2(\partial M) \rightarrow H^2(\partial M; \mathbb{R})$. D'autre part, en examinant la suite exacte longue en cohomologie associée à la paire $(M, \partial M)$, on montre que l'homomorphisme $i^* : H_\rho^2(M) \rightarrow H_\rho^2(\partial M)$ induit par l'inclusion $\partial M \hookrightarrow M$ est aussi un isomorphisme. Soit c une classe fondamentale de $H^2(\partial M; \mathbb{Z})$, le générateur distingué de $H_\rho^2(M)$ est $h_\rho^{(2)} = (\phi_{P^\rho}^{(2)} \circ i^*)^{-1}(c)$.

On peut dès lors définir la densité $\tau_\rho^K : T_{[\rho]} \widehat{R}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+$ associée au nœud K en la représentation ρ , en posant, pour tout vecteur non nul $v_{[\rho]} \in T_{[\rho]} \widehat{R}(M)$, $\tau_\rho^K(v_{[\rho]}) = |tor(M; Ad\rho, \{\varphi_{[\rho]}(v_{[\rho]}), h_\rho^{(2)}\})|$ et $\tau_\rho^K(0) = 0$, où $\varphi_{[\rho]} : T_{[\rho]} \widehat{R}(M) \xrightarrow{\cong} H_\rho^1(M)$. On constate que τ_ρ^K ne dépend pas du choix du signe de P^ρ ni de celui de la classe fondamentale c et ne dépend que de la classe de conjugaison de ρ , de sorte que la densité $\tau^K : [\rho] \mapsto \tau_\rho^K$ sur $\mathcal{R}eg(K)$ est bien définie.

Le théorème suivant permet de comparer les densités $|\omega^K|$ et τ^K sur $\mathcal{R}eg(K)$:

Théorème 2.1. Pour toute représentation régulière $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$, on a l'égalité $|\omega_{[\rho]}^K| = \tau_\rho^K$.

³ Pour la définition de la torsion de Reidemeister on renvoie à [7], on pourra aussi consulter [6].

La démonstration du Théorème 2.1 nécessite plusieurs étapes. L'idée principale pour comparer les densités $|\omega_{[\rho]}^K|$ et τ_ρ^K sur $T_{[\rho]}\widehat{R}(M)$ est de les interpréter comme une seule et même torsion de Reidemeister d'un complexe auxiliaire.

3. Exemples de calcul

Pour les nœuds toriques de type $(2, q)$, $q \geq 3$, impair, tel le nœud de trèfle, on peut calculer explicitement, grâce au Théorème 2.1, la forme volume définie ci-dessus. Notons Z_q l'extérieur du nœud torique K_q de type $(2, q)$. Le groupe de K_q admet la présentation suivante : $\pi_1(Z_q) = \langle x, y | x^2 = y^q \rangle$, on note m son méridien et l sa longitude ; dans $\pi_1(Z_q)$ on a $m = xy^{(1-q)/2}$ et $l = x^2m^{-2q}$.

L'espace $\widehat{R}(Z_q)$ des représentations irréductibles de $\pi_1(Z_q)$ dans $SU(2)$ a été décrit par Klassen dans [4]. $\widehat{R}(Z_q)$ est constitué de $(q-1)/2$ arcs, notés $\widehat{R}_\ell(Z_q)$, avec $\ell = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$, et paramétrés de la façon suivante : $\rho_{\ell,t} : \pi_1(Z_q) \rightarrow SU(2)$ est la représentation donnée par $\rho_{\ell,t}(x) = \mathbf{i}$ et $\rho_{\ell,t}(y) = \cos(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}) + \sin(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}) \times (\cos(\pi t)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j})$. On montre, de plus, que les représentations $\rho_{\ell,t}$ sont toutes régulières. Avec ces notations on peut établir le résultat suivant :

Théorème 3.1. *La 1-forme volume ω^{K_q} associée au nœud torique K_q de type $(2, q)$ vérifie :*

$$\omega_{[\rho_{\ell,t}]}^{K_q} \left(\frac{d\rho_{\ell,t}}{ds} \Big|_{s=t} \right) = \frac{8}{q} \sin^2 \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right) \frac{d\theta_m^{\rho_{\ell,t}}}{ds} \Big|_{s=t} \quad (4)$$

avec $\theta_m^{\rho_{\ell,t}} = \arccos((-1)^{\ell-1} \cos((2\ell-1)\pi/q) \cos(\pi t))$.

En utilisant une formule de Mayer–Vietoris (cf. [7]), on peut retrouver par chirurgie un résultat de Freed (cf. [2]) donnant la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe des sphères d'homologie de Brieskorn.

Théorème 3.2. *Si $k > 0$ et si M_k est la variété obtenue par chirurgie de pente $1/k$ le long du nœud torique K_q de type $(2, q)$, alors M_k est la variété fibrée de Seifert à trois fibres exceptionnelles d'indices $2, q, 2qk-1$, $\widehat{R}(M_k)$ est fini et formé des classes de conjugaison des représentations irréductibles $\varrho_{(\ell,n)}$ avec $\ell = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$, $n \equiv k \pmod{2}$, $\frac{(2qk-1)(2\ell-1)}{2q} < n < \frac{(2qk-1)(2q-2\ell+1)}{2q}$ et telles que : $\text{Tr}(\varrho_{(\ell,n)}(x)) = 0$, $\text{Tr}(\varrho_{(\ell,n)}(y)) = 2 \cos((2\ell-1)\pi/q)$ et $\text{Tr}(\varrho_{(\ell,n)}(m)) = 2 \cos(n\pi/(2qk-1))$. De plus $\varrho_{(\ell,n)}$ est acyclique et la torsion de Reidemeister de M_k dans la représentation adjointe associée à $\varrho_{(\ell,n)}$ est :*

$$\text{tor}(M_k; \text{Ad}_{\varrho_{(\ell,n)}}) = \frac{\pm 32}{(2qk-1)q} \sin^2 \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right) \sin^2 \left(\frac{2q\pi n}{2qk-1} \right). \quad (5)$$

Remerciements

L'auteur tient à remercier Saad Baaj, Michael Heusener, Jean-Yves LeDimet et Joan Porti.

Références

- [1] J. Birman, On the stable equivalence of plat representations of knots and links, *Canad. J. Math.* 28 (1976) 264–290.
- [2] D. Freed, Reidemeister torsion, spectral sequences, and Brieskorn spheres, *J. Reine Angew. Math.* 429 (1992) 75–89.
- [3] M. Heusener, An orientation for the $SU(2)$ -representation space of knot groups, *Topology Appl.* 127 (2003) 175–197.
- [4] E. Klassen, Representations of knot groups in $SU(2)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 326 (1991) 795–828.
- [5] J. Milnor, A duality theorem for Reidemeister torsion, *Ann. of Math.* 76 (1962) 134–147.
- [6] J. Porti, Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques, *Mem. Amer. Math. Soc.* 612 (1997).
- [7] V. Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsions*, Birkhäuser, 2001.